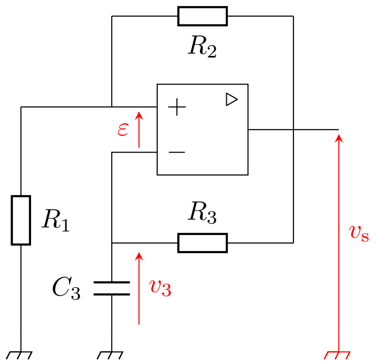
# ALI et oscillateurs

## Question de cours

Un signal modulé $s(t) = A\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_p t)$ ($f_p \gg f_0$) est récupéré par une antenne. Expliquer comment récupérer le signal informatif de fréquence $f_0$ par détection synchrone.

## Exercice : Oscillateur à ALI




Dans le montage ci-contre, l'ALI idéal fonctionne en régime saturé. On note $\varepsilon = v_+ - v_-$ la tension différentielle à l'entrée de l'ALI. On suppose qu'à $t = 0$ , le condensateur $C_3$ est déchargé et $\varepsilon > 0$. On pose

$$\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad \text{et} \qquad \tau = R_3 C_3\,.$$

**1 -** Exprimer $v_3(t)$ pour $t > 0$ et tant que l'état de saturation de l'ALI reste le même.

**2 -** En déduire qu'il existe $t_1$ tel que l'ALI bascule en saturation basse. Déterminer $t_1$ en fonction de $\tau$ et $\alpha$.

**3 -** Exprimer $v_3(t)$ pour $t > t_1$ en fonction de $t - t_1$ et avant basculement de l'ALI.

**4 -** Montrer qu'il existe $t_2 > t_1$ tel que l'ALI bascule en saturation haute. Déterminer $t_2 - t_1$ en fonction de $\tau$ et $\alpha$.

**5 -** Montrer que $v_s(t)$ et $v_3(t)$ sont des signaux périodiques, dont on note la période $T$.

**6 -** Montrer que la période $T$ peut s'écrire

$$T = 2\tau \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\,.$$

**7 -** Tracer l'allure des variations de $v_s(t)$ en fonction de $v_3(t)$. Indiquer sur le graphe son sens de parcours.

### *Éléments de correction de l'exercice 1 :*

$\boxed{1}$ Comme $\varepsilon > 0$ alors $v_s = +V_{sat}$. $R_3$ et $C_3$ sont traversés par le même courant car $i_- = 0$ (ALI idéal). Ainsi,

$$v_3 + R_3 C_3 \frac{dv_3}{dt} = V_{sat}\,.$$

Solution générale : $v_3 = A\,e^{-t/\tau} + V_{sat}$. Détermination de la constante :

$$v_3(0) \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} A + V_{sat}$$

d'où

$$v_3(t) = V_{sat}(1 - e^{-t/\tau})\,.$$

$\boxed{2}$ Il y a basculement si $\varepsilon$ change de signe. On a déjà $v_- = v_3$. Exprimons $v_+$. Comme $i_+ = 0$ alors $R_1$ et $R_2$ sont parcourues par le même courant, et on peut utiliser un diviseur de tension :

$$\frac{v_+}{v_s} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad \text{donc} \qquad v_+ = \alpha V_{sat}$$

Finalement, $v_-(0) = 0 < v_+$ mais $v_-(\infty) = +V_{sat} > v_+$, il y a donc bien un instant $t_1$ où $\varepsilon$ change de signe. On résout

$$v_3(t_1) = \alpha V_{sat} \qquad \text{soit} \qquad t_1 = -\tau \ln(1-\alpha)\,.$$

$\boxed{3}$ Idem pour l'équation différentielle vérifiée par $v_3$ au signe près (ALI en saturation basse)

$$v_3 + R_3 C_3 \frac{dv_3}{dt} = -V_{sat}\,.$$

Solution générale : $v_3(t) = A\,\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau} - V_{\mathrm{sat}}$. Détermination de la constante :

$$v_3(t_1) \underbrace{=}_{\mathrm{CI}} \alpha V_{\mathrm{sat}} \underbrace{=}_{\mathrm{sol}} A - V_{\mathrm{sat}}$$

d'où pour $t > t_1$

$$v_3(t) = (1+\alpha)V_{\mathrm{sat}}\,\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau} - V_{\mathrm{sat}}\,.$$

**4** On inverse l'argument pour justifier l'existence de $t_2$, et on montre en résolvant $v_3(t_2) = -\alpha V_{\mathrm{sat}}$ que

$$t_2 - t_1 = \tau \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

**5** Pour $t > t_2$ on repart sur l'ALI en saturation haute, mais avec une nouvelle condition initiale et on trouve

$$v_3(t) = -(1+\alpha)V_{\mathrm{sat}}\,\mathrm{e}^{-(t-t_2)/\tau} + V_{\mathrm{sat}}$$

L'instant $t_3$ où il y a basculement de l'ALI vaut

$$t_3 - t_2 = \tau \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\,.$$

On retrouve alors exactement la phase 2 étudiée plus haut : même état de saturation de l'ALI, même équation différentielle sur $v_3$, et surtout même condition initiale. Les signaux sont donc bien périodiques.

