

Tutorat Optique

Étienne Thibierge¹

Vendredi 17 octobre 2014

Je vous invite à chercher tous les exercices par vous même. Si des questions perdurent à l'issue de la séance de TD ou à la lecture de ce corrigé, n'hésitez pas à me contacter par mail pour avoir de plus de précision. Pour rappel, l'énoncé du TD est sur le portail des études et sur ma page web.

| Des commentaires complémentaires à la correction proprement dite des exercices sont repérés de cette manière.

Exercice 1 : Ordres de grandeur

| Voilà quelques ordres de grandeur qu'il est bon d'avoir en tête ...

- ▷ Vitesse de la lumière : $3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- ▷ Champ visuel d'un œil emmétrope : plage de mise au point $[20 \text{ cm}, +\infty]$ et champ angulaire de 10° pour la lecture et 120° pour la perception du mouvement ;
- ▷ Temps de réponse de l'œil : $0,1 \text{ s}$;
- ▷ Temps de réponse d'une photodiode : $1 \mu\text{s}$;
- ▷ Focale d'une lentille de TP : $5 \text{ cm} - 1 \text{ m}$;
- ▷ Indice optique de l'eau : $1,33$;
- ▷ Indice optique d'un verre typique : $1,5$ (peut varier de $1,2$ à $1,8$) ;
- ▷ Longueurs d'onde du domaine visible : $400 \text{ nm} - 800 \text{ nm}$;
- ▷ Période de l'onde associée : 10^{14} Hz ;
- ▷ Longueur d'onde d'un laser HeNe : $632,8 \text{ nm}$;
- ▷ Longueurs d'onde du doublet du sodium : $589,0 \text{ nm} - 589,6 \text{ nm}$;
- ▷ Longueur d'onde de la raie verte du mercure : $546,1 \text{ nm}$;
- ▷ Longueur d'onde du maximum d'émission du Soleil : 504 nm ;
- ▷ Longueur de cohérence temporelle d'un laser : 30 cm ;
- ▷ Longueur de cohérence temporelle d'une raie spectrale : $100 \mu\text{m} - 1 \text{ mm}$;
- ▷ Puissance d'un laser : 1 mW ;
- ▷ Éclairement issu d'un laser : $1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$.

Exercice 2 : Détecteur de pluie sur un pare-brise

| Cet exercice demande d'appliquer les lois de Snell-Descartes, autour d'une application un peu plus originale que la fibre optique à saut d'indice, mais dont les calculs ressemblent beaucoup.

1 Calculons le sinus l'angle d'incidence θ' du rayon lumineux issu de la DEL à l'interface verre \rightarrow air. Cet angle est égal à l'angle d'émergence du rayon à l'interface plexiglas \rightarrow verre. D'après la seconde loi de Descartes,

$$\theta' = \arcsin \left[\frac{n_v}{n_p} \sin \theta \right] = 52,3^\circ.$$

Le verre étant plus réfringent que l'air ($n_v > n_a$), il peut y avoir réflexion totale à l'interface verre \rightarrow air. D'après la seconde loi de Snell-Descartes, l'angle d'incidence critique θ_c au delà duquel la réflexion totale a lieu est tel que

$$\theta_c = \arcsin \frac{n_a}{n_v} = 40,2^\circ.$$

Ainsi, puisque $\theta' > \theta_c$, il y a réflexion totale à l'interface verre \rightarrow air. **Il n'y a donc pas de rayon transmis du pare-brise vers l'air lorsque le pare-brise est sec.**

2 En présence de pluie, l'interface extérieure du pare-brise n'est plus verre \rightarrow air mais verre \rightarrow eau. Dans ce cas, l'angle critique donnant lieu à une réflexion totale vaut

$$\theta'_c = \arcsin \frac{n_e}{n_v} = 59,1^\circ.$$

Comme $\theta' < \theta'_c$, **un rayon est transmis vers l'extérieur du pare-brise lorsque celui-ci est mouillé.**

3 On a raisonné jusqu'ici sur un seul rayon lumineux. En pratique, d'une part la DEL émet un pinceau lumineux, d'autre part celui-ci se réfléchit plusieurs fois sur la face extérieure du pare-brise. Cela permet de tester la présence d'eau sur une surface plus étendue du pare-brise. Plus l'intensité reçue par le photodétecteur est faible, plus il y a de « fuites » de lumière à cause de l'eau, et plus les essuies-glace doivent balayer rapidement.

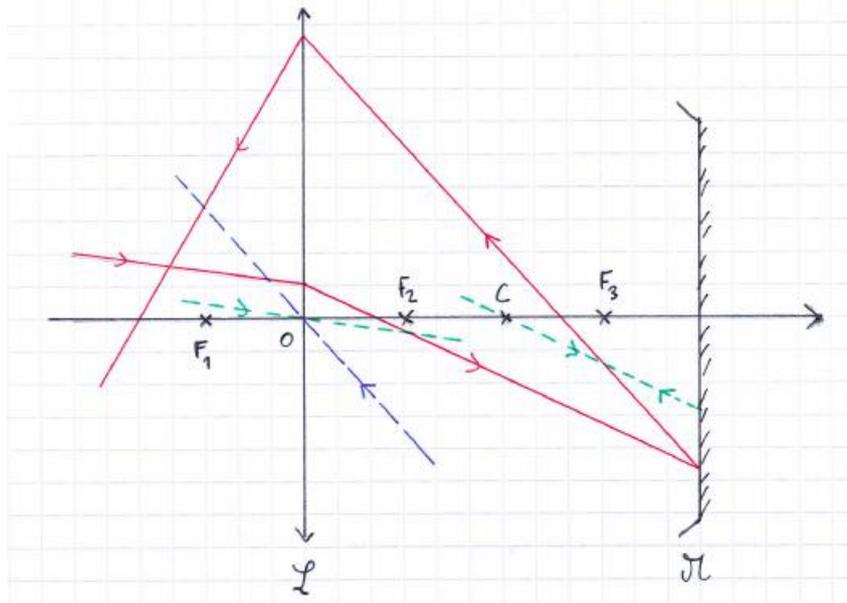
Il est important que le faisceau lumineux traverse d'abord du plexiglas : si les deux interfaces impliquaient de l'air, la condition de réflexion totale sur la face extérieure du pare-brise ne pourrait jamais être atteinte.

Exercice 3 : Une lentille et un miroir

Cet exercice permet de revoir toutes les compétences basiques d'optique géométrique des systèmes optiques et spécialement la recherche de points particuliers, le tracé de rayons et les relations de conjugaison.

Notons \mathcal{L} la lentille et \mathcal{M} le miroir, ainsi que f la distance focale commune de \mathcal{L} et \mathcal{M} .

1 Le rayon dont on trace la marche est le rayon rouge. Des rayons auxiliaires sont tracés en vert pour le premier passage par la lentille et la réflexion sur le miroir et en bleu pour le second passage par la lentille. À chaque fois, le rayon auxiliaire est choisi tel qu'il soit transformé en lui-même par le système optique (passage par le centre de la lentille ou du miroir) et parallèle au rayon d'intérêt, de telle sorte que les deux rayons se croisent dans le plan focal image de la lentille ou du miroir.



2 Commençons par le centre optique, c'est-à-dire le point qui est conjugué avec lui-même par le système optique : il s'agit du point I tel que $\overline{OI} = 2\overline{OF_1}$. C'est un point « de type Silbermann », son image par \mathcal{L} se trouve également à distance $2f$ du centre optique O , et est donc confondu avec le centre C du miroir. Le centre est son propre conjugué par le miroir, et on déduit du retour inverse que l'image de C par \mathcal{L} lorsqu'elle est traversée en sens inverse est à nouveau le point I . Récapitulons les conjugaisons successives :

$$I \xrightarrow{\mathcal{L}} I' = C \xrightarrow{\mathcal{M}} I'' = C \xrightarrow{\mathcal{L}} I''' = I$$

où le deuxième passage dans la lentille se fait de la droite vers la gauche.

Comme le système optique est centré, il s'agit nécessairement de points de l'axe optique. Les points particuliers à tester sont d'une part le centre optique des lentilles, leurs foyers et les points « de Silbermann » (montage $4f$) et d'autre part le sommet des miroirs sphériques, leur foyer et leur centre de courbure. Attention à ne pas oublier les points type Silbermann !

3 Le système est catadioptrique, c'est-à-dire qu'il fonctionne par réflexion. Il n'y a donc dans ce cas qu'un seul infini optique accessible au système : ici, celui en $-\infty$. Le principe du retour inverse impose donc qu'il ne possède qu'un unique foyer F qui joue à la fois le rôle de foyer objet et foyer image.

Pour le trouver, il faut tracer la marche d'un rayon parallèle à l'axe optique : un rayon confondu avec l'axe optique et ce rayon parallèle seraient issus d'un objet ponctuel situé à l'infini sur l'axe optique. Par définition, le foyer est l'image par le système d'un tel point. Il faut donc chercher le point auquel ce rayon coupe l'axe optique après avoir traversé le système. Les conventions de tracé sont les mêmes qu'à la question 1.

