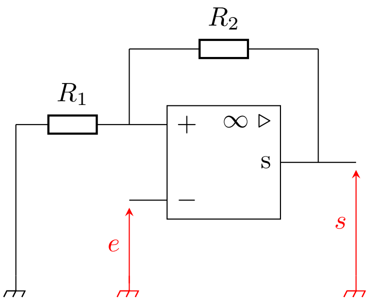
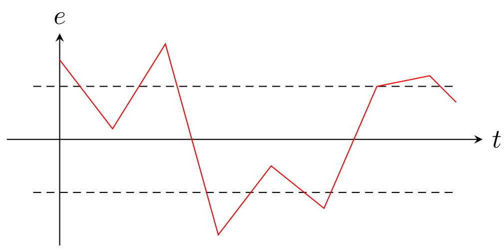
Électronique et révisions de mécanique

Question de cours

Établir le cycle du comparateur à hystérésis inverseur représenté et le tracer dans un diagramme $s-e$. Représenter le chronogramme $s(t)$ de la tension de sortie pour la tension d'entrée $e(t)$ représentée ci-dessous. Les pointillés indiquent les tensions de basculement.

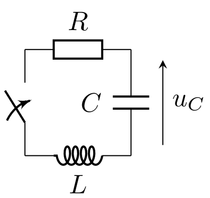




Éléments de correction de l'exercice 0 :

- ▷ Calcul de ε :
  - → Diviseur de tension : $\dfrac{v_+}{s} = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}$;
  - → $\varepsilon = \dfrac{R_1}{R_1+R_2} s - e$.
- ▷ Conditions de saturation :
  - → Pour avoir $s = +V_{\text{sat}}$ il faut $\varepsilon > 0$ soit $e < \dfrac{R_1}{R_1+R_2} V_{\text{sat}}$.
  - → Pour avoir $s = -V_{\text{sat}}$ il faut $\varepsilon < 0$ soit $e > -\dfrac{R_1}{R_1+R_2} V_{\text{sat}}$.
- ▷ On peut alors tracer les branches du cycle.
- ▷ Sens de parcours : on part de $s = +V_{\text{sat}}$, on voit jusqu'à quelle valeur de e cela est possible
  → parcours en sens horaire.

Exercice : RLC série en régime libre [oral CCP]

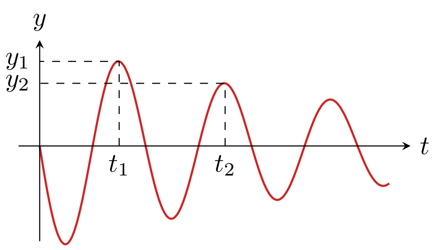


On étudie le circuit ci-contre où le condensateur est initialement chargé : $u_C(t=0^-) = U_0$.

1 - Déterminer les valeurs de i, de u_C et de u_L à la fermeture du circuit en $t = 0^+$, puis en régime permanent pour $t \to \infty$.

2 - Parmi ces grandeurs, laquelle correspond à y représentée ci-contre ? Comment doit-on procéder pour la mesurer ? Indiquer sur le schéma les branchements de l'oscilloscope.

3 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant i en fonction de $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $m = R/2L\omega_0$.



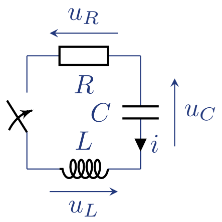
4 - On suppose $m < 1$. Déterminer la solution en fonction de $\Omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$. Que représente Ω ? Comment peut-on l'évaluer à partir de la courbe ?

5 - En utilisant des approximations adéquates, trouver une relation simple entre le rapport y_1/y_2 et m.

6 - Proposer un montage pour compenser l'amortissement.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Étienne Thibierge, 27 septembre 2017, www.etienne-thibierge.fr



Les notations des courants et tensions ne sont pas explicitées sur le schéma par l'énoncé, auquel cas il est sous-entendu que toutes les tensions sont orientées de façon cohérente avec u_C et que les dipôles sont orientés en convention récepteur.