**Attention !** La phase étudiée question 1 est une phase de démarrage, autrement dit de régime transitoire. Elle ne fait pas partie du régime établi où les signaux sont périodiques.

**6** cf questions précédentes : $T = 2\tau \ln \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$.

**7** Rectangle parcouru en sens horaire.

# ALI et oscillateurs

## Question de cours

Incluse dans l'exercice.

## Exercice : Mesure de capacité par un oscillateur [adapté banque PT 2015]

Les modifications de valeur de capacité ou d'inductance, par exemple utilisées en tant que capteur, peuvent être extraites à partir d'un oscillateur électronique. Dans ce cas, la modification de $L$ ou $C$ est source d'une modification de la fréquence de résonance de l'oscillateur, aisément détectable, par exemple, à l'aide d'un fréquencemètre.

On considère le montage électronique ci-dessous.

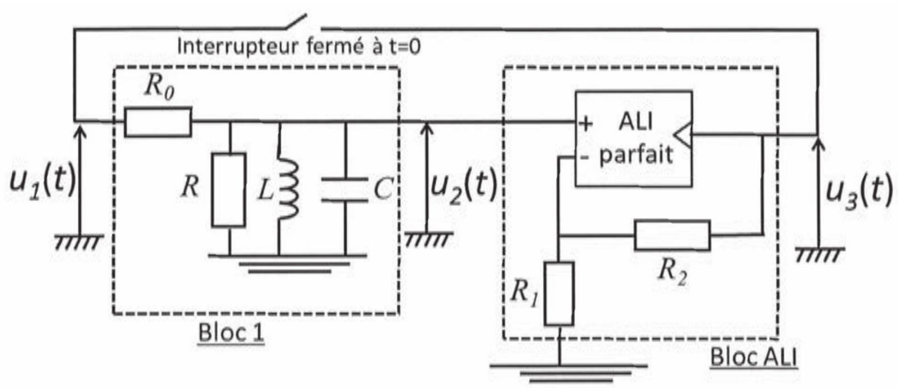



**Figure 1 – Oscillateur à capacité variable.**

**1 - Étude du bloc ALI.**
***1.a*** - Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert complexe $\underline{H}_2 = \underline{u}_3/\underline{u}_2$.
***1.b*** - On pose $K = |\underline{H}_2|$. Exprimer $K$ en fonction de $R_1$ et $R_2$.

**2 - Étude du bloc 1.** Le bloc 1 réalise un filtre de fonction de transfert complexe $\underline{H}_1 = \underline{u_2}/\underline{u_1}$ s'écrivant sous la forme

$$\underline{H} = \frac{A_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} A_0 = \dfrac{R}{R + R_0} \\ Q = \dfrac{RR_0}{R+R_0}\sqrt{\dfrac{C}{L}} \\ x = \dfrac{\omega}{\omega_0} = \omega\sqrt{LC} \end{cases}$$

***2.a*** - Préciser la nature du filtre.
***2.b*** - Donner les équations des deux asymptotes haute et basse fréquence du gain en décibel de ce filtre.
***2.c*** - Représenter son diagramme de Bode asymptotique en gain seulement. Calculer le gain en $x = 1$ et en déduire l'allure du diagramme réel en supposant le facteur de qualité élevé.

**3 - Étude du système bouclé.** On ferme l'interrupteur, réalisant ainsi un système bouclé.
***3.a*** - Déduire des questions précédentes l'équation différentielle vérifiée par $u_3$.
***3.b*** - À partir de cette équation, déterminer une condition impliquant $A_0$, $K$ et $Q$ pour que s'établissent des oscillations quasi-sinusoïdales. Déterminer la fréquence de ces oscillations.
***3.c*** - Montrer que la naissance d'oscillations impose une condition impliquant $A_0$, $K$ et $Q$.

**4 - Étude des oscillations.** On choisit les composants de manière à obtenir l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_3}{\mathrm{d}t^2} - 10^4 \frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} + 9 \cdot 10^8 u_3 = 0\,.$$

***4.a*** - Donner l'expression de $u_3$ en fonction de $t$ sans chercher à calculer les constantes dépendant des conditions initiales.
***4.b*** - Montrer que l'on obtient des oscillations dont l'amplitude varie au cours du temps. Représenter graphiquement

cette amplitude.

***4.c*** **-** En pratique, on obtient une stabilisation de l'amplitude à une valeur $A_{\max}$. Expliquer pourquoi et préciser la valeur $A_{\max}$.