On déduit de la construction graphique que la position du foyer F est définie par

$$\overline{F_1F} = -\frac{2}{3}f$$

alors la relation de conjugaison du système complet s'écrit

$$\overline{F_1 A'''} = - \frac{f}{2 - \frac{1}{2 + \frac{f}{\overline{F_1 A}}}}$$

Toutefois, cette relation de conjugaison n'est pas facilement identifiable et il est préférable de l'écrire différemment en cherchant à faire apparaître la forme d'une relation de conjugaison avec origine au foyer. Commençons par réduire la fraction, ce qui conduit à

$$\overline{F_1 A'''} = - \frac{2\overline{F_1 A} + f}{3\overline{F_1 A} + 2f} f$$

Introduisons ensuite le foyer F dont on a calculé la position $\overline{F_1 F} = -2f/3$ à la question 3. Cela permet d'écrire la relation de conjugaison sous la forme

$$\overline{F A'''} \overline{F A} = \frac{1}{3} f^2 - \frac{4}{3} f \overline{F A}$$

Cette relation de conjugaison n'est pas celle d'un miroir sphérique ni d'une lentille : **le système optique étudié ici n'est pas équivalent à un système mince de référence.**

On aurait pu s'attendre à ce que le système soit équivalent à un miroir sphérique ou plan, et pourtant il n'en est rien. Ce résultat est en fait très général : a priori, un système optique composé (on parle aussi de système épais) n'est pas équivalent à un système simple. Dans le même esprit, il n'existe pas de lentille équivalente à une lunette astronomique.

La question telle qu'elle est posée n'est pas très claire car elle laisse entendre que le système équivalent existe ... Désolé!

Exercice 4 : Condition d'obtention des interférences

[d'après agreg de chimie 2013]

Cet exercice d'annales contient essentiellement ce qu'on pourrait appeler des questions de cours. Malheureusement, il n'est pas toujours bien posé et certaines questions sont un peu ambiguës ...

1.a Le coefficient a_n décrit l'**amplitude** de l'onde, $k_n = 2\pi/\lambda_n$ est son **nombre d'onde** relié à l'inverse de la longueur d'onde alors que ϕ_n traduit un **déphasage** constant.

1.b Les vibrations scalaires sont égales à la **projection des champs électriques de chacune des ondes sur le même état de polarisation.**

On pense souvent à une polarisation rectiligne, mais en fait cela n'a rien d'obligatoire : il peut tout aussi bien s'agir, par exemple, d'une polarisation circulaire.

1.c La puissance lumineuse est proportionnelle à l'amplitude du vecteur de Poynting de l'onde électromagnétique. Celui-ci implique le produit des champs électrique et magnétique. Pour une onde plane progressive harmonique comme envisagé ici, les deux amplitudes des deux champs sont proportionnelles. Par conséquent, **la puissance lumineuse reçue est proportionnelle au carré de l'amplitude** de la vibration scalaire.

2 Une onde électromagnétique visible a une période de l'ordre de 10^{-15} s, ce qui est beaucoup plus court que le temps de réponse de l'œil, de l'ordre de 0,1 s. L'œil ne peut donc pas suivre les variations instantanées de puissance qu'il reçoit, mais est seulement sensible à l'énergie cumulée qu'il reçoit pendant un temps de l'ordre de son temps de réponse. La quantité $\mathcal{E}(P)$ est l'**éclairage reçu au point P**.

Il existe une différence entre éclairage et intensité : l'éclairage correspond à l'énergie reçue par un récepteur, alors que l'intensité quantifie l'énergie émise par la source. En général (source pas trop grande et suffisamment éloignée), ces deux quantités sont proportionnelles. Néanmoins, pour décrire une figure d'interférences, il est plus correct de parler d'éclairage que d'intensité.

3.a Commençons par développer la puissance instantanée reçue en P .

$$\mathcal{P}(P, t) = K [s_1(P, t) + s_2(P, t)]^2 = K [s_1(t)^2 + s_2(P, t)^2 + 2s_1(P, t)s_2(P, t)]$$

En intégrant, les deux premiers termes donnent directement les éclairages \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 des ondes 1 et 2 prises séparément, alors que le troisième terme est le terme d'interférences entre les deux ondes, ce que l'on résume sous la forme

$$\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{12}(P).$$

3.b Calculons

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau K a_n^2 \cos^2(\omega_n t - k_n x_n + \phi_n) dt$$

Comme le terme en carré du cosinus est intégré sur un intervalle bien plus grand que sa période, alors l'intégrale est égale à sa valeur moyenne 1/2 multipliée par la largeur τ de l'intervalle.

| *Le fait que la largeur de l'intervalle intervienne peut se voir par simple analyse dimensionnelle.*

Le terme $-k_n x_n + \phi_n$ ne dépend pas du temps, et ne décrit qu'un déphasage constant qui ne joue aucun rôle dans le calcul de l'intégrale. Ainsi,

$$\mathcal{E}_n = \frac{K a_n^2}{2}$$

3.c Calculons le produit intervenant dans le terme d'interférence

$$\begin{aligned} 2 s_1(P, t) s_2(P, t) &= 2 a_1 a_2 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \phi_1) \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \phi_2) \\ &= a_1 a_2 \{ \cos[(\omega_1 + \omega_2)t - k_1 x_1 - k_2 x_2 + \phi_1 + \phi_2] + \cos[(\omega_1 - \omega_2)t - k_1 x_1 + k_2 x_2 + \phi_1 - \phi_2] \} \end{aligned}$$

Lors du calcul de l'intégrale le terme impliquant la somme $\omega_1 + \omega_2$ est intégré sur un grand nombre de ses périodes, et seule demeure sa valeur moyenne qui est nulle : il ne contribue donc pas à l'éclairement. Si $\omega_1 \neq \omega_2$, on peut considérer qu'il en est de même pour le second terme.

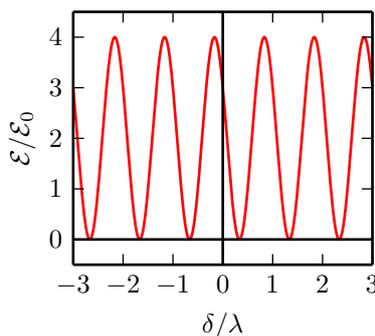
| *Ceci est une approximation, qui revient à considérer τ infini, mais qui permet de bien décrire les résultats expérimentaux. En outre, une approche plus poussée des interférences en termes de corrélations du champ électromagnétique conduit au même résultat.*

Par conséquent, **le terme d'interférences \mathcal{E}_{12} n'est pas nul que si $\omega_1 = \omega_2$.**

Comme on considère deux ondes planes progressives monochromatiques se propageant dans le vide, elles vérifient $k_n = \omega_n/c$ donc $k_1 = k_2 \equiv k$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{12}(P) &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau a_1 a_2 \cos[k(x_2 - x_1) + \phi_1 - \phi_2] dt \\ &= a_1 a_2 \cos[k(x_2 - x_1) + \phi_1 - \phi_2] \\ \mathcal{E}_{12}(P) &= 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos[k \delta + \phi_1 - \phi_2]. \end{aligned}$$

3.d Pour faire la figure, plaçons-nous dans le cas $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 \equiv \mathcal{E}_0$, et à des fins illustratives choisissons $\phi_1 - \phi_2 = \pi/3$.



4 Le cosinus prenant des valeurs entre -1 et 1,

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{\max} = K \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{2} + a_1 a_2 \right) \\ \mathcal{E}_{\min} = K \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{2} - a_1 a_2 \right) \end{cases}$$

d'où on déduit

$$\Gamma = \frac{2 a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}$$

Pour maximiser le contraste, les deux amplitudes a_1 et a_2 doivent être égales.

5.a Les sources réelles sont sujettes à des fluctuations aléatoires de phase au cours du temps. Pour pouvoir supposer que la différence est constante, il faut que le temps caractéristique des fluctuations soit bien plus grand que le temps τ caractéristique du récepteur.

5.b Le temps caractéristique de variation du déphasage est le plus court des temps de cohérence temporelle de chacune des sources. Il vaut environ 10^{-9} s pour un laser de TP et 10^{-12} s pour une lampe spectrale.

Le temps de cohérence temporelle τ_c s'obtient à partir de la longueur de cohérence temporelle ℓ_c par $\tau_c = \ell_c/c$. Dans un modèle de train d'onde, il correspond à la durée du train d'onde.

Par conséquent, il n'est pas possible d'observer des interférences à partir de deux lampes spectrales différentes ni même de deux lasers de TP différents.

5.c Pour s'affranchir de cet effet, il faut que S_1 et S_2 soient deux sources secondaires, créées en faisant suivre à la lumière deux trajets différents depuis une unique source primaire. Dans un interféromètre à division du front d'onde (dispositifs d'Young ou miroirs de Fresnel par exemple), l'onde émise par la source primaire est séparée géométriquement en deux parties qui empruntent des voies différentes. Dans un interféromètre à division d'amplitude (interféromètre de Michelson ou de Fabry-Pérot), l'onde émise par la source rencontre une surface partiellement réfléchissante. L'onde transmise et l'onde réfléchie suivent ensuite des voies différentes.

Exercice 5 : Doublet du sodium

Cet exercice est un classique, présenté ici dans une perspective expérimentale. Il s'agit d'un problème de cohérence temporelle avec un doublet. Les calculs sont analogues à ceux d'un problème de cohérence spatiale avec deux points sources, voir l'exercice 7.

1 Un interféromètre de Michelson en configuration lame d'air éclairé par une source étendue donne un système de franges localisées. Observer au foyer image de la lentille permet d'observer la surface de localisation, qui est à l'infini.

Seuls les interféromètres à division d'amplitude donnent lieu à une localisation des franges. En outre, si la source était ponctuelle, des franges seraient présentes dans tout le champ d'interférences. Ainsi, les deux conditions pour avoir localisation des franges sont la division d'amplitude et la source étendue.