1 L'intensité i est continue car elle traverse une bobine. Ainsi,

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$$

car le circuit est ouvert à $t < 0$. De même, la tension u_C est nécessairement continue car aux bornes du condensateur donc

$$\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0}$$

Enfin, la tension aux bornes de la bobine se déduit de la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ et de la loi d'Ohm,

$$u_R(0^+) + u_C(0^+) + u_L(0^+) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_L(0^+) = -u_C(0^+) = -U_0\,.}$$

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc

$$\boxed{i_\infty = 0\,.}$$

La bobine est équivalente à un fil, si bien que

$$\boxed{u_{L,\infty} = 0}$$

et d'après la loi des mailles on en déduit

$$u_{R,\infty} + u_{C,\infty} + u_{L,\infty} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_{C,\infty} = 0\,.}$$

2 D'après le comportement à $t = 0$, on en déduit que **la grandeur y correspond à l'intensité i**. Un oscilloscope ne peut pas mesurer directement une intensité, il faut donc mesurer une tension qui lui est proportionnelle, c'est-à-dire la tension aux bornes de la résistance. Obtenir la courbe représentant y en fonction de t demande donc **de brancher l'oscilloscope en parallèle de la résistance**.

> *Ici, il n'y a aucun appareil branché sur le secteur type GBF, donc pas de conflit de masse à craindre.*

3 D'après la loi des mailles,

$$u_R + u_C + u_L = 0 \qquad \text{soit} \qquad Ri + u_C + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

en utilisant les lois de comportement. Pour pouvoir relier u_C à i, il est nécessaire dériver,

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i + L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} = 0\,.$$

Écrivons maintenant cette équation sous forme canonique pour faire apparaître les paramètres cherchés,

$$\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0\,.$$

On identifie alors $1/LC = {\omega_0}^2$ et $R/L = 2m\omega_0$ d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = 0\,.}$$

4 **Forme générale des solutions :** L'équation différentielle est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière à déterminer (une autre formulation possible est de dire qu'elle est nulle). Pour déterminer la forme générale de la solution homogène, trouvons les racines du polynôme caractéristique,

$$r^2 + 2m\omega_0\, r + {\omega_0}^2 = 0\,.$$

Son discriminant vaut

$$4m^2{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 = 4{\omega_0}^2(m^2-1) < 0$$

car $m < 1$. Ainsi, les racines sont complexes conjuguées et valent

$$r_\pm = -\frac{2m\omega_0}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{4{\omega_0}^2(1-m^2)}}{2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-m^2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\Omega\,.$$

Comme le discriminant de l'équation caractéristique est négatif alors le régime est pseudo-périodique et les solutions s'écrivent toutes sous la forme

$$i(t) = [A\cos\Omega t + B\sin\Omega t]\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

Conditions initiales : Déterminons maintenant les conditions initiales nécessaires pour trouver les constantes A et B. D'après la question 1,

$$i(0^+) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{1}{L}u_L(0^+) = -\frac{U_0}{L}\,.$$

Constantes d'intégration : Ainsi, la condition initiale sur i donne

$$i(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A \underbrace{=}_{\text{CI}} 0\,.$$

En considérant directement $A = 0$ pour calculer la dérivée,

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = B\Omega\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t} - m\omega_0 B\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} B\Omega \underbrace{=}_{\text{CI}} -\frac{U_0}{L} \qquad \text{d'où} \qquad B = -\frac{U_0}{L\Omega}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{i(t) = -\frac{U_0}{L\Omega}\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}\,.}$$

L'intensité est pseudo-périodique, et **Ω est sa pseudo-période.** On peut l'évaluer à partir de la pseudo-période T' lisible sur la courbe. Par exemple, $T' = t_2 - t_1$ d'où

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}\,.}$$

$\boxed{5}$ Trouver la position des maxima n'est pas simple du tout à cause de l'amortissement exponentiel, qui complique beaucoup la recherche des zéros de la dérivée. Cependant, compte tenu de la courbe donnée, on peut faire l'approximation que la position des maxima est directement donnée par ceux du sinus car l'amortissement est faible. Ainsi, le k-ième maximum est atteint lorsque

$$\Omega t_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{soit} \qquad t = \frac{3}{4}T' + (k-1)T'$$

avec k un entier. y_1 et y_2 correspondent aux deux premiers maxima, aux instants $t_1 = 3T'/4$ et $t_2 = 7T'/4$. Ainsi,