2 Les deux raies formant le doublet étant de longueurs d'onde différentes, elles ne sont pas cohérentes, et l'éclairement total est obtenu en sommant l'éclairement dû à chacune des raies observées individuellement. Les raies étant de même intensité, elles produisent chacune le même éclairement moyen \mathcal{E}'_0 . Au centre des anneaux, la différence de marche vaut $\delta = 2x$. Ainsi, par la formule de Fresnel,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}'_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta \right] \right\} + \mathcal{E}'_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_2} \delta \right] \right\} \\ &= \mathcal{E}'_0 \left\{ 2 + 2 \cos \left[2\pi \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) 2x \right] \cos \left[2\pi \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) 2x \right] \right\} \\ &= \mathcal{E}'_0 \left\{ 2 + 2 \cos \left[2\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} x \right] \cos \left[4\pi \frac{\lambda_0}{\lambda_0^2} x \right] \right\} \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}_0 \left\{ 1 + \gamma(x) \cos \left[\frac{4\pi}{\lambda_0} x \right] \right\}. \end{aligned}$$

en considérant $\lambda_1 \lambda_2 \simeq \lambda_0^2$, et en introduisant l'éclairement moyen $\mathcal{E}_0 = 2\mathcal{E}'_0$ et la fonction de contraste local

$$\gamma(x) = \cos \left(2\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} x \right).$$

Le terme $\cos(4\pi x/\lambda_0)$ décrit les franges à la longueur d'onde moyenne du doublet.

3 Les antioïncidences correspondent aux annulations de la fonction de contraste. Ces dernières ont lieu lorsque l'argument du cosinus vaut $\pm\pi/2$ à 2π près. Deux antioïncidences sont donc séparées d'une translation du miroir mobile Δx telle que

$$2\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} (x + \Delta x) = 2\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} x + \pi \quad \text{d'où} \quad \Delta x = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda}$$

Or le terme décrivant les franges a pour période $\lambda_0/2$. Par conséquent, lorsque le miroir est translaté de Δx , le nombre d'anneaux ayant défilé sur l'écran vaut

$$N = \frac{\Delta x}{\lambda_0/2} \quad \text{soit} \quad \boxed{N = \frac{\lambda_0}{\Delta \lambda}}$$

Numériquement, $\Delta \lambda = \lambda_0/N = 0,600 \text{ nm}$.

4 L'expression précédente est un simple quotient, les incertitudes s'écrivent donc sous la forme

$$\frac{\delta \Delta \lambda}{\Delta \lambda} = \sqrt{\left(\frac{\delta \lambda_0}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{\delta N}{N}\right)^2}$$

Numériquement,

$$\frac{\delta \Delta \lambda}{\Delta \lambda} = \sqrt{\left(\frac{0,2}{589,3}\right)^2 + \left(\frac{1}{982}\right)^2} = 1 \times 10^{-3} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\delta \Delta \lambda = 6 \times 10^{-4} \text{ nm}}$$

Par conséquent, **la mesure interférométrique permet de réduire l'incertitude sur $\Delta \lambda$ de $2 \times 10^{-1} \text{ nm}$ à $6 \times 10^{-4} \text{ nm}$.**

| *Remarquer que seule la précision relative sur λ_0 joue un rôle ici, au contraire de la précision absolue.*

5 En pratique, **le contraste des coïncidences diminue** au fur et à mesure que l'on s'éloigne du contact optique. **Ce brouillage supplémentaire est dû à la largeur spectrale non nulle de chacune des raies formant le doublet**, qui n'est pas pris en compte ici.

Exercice 6 : Spectroscopie par transformée de Fourier

| *Cet exercice aborde la cohérence temporelle pour un spectre continu, dans le cas (réaliste) d'une raie gaussienne ... mais cela rend certaines questions assez calculatoires.*

1 La différence de marche entre les deux bras de l'interféromètre au centre des anneaux s'écrit $\delta(t) = \delta_0 + 2Vt$. Par conséquent, en vertu de la formule de Fresnel,

$$\boxed{u(t) = \beta \mathcal{E}_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (\delta_0 + 2Vt) \right] \right\}}$$

ce qui décrit bien une variation sinusoïdale. On en déduit que la période de u vaut $T = \lambda/2V$, d'où

$$\boxed{V = \frac{\lambda}{2T} = 3,2 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

| *Cette vitesse est particulièrement faible, mais elle n'est pas si difficile que ça à atteindre en utilisant des démultiplicateurs dans le moteur translatant le miroir.*

2 Il suffit de substituer les définitions, $\mathcal{E}_0(\nu) d\nu = d\mathcal{E}_{0\nu}(\nu) = K dP(\nu) = K P_\nu(\nu) d\nu$, d'où

$$\boxed{\mathcal{E}_{0\nu}(\nu) = K P_\nu(\nu)}$$

3 D'après la formule de Fresnel, l'éclairement dû à la bande infinitésimale de fréquences $[\nu, \nu + d\nu]$ vaut

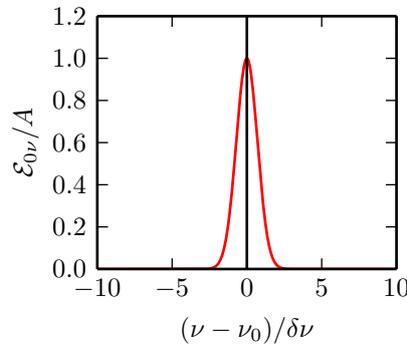
$$\mathcal{E}_\nu(\nu) = 2\mathcal{E}_{0\nu}(\nu) \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \right] = 2\mathcal{E}_{0\nu}(\nu) [1 + \cos(2\pi \nu \tau)]$$

| *Attention au facteur 2 dans la formule de Fresnel : tout dépend de la définition qui est prise pour l'éclairement \mathcal{E}_0 , qui peut être ou bien l'éclairement moyen (auquel cas pas de 2) ou bien l'éclairement lorsqu'une voie est occultée (auquel cas il faut un 2).*

Les différentes bandes de fréquence n'étant pas cohérentes entre elles, l'éclairement total au niveau du détecteur est la somme des différents éclaircements individuel. La somme étant continue, il s'agit d'une intégrale, qui concerne toutes les fréquences,

$$\mathcal{E} = 2 \int_0^{+\infty} \mathcal{E}_{0\nu}(\nu) [1 + \cos(2\pi\nu\tau)] d\nu.$$

4 Pour la raie verte d'une lampe au mercure, $\nu_0 \simeq 5 \times 10^{14}$ Hz et $\delta\nu \simeq 10^{10}$ Hz, ce qui demande de centrer la figure.



5 Calculons l'intégrale obtenue question 3 pour le profil de raie considéré, et en élargissant le domaine d'intégration comme le propose l'énoncé

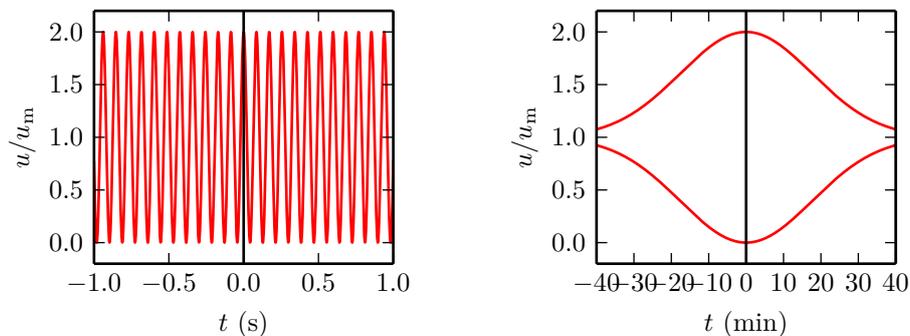
$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 2 A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\delta\nu^2}\right] [1 + \cos(2\pi\nu\tau)] d\nu \\ &= 2 A \delta\nu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} [1 + \cos(2\pi(\nu_0 + \delta\nu u)\tau)] du \\ &= 2 A \delta\nu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} [1 + \cos(2\pi\nu_0\tau) \cos(2\pi\delta\nu u\tau) - \sin(2\pi\nu_0\tau) \sin(2\pi\delta\nu u\tau)] du \end{aligned}$$

$$\mathcal{E} = 2\sqrt{\pi} A \delta\nu \left[1 + e^{-\pi^2\delta\nu^2\tau^2} \cos(2\pi\nu_0\tau)\right]$$

ce qui est de la forme indiquée en définissant l'éclairement moyen \mathcal{E}_m et la fonction de contraste local $\gamma(\tau)$ par

$$\mathcal{E}_m = 2\sqrt{\pi} A \delta\nu \quad \text{et} \quad \gamma(\tau) = e^{-\pi^2\delta\nu^2\tau^2}$$

6 Pour représenter fidèlement l'allure de la tension $u(t)$, il est nécessaire de dissocier les échelles de temps courtes (figure de gauche, tracée sur 1 s) des échelles de temps longues (figure de droite, tracée sur 40 min). Aux temps courts, seules les oscillations rapides sont visibles et le contraste est quasi-uniforme. Au contraire, aux temps longs, on perçoit les variations de contraste. Pour que la figure soit lisible, seule l'enveloppe est représentée. Les valeurs prises sont celles données question 4.



Pour obtenir $\delta\nu$ à partir de cet enregistrement, la méthode la plus précise consiste à **réaliser un ajustement paramétrique de l'enveloppe** par la gaussienne obtenue à la question précédente. Pour un ordre de grandeur, **on peut se contenter d'estimer le temps typique τ_c de décroissance de ladite enveloppe** et d'en déduire $\delta\nu$ via $\delta\nu \simeq 1/\pi\tau_c$.

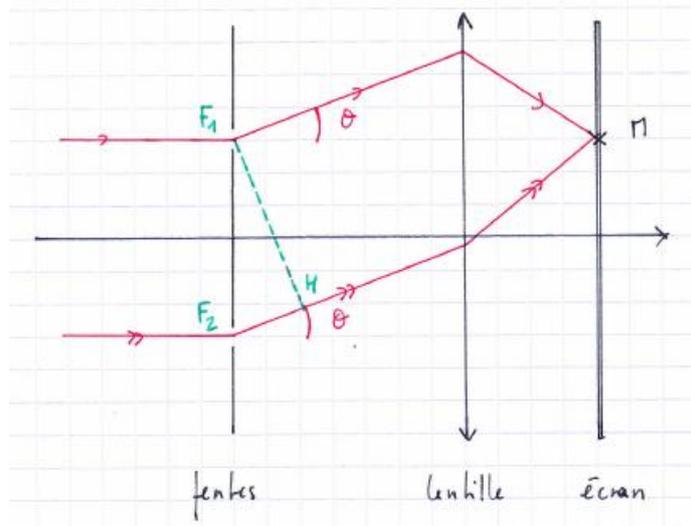
Exercice 7 : Étoile double

[agrég interne 2004]

Cet exercice étudie un problème de type cohérence spatiale pour deux sources ponctuelles. Au passage, il permet de réviser les calculs de différence de marche dans un dispositif d'Young. Les calculs sont classiques et il faut savoir les faire efficacement.

Dans tout l'exercice, on considère que la propagation a lieu dans l'air dont l'indice optique est omis dans les calculs.

1 Comme l'observation se fait dans le plan focal image d'une lentille convergente, les rayons qui interfèrent sont ceux qui ont la même inclinaison θ en sortie des trous. Le tracé en vert est exploité à la question 3.



2 Il faut utiliser la lentille dans les conditions de Gauss **pour qu'elle soit stigmatique**. Ce défaut pourrait conduire à un brouillage des franges.

3 Les interférences sont observées dans le plan focal image d'une lentille, ce qui revient à les étudier à l'infini optique. En vertu du théorème de Malus et du principe de retour inverse, la différence de marche entre les deux rayons est la distance F_2H représentée sur la figure.

Attention, les deux arguments sont importants. Le théorème de Malus indique que si une source ponctuelle était placée en M , alors F_1 et H appartiendraient au même plan d'onde et donc il y a égalité des chemins optiques $[MF_1]$ et $[MH]$. Le principe du retour inverse permet d'en déduire l'égalité des chemins optiques $[F_1M]$ et $[HM]$, qui n'a a priori rien d'évident puisque H et F_1 n'appartiennent pas au même plan d'onde.

Ainsi,

$$\delta = F_2H = a \sin \theta \simeq a\theta .$$

au premier ordre en θ . En outre, toujours au premier ordre, $\theta \simeq \tan \theta = x/f'$. Ainsi,

$$\delta = \frac{ax}{f'}$$

L'intensité lumineuse se déduit de la formule de Fresnel,

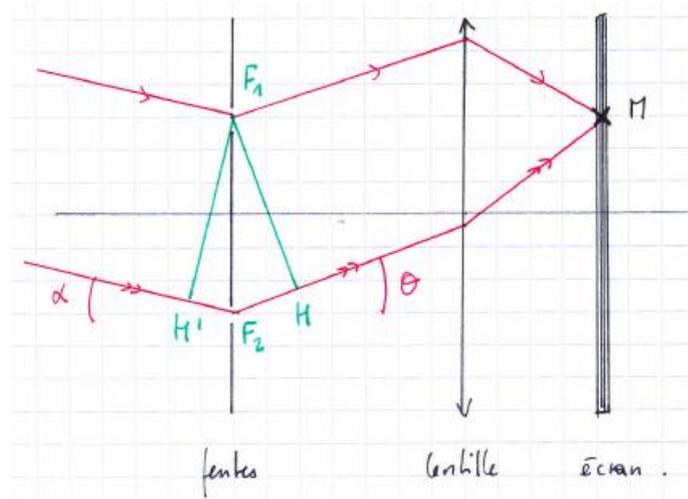
$$I_1(x) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda f'} \right) \right]$$

L'interfrange est la période spatiale de la figure d'interférences. Dans le cas présent, il vaut

$$i = \frac{\lambda f'}{a}$$

4 En vertu du théorème de Malus, la différence de marche vaut désormais $H'F_2 + F_2H$. Les mêmes calculs qu'à la question précédente permettent de l'écrire

$$\delta = a\alpha + \frac{ax}{f'}$$



De même,

$$I_2(x) = 2I_0 \left\{ 1 + \cos \left[2\pi \frac{a}{\lambda} \left(\alpha + \frac{x}{f'} \right) \right] \right\} .$$

La figure d'interférence produite par l'étoile E_2 est identique à celle produite par l'étoile E_1 , à ceci près qu'elle est translatée sur l'écran d'une quantité $2\pi \alpha a f'/\lambda$.

5.a Les deux étoiles forment deux sources ponctuelles incohérentes pour l'interféromètre. Par conséquent, l'intensité totale est la somme de l'intensité issue de chacune des étoiles. Comme les deux figures d'interférences sont identiques mais décalées, lorsque les minimums de l'une se superposent aux maximums de l'autre l'intensité mesurée est uniforme. Le décalage entre les figures dépendant de a , voir la question précédente, faire varier a permet d'atteindre une intensité uniforme.

Le plus important dans cette réponse est le caractère incohérent des deux étoiles : c'est un argument qu'il ne faut surtout pas oublier !

5.b Calculons $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$.

$$\begin{aligned} I(x) &= 2I_0 \left\{ 2 + \cos \left[2\pi \frac{ax}{\lambda f'} \right] + \cos \left[2\pi \frac{a}{\lambda} \left(\alpha + \frac{x}{f'} \right) \right] \right\} \\ &= 2I_0 \left\{ 2 + 2 \cos \left[2\pi \frac{\alpha a}{2\lambda} \right] \cos \left[2\pi \frac{a}{2\lambda} \left(\alpha + \frac{2x}{f'} \right) \right] \right\} \\ I(x) &= 4I_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi \alpha a}{\lambda} \right] \cos \left[\frac{\pi a}{\lambda} \left(\alpha + \frac{2x}{f'} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Le contraste est l'appellation donnée au terme $\Gamma = \cos(\pi \alpha a/\lambda)$ qui quantifie la différence d'intensité entre les franges sombres et brillantes.

Une dénomination plus correcte serait plutôt degré de contraste ou facteur de contraste. En effet, le contraste dans sa définition stricte $(I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min})$ n'est pas égal à Γ mais à $|\Gamma|$.

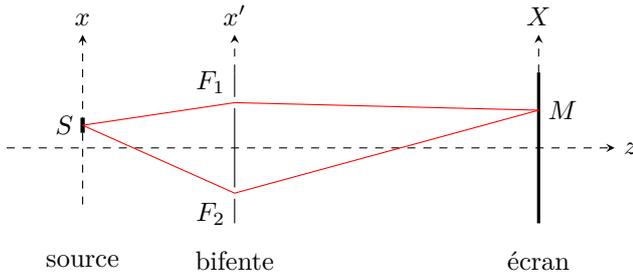
5.c La première annulation de contraste est observée lorsque $\pi a_1 \alpha/\lambda = \pi/2$. Ainsi,

$$\alpha = \frac{\lambda}{2a_1} = 9,68 \times 10^{-7} \text{ rad.}$$

Exercice 8 : Fentes d'Young éclairées par une source large

Cet exercice concerne la cohérence spatiale d'une fente source de largeur finie. L'avoir bien compris est important, car il permet de mettre le doigt sur des confusions fréquentes (y compris dans les livres ...) concernant la cohérence spatiale.

1.a



Dans le cadre d'une étude expérimentale, des ordres de grandeur plausibles pour les différentes distances mises en jeu seraient $d \sim 20$ cm, $D \sim 50$ cm, $a \sim 500$ μ m et $b \sim 2$ mm (taille maximale de la fente source). Ainsi, il est raisonnable de considérer que $x/d \lesssim b/d$, a/d , a/D et X/D sont des infiniments petits d'ordre 1 et qu'un développement limité au premier ordre suffit.

La propagation ayant lieu dans l'air, il s'agit donc de calculer géométriquement

$$\begin{aligned} \delta &= SF_2 + F_2M - SF_1 - F_1M \\ &= \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + d^2} + \sqrt{\left(X - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} - \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + d^2} - \sqrt{\left(X + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} \\ &= d\sqrt{1 + \left(\frac{x}{d} + \frac{a}{2d}\right)^2} + D\sqrt{1 + \left(\frac{X}{D} + \frac{a}{2D}\right)^2} - d\sqrt{1 + \left(\frac{x}{d} - \frac{a}{2d}\right)^2} - D\sqrt{1 + \left(\frac{X}{D} - \frac{a}{2D}\right)^2} \end{aligned}$$

Par quatre développements limités du type $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x$, on obtient après simplification

$$\delta = \frac{d}{2} \left(\frac{x}{d} + \frac{a}{2d}\right)^2 + \frac{D}{2} \left(\frac{X}{D} + \frac{a}{2D}\right)^2 - \frac{d}{2} \left(\frac{x}{d} - \frac{a}{2d}\right)^2 - \frac{D}{2} \left(\frac{X}{D} - \frac{a}{2D}\right)^2$$

En développant les carrés puis en simplifiant de nouveau, on obtient finalement

$$\delta = a \left(\frac{x}{d} + \frac{X}{D}\right).$$

Un calcul approché utilisant le théorème de Malus est parfois proposé pour des questions de ce genre. Néanmoins, si la source et l'écran sont à distance finie, il est moins rigoureux que le développement limité proposé ici.