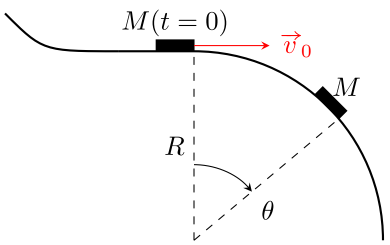
$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\mathrm{e}^{-7m\omega_0 T'/4}}{\mathrm{e}^{-3m\omega_0 T'/4}} = \mathrm{e}^{-m\omega_0 T'}$$

Pour aboutir à une relation encore plus simple (je ne sais pas ce qu'attendait l'examinateur, qui l'aurait précisé au candidat au cour de l'oral) , on peut supposer $m \ll 1$, auquel cas $\Omega \sim \omega_0$ et donc $T' \simeq 2\pi/\omega_0$. Dans ce cas,

$$\boxed{\frac{y_2}{y_1} \simeq \mathrm{e}^{-2\pi m}\,.}$$

$\boxed{6}$ Montage ALI à résistance négative ... que vous verrez l'année prochaine !

Exercice : Une luge sur une bosse



Une luge, modélisée par un point matériel M de masse m, arrive sur une bosse à profil circulaire avec une vitesse horizontale $\vec{v}_0$. Tant que la luge suit ce profil, sa trajectoire est circulaire de rayon R et sa position est repérée par l'angle θ. On néglige tout frottement.

1 - Déterminer la norme de la force de réaction $\vec{N}$ exercée par la piste sur la luge en fonction de sa position θ et de sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

2 - En déduire l'expression de N en fonction de θ et de la vitesse initiale v_0.

3 - Montrer que la luge quitte la piste même si v_0 est faible. Exprimer l'angle de décollage θ_d.

4 - À quelle condition cet angle existe-t-il ? Identifier une vitesse limite v_lim. Que se passe-t-il si $v > v_\mathrm{lim}$?

Éléments de correction de l'exercice 2 :

$\boxed{1}$ Appliquons la loi de la quantité de mouvement à la luge, en mouvement par rapport au référentiel terrestre que l'on considère galiléen. On se place dans le repère polaire de centre O défini figure 1. La luge est soumise son poids,

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\cos\theta\,\vec{e}_r + mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta\,,$$

et à la force de réaction de la piste,

$$\vec{N} = N\,\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad N > 0\,.$$

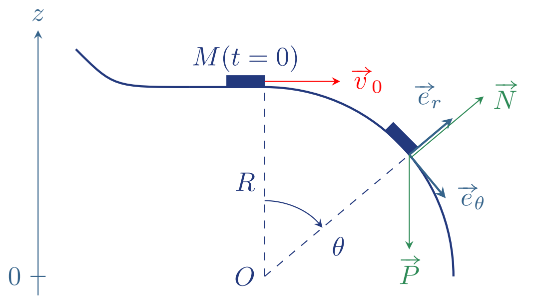


Figure 1 – Schéma des notations.

Ainsi, par application de la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre,

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{N}$$

ce qui donne en projetant sur $\vec{e}_r$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{N = -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta\,.}$$

$\boxed{2}$ Pour faire apparaître la vitesse initiale au lieu de $\dot{\theta}$, utilisons la conservation de l'énergie mécanique. En effet, la luge n'est soumise qu'à une force conservative (son poids) et à une force qui ne travaille pas (la réaction de la piste). Exprimons l'énergie potentielle de pesanteur de la luge. Comme l'axe z est ascendant et en prenant l'origine des énergies potentielles en $z = 0$, alors

$$E_\mathrm{pp} = mgz = mgR\cos\theta\,.$$

De plus, la vitesse de la luge a pour norme $v = R\dot{\theta}$, donc son énergie cinétique vaut

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\,.$$

Finalement, son énergie mécanique vaut

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta\,.$$

Cette quantité est constante, égale à sa valeur initiale,

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgR$$

Par identification, on en déduit

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgR = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 + mgR\cos\theta$$

ce qui permet d'isoler le terme à remplacer dans l'expression de N,

$$\frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgR(1-\cos\theta)$$
$$-mR\dot\theta^2 = -\frac{m{v_0}^2}{R} + 2mg(\cos\theta - 1)\,.$$