Par application de la formule de Fresnel,

$$I(X) = 2I_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{d} + \frac{X}{D} \right) \right] \right\}.$$

1.b Le résultat de la question précédente ne dépend ni de l'ordonnée y du point de source ni de celle Y du point d'observation. Par conséquent, **lorsque la source est étendue dans la direction y , la figure sur l'écran s'étend de même mais le système de franges n'est pas altéré.**

Dans la limite où la source est infinie, le dispositif est invariant par translation verticale. En vertu du principe de Curie, il en est de même pour la figure d'interférences.

2.a Une source étendue se modélise comme une assemblée de sources ponctuelles deux à deux incohérentes. Ici, l'intensité totale I_0 émise par la source est la somme des intensités émises par chacune des bandes élémentaires. La source étant continue, la somme est en fait une intégrale,

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(x) dx.$$

Une fois de plus, l'argument le plus important est l'incohérence mutuelle des différentes bandes élémentaires.

En supposant la source uniforme et de la largeur b , $\mathcal{I}(x)$ ne dépend pas de $-b/2 \leq x \leq b/2$ et est nulle en dehors de cet intervalle. Ainsi,

$$I_0 = \int_{-b/2}^{+b/2} \mathcal{I} dx,$$

d'où on conclut directement

$$\mathcal{I}(x) = \begin{cases} I_0/b & \text{si } -b/2 \leq x \leq b/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.b En raison de l'incohérence mutuelle des bandes élémentaires de source, l'intensité sur l'écran est la somme des intensités résultant des interférences de chaque bande avec elle-même. Ainsi, on peut utiliser le résultat de la question 1.a en remplaçant I_0 par $\mathcal{I}(x) dx$ et en sommant,

$$\begin{aligned}
 I(X) &= \int_{-b/2}^{+b/2} 2 \frac{I_0}{b} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{d} + \frac{X}{D} \right) \right] \right\} dx \\
 &= 2I_0 + 2 \frac{I_0}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} \cos \left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{d} + \frac{X}{D} \right) \right] dx \\
 &= 2I_0 + 2 \frac{I_0}{b} d \int_{-\frac{b}{2d} + \frac{X}{D}}^{\frac{b}{2d} + \frac{X}{D}} \cos \left[\frac{2\pi a}{\lambda} u \right] du \\
 &= 2I_0 + 2 \frac{I_0}{b} \frac{\lambda d}{2\pi a} \left[\sin \left(\frac{2\pi a}{\lambda} u \right) \right]_{-\frac{b}{2d} + \frac{X}{D}}^{\frac{b}{2d} + \frac{X}{D}} \\
 &= 2I_0 \left\{ 1 + \frac{\lambda d}{2\pi a b} \left[\sin \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{b}{2d} + \frac{X}{D} \right) \right) - \sin \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(-\frac{b}{2d} + \frac{X}{D} \right) \right) \right] \right\} \\
 &= 2I_0 \left\{ 1 + \frac{\lambda d}{\pi a b} \sin \left(\frac{\pi a b}{\lambda d} \right) \cos \left(\frac{2\pi a X}{\lambda D} \right) \right\} \\
 \boxed{I(X) = 2I_0 \left\{ 1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a b}{\lambda d} \right) \cos \left(\frac{2\pi a X}{\lambda D} \right) \right\}}
 \end{aligned}$$

Le terme en cos décrit les oscillations de l'intensité sur l'écran, c'est-à-dire les franges d'interférences, alors que le terme en sinc décrit le contraste de la figure d'interférences.

3.a La fonction sinus cardinal s'annule pour les mêmes valeurs de son argument que la fonction sinus, c'est-à-dire pour tous les multiples de π . Dans le cas d'une source étendue, il y a annulation de contraste pour toutes les valeurs b_n (n entier positif) telles que

$$\frac{\pi a b_n}{\lambda d} = n\pi \quad \text{soit} \quad \boxed{b_n = n \frac{\lambda d}{a}}$$

Lorsque b atteint une valeur de b_n le terme en sinus cardinal change de signe. **On parle d'inversion de contraste car sur l'écran, les franges sombres deviennent brillantes et inversement.**

3.b La largeur de cohérence spatiale ℓ_s de la source est la première valeur de b donnant lieu à une annulation du contraste, c'est-à-dire la valeur de b_1 .

$$\boxed{\ell_s = \frac{\lambda d}{a}}$$

3.c Pour améliorer le contraste, il faut diminuer l'argument du facteur de contraste. Si b est fixée, **il est également possible d'augmenter d** , c'est-à-dire d'éloigner le diaphragme des fentes d'Young. Toutefois cette solution est très vite limitée en pratique car **éloigner la source revient à perdre de la lumière** et donc à diminuer la luminosité de la figure d'interférences.

Attention, il s'agit d'une diminution de luminosité accompagnée d'une augmentation de contraste. Ce n'est pas contradictoire : la luminosité est une notion globale, alors que le contraste s'intéresse aux variations relatives de luminosité au sein de la figure.

3.d Au vu des deux questions précédentes, les rôles joués par b et d peuvent être interchangés. Au vu de l'expression de contraste, la grandeur pertinente est le **rapport $\theta = b/d$, qui s'interprète comme l'angle sous lequel l'interféromètre voit la source**. L'angle de cohérence spatiale, défini comme l'angle θ le plus petit à donner lieu à une inversion de contraste, est alors

$$\boxed{\theta_s = \frac{\lambda}{a}}$$

Le point soulevé par ces quelques questions est très important : la cohérence spatiale implique à la fois la source et l'interféromètre. Il ne faut pas faire de confusion avec la cohérence temporelle, qui concerne des propriétés intrinsèques à la source. La grandeur adéquate pour la caractériser est l'angle de cohérence spatiale. Des projections de cet angle peuvent être utilisées pour définir une longueur de cohérence ou une aire de cohérence spatiale, mais c'est bel et bien l'angle qui importe.

4 La fente source mise dans un montage de type fente d'Young sert à diminuer l'angle sous lequel l'interféromètre voit la source, **pour rendre celle-ci spatialement cohérente**.

En particulier, la fente source n'a aucun rôle diffractant. Ça ne veut pas dire qu'elle ne diffracte pas, mais plutôt que ce n'est pas son rôle premier.

Dans un montage utilisant un laser, il n'y a pas besoin de fente source, puisque grâce à sa cavité résonante, un laser est déjà une source spatialement cohérente.

Exercice 9 : Diffraction par une fente

[agreg interne 2004]

Cet exercice reprend le cas d'école de l'étude du phénomène de diffraction. Pas grand chose de plus intéressant que la révision des bases.

1.a Lorsque h est infini et en supposant le faisceau infini, le dispositif est invariant par translation le long de la direction Oy . En vertu du principe de Curie, la figure de diffraction doit l'être également. En outre, le système est symétrique par échange $x \rightarrow -x$: il doit en être de même de la figure de diffraction. Ainsi, **elle est constituée de bandes verticales infinies dans la direction Oy et symétriques par rapport à l'axe $y = 0$** .

Les caractéristiques ici citées sont directement déduites de l'analyse des symétries, quand bien même on n'a aucune idée de l'allure de la figure de diffraction. Il est ensuite possible de décrire la figure à partir de ce qu'on en connaît.

La bande au centre de l'écran est la plus lumineuse, et elle est entourée de quelques bandes de part et d'autre qui sont de moins en moins lumineuses lorsque l'on s'éloigne du centre de l'écran.

1.b Lorsque la hauteur h est finie (et est toujours plus petite que le faisceau), **une figure de diffraction apparaît dans la direction Oy** . Néanmoins, tant que $h \gg b$, cette figure apparaît sur des échelles beaucoup plus petites.

1.c Si la fente est éclairée par un laser, la hauteur h est en général plus grande que le faisceau. **La figure de diffraction obtenue est alors celle d'une fente infinie, mais lumineuse seulement sur la hauteur du faisceau**.

2.a Le principe de Huygens-Fresnel permet de reconstruire l'onde diffractée en un point M par une pupille connaissant l'onde incidente et la fonction de transparence de la pupille. Pour cela, la pupille est décomposée en sources quasi-ponctuelles élémentaires cohérentes, chacune des sources émettant une ondelette sphérique. L'amplitude instantanée de l'ondelette émise par la source élémentaire située en P est proportionnelle à celle de l'onde incidente $s_{\text{in}}(P)$ multipliée par la transparence $t(P)$ de la pupille et à l'élément de surface occupé par la source $d\Sigma_P$. Mathématiquement, en lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$,

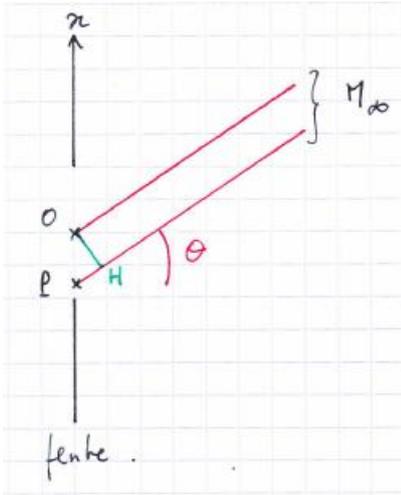
$$s(M, t) \propto \int_{P \in \text{pupille}} t(P) s_{\text{in}}(P) \frac{e^{i(\omega t - k[PM])}}{PM} d\Sigma_P$$

2.b Dans le cas présent, la fonction de transparence ne dépend pas de y et vaut

$$t(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -b/2 \leq x \leq b/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En outre, l'onde incidente est plane et en incidence normale. Par conséquent, $s_{\text{in}}(P)$ est une constante s_0 . De plus, l'observation se fait à l'infini, et la distance PM au dénominateur peut être considérée comme constante sur l'ensemble de la source : on l'insère donc dans le facteur de proportionnalité. Une telle approximation n'est pas possible dans l'argument de l'exponentielle où intervient la longueur d'onde. Néanmoins, comme seul compte le déphasage, le chemin optique $[PM]$ est remplacé par la différence de chemin optique par rapport à une référence, en l'occurrence le centre O de la source. Enfin, on ne s'intéresse qu'à la diffraction dans le plan $y = 0$, ce qui permet de factoriser la dépendance en y et de l'intégrer à nouveau dans la constante de proportionnalité. Ainsi, en notant K la constante de proportionnalité, le principe de Huygens Fresnel se traduit sous la forme

$$s(M, t) = K \int_{-b/2}^{+b/2} s_0 \exp i \{ \omega t - k([PM] - [OM]) \} dx$$



En vertu du théorème de Malus et du principe de retour inverse, la différence de marche $[PM] - [OM]$ dans la direction θ vaut $PH = OP \sin \theta = x \sin \theta$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 s(M, t) &= K s_0 e^{i\omega t} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{ikx \sin \theta} dx \\
 &= K s_0 e^{i\omega t} \frac{1}{i k \sin \theta} [e^{ikx \sin \theta}]_{-b/2}^{+b/2} \\
 &= K s_0 e^{i\omega t} \frac{1}{i k \sin \theta} 2i \sin \left(\frac{kb \sin \theta}{2} \right) \\
 \boxed{s(M, t) = K s_0 e^{i\omega t} b \operatorname{sinc} \left(\frac{kb \sin \theta}{2} \right)}
 \end{aligned}$$

3.a Par définition, l'intensité est proportionnelle au carré du module de l'amplitude complexe. En notant K' la nouvelle constante de proportionnalité,

$$\boxed{I(M, t) = K' s_0^2 b^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{kb \sin \theta}{2} \right)}$$

3.b Le premier minimum d'intensité est obtenu lorsque l'argument du sinus cardinal vaut π , c'est-à-dire

$$\frac{kb \sin \theta_1}{2} = \pi \quad \text{d'où} \quad \boxed{\sin \theta_1 = \lambda/b}$$

Exercice 10 : Visualisation d'un écoulement par strioscopie

Cet exercice propose une première approche au filtrage optique. Pour limiter les calculs, un cas très simple est envisagé, et les transformées de Fourier ne sont jamais explicitement calculées. Par contre, la dernière question demande une bonne compréhension de la physique du phénomène.

1 Cette question fait l'objet de l'exercice 9 : il suffit d'y remplacer θ par α et b par a . Dans l'hypothèse des petits angles,

$$\underline{s}(\alpha, t) = K \underline{s}_0 e^{i\omega t} \int_{-a/2}^{+a/2} e^{2i\pi\alpha x/\lambda} dx \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{s}(\alpha, t) = K \underline{s}_0 a \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda} \right) e^{i\omega t}}$$

2 L'amplitude diffractée par la pupille s'écrit directement

$$\underline{s}(\alpha, t) = K \underline{s}_0 e^{i\omega t} \int_{-a/2}^{+a/2} \underline{t}(x) e^{2i\pi\alpha x/\lambda} dx.$$

À partir de l'expression donnée de $\underline{t}(x)$, le terme de phase constant $e^{-i\delta\phi}$ peut se factoriser. Posons par exemple $\underline{s}'_0 = e^{-i\delta\phi} \underline{s}_0$. Alors,

$$\underline{s}(\alpha, t) = K \underline{s}_0 e^{i\omega t} \left\{ \int_{-a/2}^{+a/2} e^{2i\pi\alpha x/\lambda} dx + [e^{-i\delta\phi} - 1] \int_{-\varepsilon a/2}^{+\varepsilon a/2} e^{2i\pi\alpha x/\lambda} dx \right\}$$

Le terme entre crochets permet de tenir compte de la compression (contribution en $e^{-i\delta\phi}$) et de décompter ce que la première intégrale compte en trop (contribution en -1). Les deux intégrales sont de la forme de celle calculée à la question précédente, d'où

$$\underline{s}(\alpha, t) = K \underline{s}_0 e^{i\omega t} \left\{ a \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda} \right) + [e^{-i\delta\phi} - 1] \varepsilon a \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi \varepsilon a \alpha}{\lambda} \right) \right\}.$$

Comme $\delta\phi \ll 1$, un développement limité est légitime et conduit à

$$\boxed{\underline{s}(\alpha, t) = K \underline{s}_0 e^{i\omega t} a \left\{ \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda} \right) - i \delta\phi \varepsilon \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi \varepsilon a \alpha}{\lambda} \right) \right\}}$$

3 Étant situé dans le plan focal image d'une lentille convergente, la figure observée au point M est celle de Fraunhofer : l'amplitude de l'onde est celle calculée à la question précédente. Dans la limite des petits angles, $\alpha = X/f$. Comme $\mathcal{E}(X) = |\underline{s}(X/f, t)|^2$,

$$\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}_0 \left\{ \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi a X}{\lambda f} \right) + (\delta\phi\varepsilon)^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi \varepsilon a X}{\lambda f} \right) \right\}$$

en introduisant $\mathcal{E}_0 = K^2 a^2 |s_0|^2$.

4 La largeur typique du premier terme entre accolades (associé à la canalisation) est $\lambda f/a$, alors que celle du second (associé à la surpression) est $\lambda f/\varepsilon a$. Le second terme a une amplitude $(\delta\phi\varepsilon)^2$ fois plus faible que le premier. Comme $\varepsilon \ll 1$, **le second terme décrit une figure de diffraction beaucoup plus large que le premier et d'amplitude beaucoup plus faible.**

5 Le rectangle opaque masque l'essentiel de la figure de diffraction due à la canalisation, ou autrement dit des rayons diffractés par la canalisation. Par conséquent, dans le plan conjugué de l'écoulement par (L) l'image de la canalisation n'apparaît plus. En revanche, la plupart des rayons diffractés par la zone de surpression contournent le rectangle opaque. Ce faisant, **seule l'image de la zone de surpression demeure sur l'écran en faisant disparaître le fond lumineux qui la masquait.** Cela rend son observation possible.

En termes d'optique de Fourier, la strioscopie correspond à du filtrage passe-haut : seules les hautes fréquences spatiales (petites échelles, ici εa) demeurent visibles, alors que les basses fréquences spatiales (grandes échelles, ici $a \gg \varepsilon a$) sont occultées.

Il est intéressant de remarquer que le filtrage optique est bien du filtrage au sens le plus strict. En effet, la figure de diffraction de Fraunhofer par une pupille correspond à la transformée de Fourier spatiale de ladite pupille. En plaçant des objets occultants dans le plan de Fourier, on ne fait qu'ôter certaines des fréquences du spectre (spatial) de la pupille, ce qui correspond bien à la définition du filtrage.

Exercice 11 : Spectroscopie à réseau

[agreg interne 2004]

Les relations principales de la spectroscopie à réseaux sont redémontrées dans cet exercice d'annales. Il propose ensuite d'étudier la résolution du réseau, mais dans une limite qui n'est pas la plus pertinente expérimentalement.

1 L'observation se fait (implicitement) à l'infini optique, par exemple dans le plan focal image d'une lentille convergente. Ainsi, les rayons qui interfèrent sont ceux qui ont la même inclinaison θ en sortie de chacun des traits. En vertu du théorème de Malus et du principe de retour inverse, la différence de marche entre les rayons issus de deux traits consécutifs vaut

$$\delta = H'T + TH = -a \sin \theta_i + a \sin \theta'$$

*Le signe devant le terme en $\sin \theta_i$ provient du fait que les angles considérés sont **orientés**, et que sur le schéma $\theta_i < 0$. Le signe peut être vérifié en s'assurant que $H'T > 0$*

La relation des réseaux indique la position des maxima d'intensité, c'est-à-dire les angles de sortie θ' pour lesquels les rayons issus de traits interfèrent deux à deux. Ainsi, au maximum d'intensité d'ordre p , $\theta' \equiv \theta_p$ et

$$a \sin \theta_p - a \sin \theta_i = p\lambda \quad \text{d'où} \quad \boxed{\sin \theta_p - \sin \theta_i = p \frac{\lambda}{a} = p n \lambda}$$

car la densité de traits n et le pas du réseau sont reliés par $n = 1/a$.