On en déduit finalement

$$\boxed{N = -\frac{m{v_0}^2}{R} + mg\left(3\cos\theta - 2\right)\,.}$$

3 La luge quitte la piste si la force de réaction s'annule, c'est-à-dire pour un angle θ_d tel que $N(\theta_\mathrm{d}) = 0$, soit

$$0 = -\frac{m{v_0}^2}{R} + mg\left(3\cos\theta_\mathrm{d} - 2\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\theta_\mathrm{d} = \arccos\left(\frac{{v_0}^2}{3gR} + \frac{2}{3}\right)\,.}$$

Si la vitesse de la luge est faible, à la limite $v_0 \simeq 0$, cet angle est bien défini et vaut $\arccos 2/3$. Ainsi, **la luge quitte la piste quelle que soit sa vitesse initiale.**

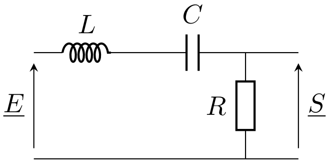
4 Pour que l'arccosinus soit défini, il faut que son argument soit inférieur à 1, c'est-à-dire

$$\frac{{v_0}^2}{3gR} + \frac{2}{3} \leq 1 \qquad \text{soit} \qquad {v_0}^2 \leq 3gR \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{v_0 < \sqrt{gR} = v_\mathrm{lim}\,.}$$

Si $v_0 > v_\mathrm{lim}$, les équations établies dans les questions précédentes indiquent que la norme de la force de réaction $\overrightarrow{N}$ serait toujours négative, quelle que soit la valeur de θ. Cela n'a pas de sens, et signifie que l'hypothèse utilisée pour les établir (contact entre la luge et la piste) est fausse. Par conséquent, on en déduit qu'il n'y a jamais de contact : **la luge quitte la piste dès $\boldsymbol{\theta = 0}$**, et elle suit une trajectoire parabolique (chute libre).

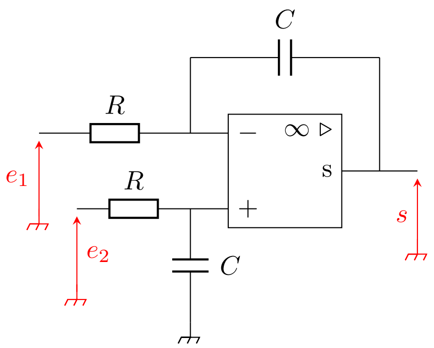
Électronique et révisions de mécanique

Question de cours



Identifier sans calcul la nature du filtre ci-contre. Établir sa fonction de transfert et l'écrire sous forme canonique.

Exercice : Montage à ALI



1 - En régime harmonique, exprimer la tension de sortie $\underline{S}$ en fonction de $\underline{E_1}$ et $\underline{E_2}$.

2 - Retranscrire cette relation dans le domaine temporel.

3 - À quoi ce montage sert-il ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 Pont diviseur dans la branche du haut : (R et C parcourus par le même courant car ALI idéal donc $i_- = 0$)

$$\frac{\underline{V_-} - \underline{E_1}}{\underline{S} - \underline{E_1}} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega}$$

Idem dans la branche du bas :

$$\frac{\underline{V_+}}{\underline{E_2}} = \frac{1/\mathrm{j}RC\omega}{R+1/\mathrm{j}C\omega} = \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}$$

Linéarité : $\underline{V_+} = \underline{V_-}$ d'où

$$\underline{V_-} - \underline{E_1} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega}\left(\underline{S} - \underline{E_1}\right)$$

$$\frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}\underline{E_2} - \underline{E_1} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega}\left(\underline{S} - \underline{E_1}\right)$$

$$\underline{S} = \underline{E_1} + \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}\underline{E_2} - \frac{1+\mathrm{j}RC\omega}{\mathrm{j}RC\omega}\underline{E_1}$$

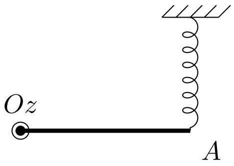
$$\boxed{\underline{S} = \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}\left(\underline{E_2} - \underline{E_1}\right)}$$