2.a Pour qu'un ordre soit complètement visible, il faut que pour toutes les longueurs d'ondes $|\theta_p(\lambda)| \leq \pi/2$. La formule des réseaux indique que plus la longueur d'onde est grande, plus les rayons associés sont déviés : la longueur d'onde limitante est donc $\lambda_{\max} = 819,5 \text{ nm}$. Les ordres complètement visibles en incidence normale ($\theta_i = 0$) sont donc ceux pour lesquels

$$p \frac{\lambda_{\max}}{a} < 1 \quad \text{d'où} \quad p < \frac{a}{\lambda_{\max}} = 2,03.$$

On en déduit que **cinq ordres sont complètement visibles, ceux associés à $-2 \leq p \leq 2$.**

2.b Il y a recouvrement d'ordre lorsque **la longueur d'onde la plus déviée d'un ordre p est davantage déviée que la longueur d'onde la moins déviée d'un ordre p' tel que $|p'| > |p|$.**

Cherchons p et $p' > p > 0$, tels qu'il y ait recouvrement entre ces deux ordres, c'est-à-dire tels que

$$p \frac{\lambda_{\max}}{a} > p' \frac{\lambda_{\min}}{a} \quad \text{soit} \quad \frac{p}{p'} > \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} = 0,548.$$

Par conséquent, **il y a recouvrement entre l'ordre 3 (partiellement visible) et l'ordre 2 (complètement visible)**. En revanche, l'ordre 1 ne donne pas lieu à recouvrement avec un autre ordre. Par symétrie, **il en est de même pour les ordres -2 et -3**.

3.a Différentions la formule des réseaux obtenue à la première question.

$$d(\sin \theta_p - \sin \theta_i) = d \left(p \frac{\lambda}{a} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\cos \theta_p d\theta_p = p \frac{d\lambda}{a}}.$$

3.b La largeur L_p du faisceau est due à la largeur du réseau, ou en d'autres termes au nombre de traits éclairés. Elle vaut

$$\boxed{L_p = N a \cos \theta_p}.$$

La largeur angulaire de la tâche de diffraction associée vaut

$$d\theta = \frac{\lambda}{L_p} \quad \text{soit} \quad \boxed{d\theta = \frac{\lambda}{N a \cos \theta_p}}.$$

3.c Le pouvoir de résolution du réseau s'obtient à la limite $d\theta = d\theta_p$, soit

$$\frac{\lambda}{N a \cos \theta_p} = \frac{p d\lambda}{a \cos \theta_p} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{R} = \frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{p}{N}}.$$

Le pouvoir de résolution d'autant plus grand que plus de traits sont éclairés et que l'ordre est élevé.

3.d En pratique en TP, **la largeur de la fente source contraint davantage le pouvoir de résolution que le nombre de traits éclairés**. Mais ici l'énoncé néglige ce point en supposant la fente source infiniment fine et s'intéresse à la contribution la moins importante ...

4 Les différents ordres de diffraction par le réseau s'inscrivent tous dans la figure de diffraction d'un trait seul, qui gouverne leur luminosité. Pour un réseau le plus simple, cette figure de diffraction est maximale au centre de l'écran, avec des maxima secondaires sur les côtés. Ainsi, le maximum de luminosité est dans l'ordre 0 et les ordres successifs sont de moins en moins lumineux. Par conséquent, plus un ordre est résolu en longueur d'onde, moins il est lumineux.

De façon très générale, l'intensité diffractée par une structure périodique s'écrit comme le produit d'un facteur de forme par un facteur de structure. Le facteur de forme ne dépend que de la forme d'un motif unique indépendamment de leur répartition alors que le facteur de structure ne dépend que de la répartition des motifs indépendamment de leur forme. Dans le cas présent, le facteur de forme correspond à la figure de diffraction par une fente alors que le facteur de structure n'a pas été calculé explicitement, mais conduit à la formule des réseaux. Par conséquent, la figure de diffraction par une structure périodique s'inscrit toujours à l'intérieur de la figure de diffraction par un motif seul.

Pour obtenir un bon pouvoir de résolution et une bonne luminosité, il faut utiliser un **réseau blazé** (appelé réseau échelle en bon français), où les traits ne sont pas de simples fentes mais faits d'un matériau transparent avec un profil en dents de scie permettant de choisir la position du maximum de la figure de diffraction d'un seul trait.

Exercice 12 : Lames à retard

Le fonctionnement des lames à retard $\lambda/2$ et $\lambda/4$ est abordé dans cet exercice. Il permet de faire efficacement le tour des notions utiles sur la polarisation des ondes lumineuses, et ne présente pas plus de difficulté que celles propres au thème qu'il aborde.

Dans tout l'exercice, on considère la lame entre $0 \leq z \leq L$.

1.a Avant la lame, pour $z < 0$, le champ électrique de l'onde considérée s'écrit $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$ avec

$$\begin{cases} E_x(z, t) = E_{0x} \cos[\omega t - k_0 z + \phi_{0x}] = E_{0x} \cos[\omega(t - z/c) + \phi_{0x}] \\ E_y(z, t) = E_{0y} \cos[\omega t - k_0 z + \phi_{0y}] = E_{0y} \cos[\omega(t - z/c) + \phi_{0y}] \end{cases}$$

Comme l'état de polarisation de l'onde incidente n'est pas précisé, attention à ne pas oublier les phases de référence ϕ_{0x} et ϕ_{0y} . En toute généralité, seule l'une des deux peut être prise nulle.

Ainsi, à l'entrée de la lame $z = 0$, le déphasage entre les deux composantes du champ s'écrit

$$\Delta\phi(0) = \phi_x(0) - \phi_y(0) = \omega t + \phi_{0x} - \omega t - \phi_{0y} = \phi_{0x} - \phi_{0y}$$

À l'intérieur de la lame, en $0 \leq z \leq L$, le champ s'écrit en tenant compte des indices optiques différents

$$\begin{cases} E_x(z, t) = E_{0x} \cos[\omega(t - n_o z/c) + \phi_{0x}] \\ E_y(z, t) = E_{0y} \cos[\omega(t - n_e z/c) + \phi_{0y}] \end{cases}$$

Ainsi, en sortie de la lame $z = L$, le déphasage entre les deux composantes du champ s'écrit

$$\Delta\phi(L) = \phi_x(L) - \phi_y(L) = \omega t - n_o L \frac{\omega}{c} + \phi_{0x} - \omega t + n_e L \frac{\omega}{c} - \phi_{0y} = (n_e - n_o) \frac{2\pi}{\lambda_0} L + \phi_{0x} - \phi_{0y}$$

La lame a donc engendré un déphasage supplémentaire $2\pi(n_e - n_o)L/\lambda_0 = 2\pi \Delta n L/\lambda_0$ entre les deux composantes du champ. Ce déphasage vaut $p\pi$, p entier, lorsque

$$\frac{2 \Delta n L}{\lambda_0} = p \quad \text{soit} \quad \boxed{L = p \frac{\lambda_0}{2\Delta n}}$$

La plus petite valeur de L convenable est celle où $p = 1$, ce qui donne pour une onde de longueur d'onde typique 600 nm

$$\boxed{L_{\min} = \frac{\lambda_0}{2\Delta n} = 3 \text{ mm}}$$

1.b La différence de chemin optique associée au déphasage supplémentaire calculé précédemment vaut

$$\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi} [\Delta\phi(L_{\min}) - \Delta\phi(0)] = \Delta n \frac{\lambda_0}{2\Delta n} = \frac{\lambda_0}{2}$$

La lame est qualifiée de demi-onde car elle engendre une différence de chemin optique d'une demi-longueur d'onde entre les deux composantes du champ électrique.

1.c La valeur du déphasage dépend de la longueur d'onde. Par conséquent, le déphasage créé par la même lame d'épaisseur L_{\min} mais pour une longueur d'onde $\lambda'_0 \neq \lambda_0$ ne vaut pas π : **la lame n'est donc pas demi-onde pour λ'_0 .**

2 Le calcul du déphasage a été mené à la question précédente, mais désormais ce dernier doit valoir

$$\frac{2\pi \Delta n L}{\lambda_0} = \frac{\pi}{2} + p\pi, \quad p \text{ entier.}$$

La plus petite valeur L'_{\min} permettant de réaliser une lame quart d'onde vaut

$$\boxed{L'_{\min} = \frac{\lambda_0}{4\Delta n} = 1,5 \text{ mm}}$$

pour les valeurs numériques considérées précédemment. **La lame est qualifiée de quart d'onde car elle engendre une différence de chemin optique d'une demi-longueur d'onde entre les deux composantes du champ électrique.**

3 L'hypothèse de polarisation rectiligne permet de préciser les phases de référence dans l'expression du champ. Toutefois, il est plus intéressant de l'écrire en entrée de la lame sous la forme

$$\vec{E}(0, t) = E_0 [\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y] \cos(\omega t).$$

En sortie de la lame, la composante E_y est retardée de π par rapport à la composante E_x . Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{E}(L, t) &= E_0 [\cos \alpha \cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin \alpha \cos(\omega t - \pi) \vec{e}_y] \\ \vec{E}(L, t) &= E_0 [\cos(-\alpha) \vec{e}_x + \sin(-\alpha) \vec{e}_y] \cos(\omega t) \end{aligned}$$

grâce aux propriétés de parité des fonctions cosinus et sinus. **L'onde en sortie est toujours polarisée rectilignement.** En revanche, l'angle entre la direction de polarisation et l'axe x est devenu $-\alpha$: **la direction de polarisation en sortie est la symétrique de celle en entrée par rapport à l'un des axes de la lame.**

On a ici montré la symétrie par rapport à l'axe ordinaire x , mais un schéma permet de se convaincre qu'il en est de même par rapport à l'axe extraordinaire y .