2

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{RC}\int (e_2 - e_1)\mathrm{d}t}$$

3 Intégrateur différentiel.

Exercice : Barre fixée à ses extrémités [oral CCP]



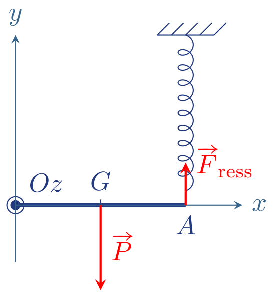
Considérons le système mécanique représenté ci-contre, constitué d'une barre de masse m, de longueur $OA = 2a$, libre de tourner sans frottement autour de l'axe Oz. Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $I_z = \frac{4}{3}ma^2$. Elle est attachée en A à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixe.

1 - Dans la position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical. Donner la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de k et de ℓ_0.

2 - La barre est légèrement écartée de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale. Déterminer la période des petites oscillations. Comme les angles sont très petits, on peut considérer que le point A se déplace verticalement.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

Attention ! Sur tous les dessins, la base doit absolument être dessinée **directe** pour que les produits vectoriels s'expriment correctement.



$\boxed{1}$ On étudie la barre, en mouvement par rapport au référentiel terrestre, considéré galiléen. Par hypothèse, dans la position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical, ce qui permet d'orienter les forces. Comme les forces sont perpendiculaires à la barre, utiliser le bras de levier donne immédiatement les résultats. Elle est soumise à son poids, exercé en G au centre de la barre, de moment

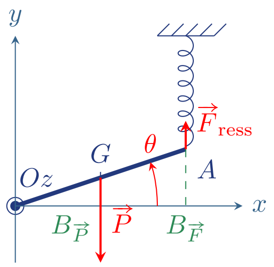
$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) = -mg \times a$$

et à la force de rappel exercée par le ressort, exercée en A, de moment

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) \times 2a\,.$$

Dans la position d'équilibre, on a alors

$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) + \mathcal{M}_z(\text{ressort}) = 0 \qquad \text{soit} \qquad -mga + 2ak(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}\,.}$$



$\boxed{2}$ On suppose maintenant la barre inclinée d'un angle θ.

Attention ! L'angle doit absolument être dessiné positif pour que les signes soient corrects.

Méthode 1 : conservation de l'énergie mécanique. L'énergie cinétique de la barre vaut

$$E_{\text{c}} = \frac{1}{2}I_z\dot\theta^2 = \frac{2}{3}ma^2\dot\theta^2\,.$$

Son énergie potentielle compte deux contributions, celle de pesanteur et celle élastique.

$$E_{\text{pp}} = mgy_G = mga\sin\theta \simeq mga\theta$$
$$E_{\text{pe}} = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(\ell_{\text{éq}} - 2a\sin\theta - \ell_0\right)^2 \simeq \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{2k} - 2a\theta\right)^2$$

en remplaçant $\ell_{\text{éq}}$ par son expression. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{m}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E_{\text{c}} + E_{\text{pp}} + E_{\text{pe}}\right) = 0$$

soit

$$\frac{2}{3}ma^2 \times 2\dot\theta\ddot\theta + mga\dot\theta + \frac{1}{2}k \times 2\left(2a\theta - \frac{mg}{2k}\right)2a\dot\theta = 0$$

ce qui conduit en simplifiant par $\dot\theta$ à

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot\theta + 4ka^2\theta = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot\theta + \frac{3k}{m}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{3k/m}$, d'où on déduit la période propre

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}\,.}$$

Méthode 2 : théorème du moment cinétique. Utilisons toujours le bras de levier pour déterminer les moments. Le moment du poids vaut

$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) = -mg \times OB_{\vec{P}} = -mga\cos\theta \simeq -mga$$

car $\theta \ll 1$. Le moment de la force exercée par le ressort vaut

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +k(\ell - \ell_0) \times OB_{\vec{F}} = +k(\ell_{\text{éq}} - 2a\sin\theta - \ell_0) \times 2a\cos\theta \simeq +2ka(\ell_{\text{éq}} - 2a\theta - \ell_0)$$

En remplaçant $\ell_{\text{éq}}$ par son expression,

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +2ka\left(\ell_0 + \frac{mg}{2k} - 2a\theta - \ell_0\right) = mga - 4ka^2\theta$$

Ainsi, d'après la loi du moment cinétique,

$$I_z\ddot{\theta} = -mga + mga - 4ka^2\theta \qquad \text{donc} \qquad \ddot{\theta} + \frac{4ka^2}{I_z}\theta = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{\theta} + \frac{3k}{m}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{3k/m}$, d'où on déduit la période propre

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}\,.}$$

Électronique et révisions de mécanique

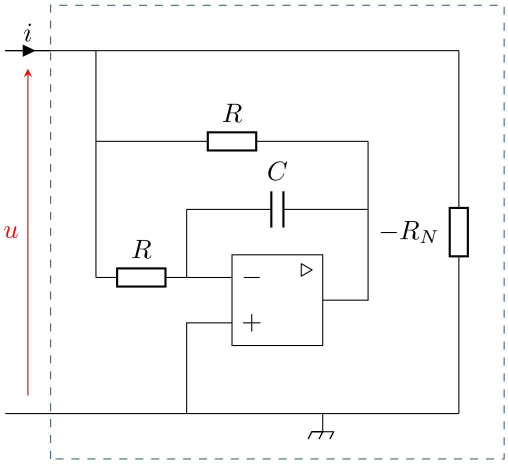
Question de cours

Rappeler la constitution du montage amplificateur non-inverseur à ALI et établir sa relation entrée-sortie.

Éléments de correction de l'exercice 0 :

R_1 entre masse et $\ominus$, R_2 entre $\ominus$ et la sortie, e à $\oplus$. $\dfrac{s}{e} = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}$

Exercice : Simulateur d'inductance



Les bobines sont des composants très utilisés en électronique de puissance, mais leur grande taille les rend peu pratiques à insérer dans des circuits intégrés. Ce n'est cependant pas un souci puisqu'elles peuvent être remplacées par des montages à ALI comme celui représenté ci-contre, beaucoup plus compact.

L'ALI est supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire : on peut donc supposer le régime sinusoïdal forcé sans perte de généralité. Le dipôle « $-R_N$ » désigne l'impédance d'entrée d'un autre montage à ALI, dit à résistance négative, qui a exactement le même comportement qu'une résistance $-R_N < 0$.

Déterminer l'impédance d'entrée $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$ du montage. En déduire la valeur à donner à R_N pour obtenir une inductance pure.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Loi des nœuds :

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3}$$

Lois de comportement :

$$\underline{I_3} = -\frac{\underline{U}}{R_N} \qquad \text{et} \qquad \underline{I_2} = \frac{\underline{U}}{R}$$

car $\underline{V_+} = \underline{V_-} = 0$. Calculer $\underline{I_1}$ demande une loi des mailles en plus,

$$\underline{I_1} = \frac{\underline{U} - \underline{V_S}}{R} \qquad \text{avec} \qquad \underline{V_S} = -\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\underline{I_2}$$

la tension de sortie de l'ALI.

> *Au lieu d'introduire $\underline{V_S}$, on peut aussi passer par une loi des mailles dans les branches RC et R :*
>
> $$R\underline{I_2} + \frac{1}{jC\omega}\underline{I_2} = R\underline{I_1}$$
>
> *C'est même sans doute le plus malin car ça évite de faire intervenir une nouvelle inconnue.*

Ainsi,

$$\underline{I} = \frac{2\underline{U}}{R} - \frac{\underline{S}}{R} - \frac{\underline{U}}{R_N} = \frac{2\underline{U}}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}\underline{I_2} - \frac{\underline{U}}{R_N}$$

et donc

$$\underline{I} = \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}R^2C\omega} - \frac{1}{R_N}\right)\underline{U}$$

Pour une bobine idéale, on doit avoir

$$\underline{I} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}\underline{U}\,.$$

On a donc équivalence si $R_N = R/2$, sinon le montage est équivalent à une bobine idéale montée en parallèle d'une résistance telle que $1/r = 2/R - 1/R_N$.