Si l'onde incidente est polarisée selon x ou y (c'est-à-dire si $\alpha = 0$ ou $\pi/2$), **l'état de polarisation de l'onde est préservé en sortie**, ce qui justifie la dénomination « ligne neutre » donnée à ces directions particulières.

Rappelons que la polarisation n'est définie qu'à π près ... Par conséquent $\alpha = \pi/2$ définit la même polarisation que $\alpha = -\pi/2$.

4 En sortie de la lame, la composante E_y est maintenant retardée de $\pi/2$ par rapport à la composante E_x . Ainsi,

$$\begin{aligned}\vec{E}(L, t) &= E_0 \left[\cos \alpha \cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin \alpha \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y \right] \\ \vec{E}(L, t) &= E_0 \left[\cos \alpha \cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin \alpha \sin(\omega t) \vec{e}_y \right]\end{aligned}$$

Plusieurs cas sont à distinguer :

- ▷ si $\alpha = p\pi/2$, p entier (éventuellement nul), alors $\cos \alpha = 0$ ou $\sin \alpha = 0$, la polarisation incidente était parallèle à l'une des lignes neutres de la lame et elle est préservée en sortie ;
- ▷ si $\alpha = \pi/4 + p\pi/2$, p entier (éventuellement nul), alors $|\cos \alpha| = |\sin \alpha|$ (égal à $1/\sqrt{2}$), la polarisation est circulaire ;
- ▷ dans les autres cas, la polarisation est elliptique.

Pour déterminer si la polarisation est droite ou gauche (ce qui n'a de sens que pour les polarisations circulaires et elliptiques), notons que E_x est extrême en $t = 0$, et plus précisément minimal si $\cos \alpha < 0$ et maximal si $\cos \alpha > 0$. Comme une polarisation n'est définie qu'à π près, on peut se restreindre au cas $\cos \alpha > 0$, soit $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$. Calculons maintenant le sens de variation de E_y ,

$$\frac{dE_y}{dt}(t = 0) = \omega E_0 \sin \alpha$$

Ainsi, en prenant en compte le fait que l'onde se propage dans le sens des z croissants,

- ▷ si $-\pi/2 \leq \alpha \leq 0$, E_x et E_y diminuent simultanément, **l'onde est donc elliptique droite** ;
- ▷ si $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, E_x diminue alors que E_y augmente, **l'onde est donc elliptique gauche**.

Pour aboutir à ces résultats, il est essentiel de bien se représenter le vecteur \vec{E} vu dans le plan xOy , et se souvenir qu'à l'instant $t = 0$ E_x est maximal et $E_y = 0$. Ce faisant, on peut le faire tourner et en déduire le sens de parcours de l'ellipse. Rappelons que le qualificatif droite ou gauche est donné pour un observateur qui voit l'onde venir vers lui.

Exercice 13 : Couleur observée en sortie d'une lame biréfringente

Cet exercice aborde la thématique des interférences en lumière polarisée par biréfringence, dans des cas que vous pouvez réaliser en TP. Il exige une bonne compréhension du comportement des milieux biréfringents, mais n'utilise que des outils techniques assez simples.

1 L'indice de réfraction est lié à la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu, $v = c/n$. Plus l'indice est grand, plus la vitesse est faible. Ici, l'indice ordinaire associé à l'axe x est plus faible que celui associé à l'axe y : **l'axe x est l'axe rapide alors que l'axe y est l'axe lent**.

Attention à ne pas se méprendre : x et y désignent ici des directions de polarisation, et non pas des directions de propagation, qui est dans tous les cas z . Ce qu'il faut comprendre est qu'une onde polarisée selon x se propage plus vite qu'une onde polarisée selon y .

2 Lorsque le polariseur (P) et l'analyseur (A) sont tous deux orientés selon l'axe x , l'onde est polarisée rectilignement selon une ligne neutre de la lame. En négligeant la faible absorption par la lame, l'onde en sortie de la lame est identique à l'onde en entrée. L'analyseur est donc passant pour cette onde. Par conséquent, **la lumière visible sur l'écran est blanche**. Il en est de même si (P) et (A) sont tous les deux orientés selon l'axe y .

En revanche, si (P) est orienté selon x et (A) selon y , l'onde sortant de la lame n'est pas transmise par l'analyseur. **L'écran est donc noir**. Il en est de même si (P) est orienté selon y et (A) selon x .

3 Considérons une composante de la lumière blanche incidente de longueur d'onde dans le vide λ_0 . Décomposons le champ électrique de cette composante sur les lignes neutres de la lame.

Pour simplifier l'écriture, on suppose que le polariseur, la lame et l'analyseur sont parfaitement accolés. Cette hypothèse n'a pas de réalité physique, cependant la propagation dans l'air se décrit par un déphasage identique des composantes x et y qui peut être absorbé par une rédefinition adéquate de l'origine des temps.

Compte tenu de l'orientation de (P) à 45° des lignes neutres, en sortie du polariseur et donc à l'entrée de la lame,

$$\vec{E}_{(P)} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t) (\vec{e}_x + \vec{e}_y).$$

En sortie de la lame et en entrée de l'analyseur,

$$\vec{E}_{\text{lame}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n_o e - \omega t\right) \vec{e}_x + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n_e e - \omega t\right) \vec{e}_y \right]$$

Enfin, l'analyseur projette sur son axe passant \vec{u} les deux composantes du champ électrique. Supposons pour commencer que l'analyseur est croisé avec le polariseur, c'est-à-dire $\vec{u} \cdot \vec{e}_x = 1/\sqrt{2}$ mais $\vec{u} \cdot \vec{e}_y = -1/\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \vec{E}_{(A)} &= (\vec{E}_{\text{lame}} \cdot \vec{u}) \vec{u} \\ &= \frac{E_0}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n_o e - \omega t\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n_e e - \omega t\right) \right] \vec{u} \\ \vec{E}_{(A)} &= -E_0 \sin\left(\frac{\pi}{\lambda_0} \Delta n e\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{n_o + n_e}{2} e - \omega t\right) \vec{u} \end{aligned}$$

Ainsi, l'onde est plus ou moins transmise en fonction de sa longueur d'onde. Le calcul de l'éclairement observé sur l'écran en sortie de l'analyseur donne

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda_0} \Delta n e\right)$$

L'expérience décrite ici consiste à faire des interférences en lumière polarisée : une première onde est séparée en deux ondes cohérentes distinguées par leur polarisation, ces deux ondes parcourent un chemin optique différent dans la lame, et elles sont superposées en sortie de la lame par l'analyseur.

Les longueurs d'onde parfaitement éteintes sont celles pour lesquelles

$$\frac{\pi}{\lambda_0} \Delta n e = p\pi, p \text{ entier} \quad \text{d'où} \quad \lambda_0 = \frac{\Delta n e}{p}$$

Numériquement, $\Delta n e = 360 \text{ nm}$: seul $p = 1$ donne une longueur d'onde presque dans le visible, correspondant à du bleu. Au contraire, les longueurs d'onde parfaitement transmises sont celles pour lesquelles

$$\frac{\pi}{\lambda_0} \Delta n e = \frac{\pi}{2} + p\pi, p \text{ entier} \quad \text{d'où} \quad \lambda_0 = \frac{\Delta n e}{p + 1/2}$$

Numériquement, seul $p = 0$ donne une longueur d'onde de 720 nm dans le visible. On en déduit qu'en sortie de l'analyseur **la lumière sur l'écran est jaune-orangée**.

Il faut avoir une idée raisonnable de la couleur à partir des longueurs d'onde transmises ou éteintes. Cependant, prédire la couleur n'est pas chose facile car la réponse spectrale de l'œil dépend beaucoup de la longueur d'onde : ici le rouge est plus transmis, mais comme l'œil y est moins sensible que le jaune, la couleur résultante perçue est plutôt orange. Les couleurs perçues en fonction de l'épaisseur optique $\delta = \Delta n e$ sont tabulées dans l'échelle des teintes de Newton, que vous trouvez par exemple dans le livre « Expériences d'optique à l'agrégation », R. Duffait, p. 148.

Si désormais (P) et (A) sont parallèles, le calcul est modifié en

$$\vec{E}_{(A)} = \frac{E_0}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n_o e - \omega t\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n_e e - \omega t\right) \right] \vec{u}$$

ce qui conduit à l'éclairement

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda_0} \Delta n e\right).$$

Les couleurs qui étaient précédemment éteintes sont donc désormais les couleurs transmises, et **la lumière sur l'écran est bleue-grise**. Les deux couleurs pour (P) et (A) croisés ou parallèles sont **complémentaires l'une de l'autre**.

4 La lame étant dix fois plus épaisse, son épaisseur optique $\Delta n e$ est dix fois grande, et dans les calculs de la question précédente une dizaine valeurs de p donnent lieu à une onde visible parfaitement transmise ou éteinte. Comme la

perception des couleurs par l'œil ne se fait que par trois types de capteurs, il n'est pas capable d'analyser un spectre aussi finement : il se produit donc un effet de moyennage, et la lumière apparaît blanche. Toutefois, il ne s'agit pas d'un « vrai » blanc mais d'un **blanc d'ordre supérieur**. Un spectromètre placé derrière l'analyseur révélerait un spectre canelé.