Exercice : Gravity [oral CCP]

Dans le film Gravity, des astronautes effectuent une mission de maintenance sur le télescope spatial Hubble lorsque leur navette est détruite. Leur seul espoir semble être de rejoindre la Station spatiale internationale, l'ISS. Le but de cet exercice est de définir dans quelles conditions ce voyage spatial est possible.

On suppose que le télescope Hubble et l'ISS sont en orbite circulaire basse autour de la terre, respectivement à 600 km et 400 km au-dessus de la Terre, dans le même plan. Le rayon de la terre est $R_\mathrm{T} = 6400\,\mathrm{km}$; $\mathcal{G}$ est la constante universelle de gravitation.

1 - Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre, de masse M_0, sur l'astronaute et son équipement, de masse m. Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.

2 - En exprimant le principe fondamental de la dynamique pour un système en rotation uniforme, établir la troisième loi de Kepler. Exprimer l'énergie de l'astronaute sur son orbite, en fonction de $\mathcal{G}$, m, M_0 et r, rayon de l'orbite.

3 - Déterminer numériquement la période T_S de l'ISS, sachant que la période du télescope vaut $T_\mathrm{H} = 97\,\mathrm{min}$. En déduire numériquement la vitesse du télescope v_H, puis celle de la station spatiale v_S sur leur orbite respective.

Pour rejoindre la station spatiale, l'astronaute envisage une orbite de transfert elliptique, dont l'apogée de distance r_H par rapport au centre de la Terre est sur l'orbite du télescope, et le périgée de distance r_S par rapport au centre de la terre est sur l'orbite de l'ISS.

4 - Représenter la trajectoire suivie par l'astronaute.

5 - Exprimer l'énergie de l'astronaute sur cette trajectoire en fonction de $\mathcal{G}$, M_0, m, r_H et r_S.

6 - Exprimer la vitesse de l'astronaute à l'apogée, en fonction de r_H, T_H et r_S. Par analogie, en déduire l'expression de la vitesse au périgée en fonction de r_S, T_S et r_H. Calculer les valeurs numériques. Techniquement comment l'astronaute peut-il gérer sa vitesse ?

7 - Quelle est la durée de ce voyage ?

Éléments de correction de l'exercice 2 :

$\boxed{1}$ Dans un repère polaire de centre O le centre de la Terre,

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r^2}\vec{e}_r \qquad \text{et} \qquad E_\mathrm{p} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r}\,.}$$

$\boxed{2}$ Pour un système en rotation uniforme, $r = \text{cte}$ donc $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$ et $v = r\dot{\theta} = 0$ donc $\ddot{\theta} = 0$. Le PFD dans la base polaire s'écrit donc

$$-m\frac{v^2}{r}\vec{e}_r = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r^2}\vec{e}_r \qquad \text{soit} \qquad v^2 = \frac{\mathcal{G}M_0}{r}\,.$$

Or le mouvement est par hypothèse circulaire de rayon r et uniforme de période T, donc $v = 2\pi r/T$ et

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M_0}{r}$$

ce qui conduit à la troisième loi de Kepler pour l'orbite circulaire,

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{M_0\mathcal{G}}}$$

L'énergie mécanique de l'astronaute vaut alors

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{r} = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{G}M_0}{r} - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{r} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2r}\,.}$$

$\boxed{3}$ D'après la troisième loi de Kepler,

$$\frac{{T_\mathrm{S}}^2}{{r_\mathrm{S}}^3} = \frac{{T_\mathrm{H}}^2}{{r_\mathrm{H}}^3} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{T_\mathrm{S} = T_\mathrm{H}\left(\frac{r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{H}}\right)^{3/2} = 93\,\mathrm{min}.}$$

Étienne Thibierge, 27 septembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

On a par ailleurs

$$\boxed{v_\mathrm{H} = \frac{2\pi r_\mathrm{H}}{T_\mathrm{H}} = 7{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad v_\mathrm{S} = \frac{2\pi r_\mathrm{S}}{T_\mathrm{S}} = 7{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

(la différence n'apparaît que sur le troisième chiffre significatif ... mais l'énoncé n'en donne que deux pour T_H).

4 Voir figure 1. Le centre de la Terre est forcément l'un des foyers de l'ellipse, d'après la première loi de Kepler.

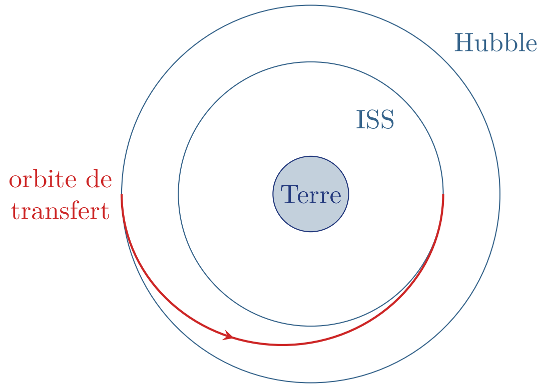


Figure 1 – Orbite de transfert. Les deux orbites de Hubble et de l'ISS sont représentées en bleu, l'orbite de transfert en rouge. Évidemment, la figure n'est pas à l'échelle ... Version couleur sur le site de la classe.

5 L'énergie mécanique en orbite elliptique prend la même forme qu'en orbite circulaire en remplaçant le rayon par le demi-grand axe a (résultat admis dans le cours). Ici, $2a = r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}$, d'où on déduit

$$\boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{\mathcal{G} M_0 m}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}}$$

6 À l'apogée, l'astronaute est à distance r_H du centre de la Terre, donc

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{apo}^2 - \frac{\mathcal{G} M_0 m}{r_\mathrm{H}} = -\frac{\mathcal{G} M_0 m}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}$$

ce qui donne

$$v_\mathrm{apo}^2 = \frac{2\mathcal{G} M_0 r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{H}(r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H})}$$

et en utilisant la troisième loi de Kepler pour faire apparaître la période à la place de $M_0\mathcal{G}$

$$v_\mathrm{apo}^2 = \frac{2 r_\mathrm{S} \times 4\pi^2 r_\mathrm{H}^3}{r_\mathrm{H}(r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}) \times T_\mathrm{H}^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_\mathrm{apo} = \frac{2\pi r_\mathrm{H}}{T_\mathrm{H}} \sqrt{\frac{2 r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}} = 7{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

Par analogie (et en vérifiant que le raisonnement se transpose sans problème !),

$$\boxed{v_\mathrm{pér} = \frac{2\pi r_\mathrm{S}}{T_\mathrm{S}} \sqrt{\frac{2 r_\mathrm{H}}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}} = 7{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

Pour le contrôle de la vitesse, je ne sais pas trop comment l'astronaute peut faire. Les satellites utilisent des moteurs, mais je ne suis pas sûr que l'astronaute en ait !

7 Même sur l'orbite de transfert, l'astronaute n'est soumis qu'à la force exercée par la Terre, et son mouvement vérifie la troisième loi de Kepler. Ainsi, la période T_transf à laquelle il parcourt l'orbite de transfert est reliée au demi-grand axe $a = r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}$ par

$$\frac{T_\mathrm{transf}^2}{\left(\dfrac{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}{2}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{M_0\mathcal{G}} = \frac{T_\mathrm{H}^2}{r_\mathrm{H}^3}\,.$$

Par ailleurs l'astronaute ne parcourt que la moitié de l'orbite : le voyage prend une durée $\Delta t = T_\mathrm{transf}/2$, d'où

$$\frac{8 \times 4\,\Delta t^2}{(r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H})^3} = \frac{T_\mathrm{H}^2}{r_\mathrm{H}^3} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta t = \frac{T_\mathrm{H}}{\sqrt{32}} \left(1 + \frac{r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{H}}\right)^{3/2} = 47\,\mathrm{min}\,.}$$

Notez que cette durée est celle pour passer de l'orbite de Hubble à celle de l'ISS ... mais pas pour atteindre l'ISS. Sauf coup de chance, l'opération est d'ailleurs mal engagée pour les astronautes : comme la vitesse ne dépend pas de la masse mais que de la distance au centre de la Terre, tous les corps sur la même orbite vont à la même vitesse. À moins d'arriver sur l'orbite juste au bon moment (et c'est comme par hasard ce qui arrive dans le film), les astronautes n'ont aucune chance de rattraper ou d'être rattrapés par l'ISS.