**5 - Application à un capteur capacitif.** On utilise le dispositif complet pour suivre les déplacements $x$ de la partie mobile d'un capteur capacitif dont la capacité est donnée par la loi

$$C(x) = C_0 \left(1 - \frac{|x|}{L}\right)$$

avec $C_0 = 10\,\mu\mathrm{F}$ et $L = 10\,\mathrm{mm}$. Ce capteur forme le condensateur du filtre du bloc 1 de la figure 1. Les composants sont choisis tels que le montage oscille à la fréquence $f_{\mathrm{osc}}$, déterminée par le filtre, liée à la capacité $C$ par la relation

$$f_{\mathrm{osc}} = \frac{D}{\sqrt{C}} \qquad \text{avec} \qquad D = 1\mathrm{H}^{-1/2}\,.$$

À la position de référence du capteur ($x = 0$), la fréquence d'oscillation est $f_0$.

***5.a*** **-** Montrer par un développement limité que pour un petit déplacement $x$ ($|x|/L \ll 1$) la fréquence d'oscillation peut se mettre sous la forme $f_{\mathrm{osc}} \simeq a\,|x| + b$, et expliciter $a$ et $b$ en fonction des données.

***5.b*** **-** On note $\Delta f = f_{\mathrm{osc}} - f_0$ la variation de fréquence liée à un déplacement. La plus petite variation détectable est $\Delta f_{\min} = 3\,\mathrm{Hz}$. Quel est le plus petit déplacement détectable ?

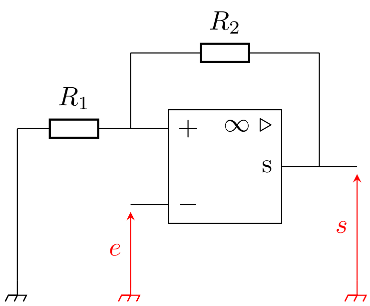
## *Éléments de correction de l'exercice 1 :*

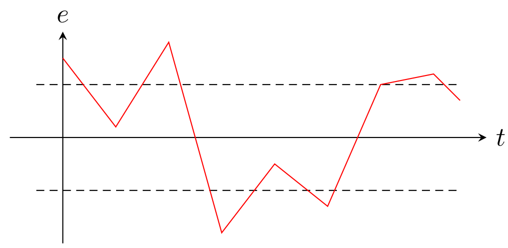
Non tapé.

# ALI et oscillateurs

## Exercice de cours

Établir le cycle du comparateur à hystérésis inverseur représenté et le tracer dans un diagramme $s-e$. Représenter le chronogramme $s(t)$ de la tension de sortie pour la tension d'entrée $e(t)$ représentée ci-dessous. Les pointillés indiquent les tensions de basculement.




## *Éléments de correction de l'exercice 0 :*

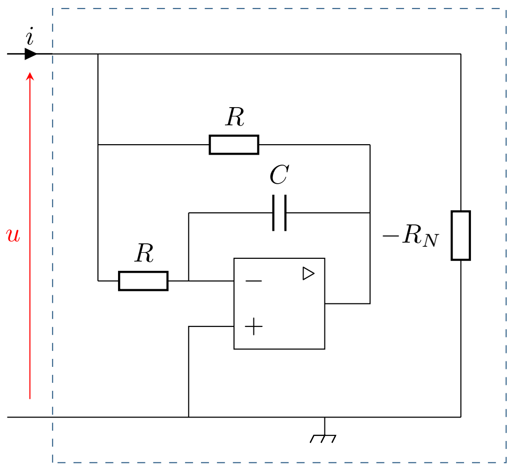
▷ Calcul de $\varepsilon$ :
→ Diviseur de tension : $\dfrac{v_+}{s} = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}$ ;
→ $\varepsilon = \dfrac{R_1}{R_1+R_2} s - e$.

▷ Conditions de saturation :
→ Pour avoir $s = +V_{\text{sat}}$ il faut $\varepsilon > 0$ soit $e < \dfrac{R_1}{R_1+R_2} V_{\text{sat}}$.
→ Pour avoir $s = -V_{\text{sat}}$ il faut $\varepsilon < 0$ soit $e > -\dfrac{R_1}{R_1+R_2} V_{\text{sat}}$.

▷ On peut alors tracer les branches du cycle.

▷ Sens de parcours : on part de $s = +V_{\text{sat}}$, on voit jusqu'à quelle valeur de $e$ cela est possible
→ parcours en sens horaire.

## Exercice : Simulateur d'inductance




Les bobines sont des composants très utilisés en électronique de puissance, mais leur grande taille les rend peu pratiques à insérer dans des circuits intégrés. Ce n'est cependant pas un souci puisqu'elles peuvent être remplacées par des montages à ALI comme celui représenté ci-contre, beaucoup plus compact.

L'ALI est supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire : on peut donc supposer le régime sinusoïdal forcé sans perte de généralité. Le dipôle « $-R_N$ » désigne l'impédance d'entrée d'un autre montage à ALI, dit à résistance négative, qui a exactement le même comportement qu'une résistance $-R_N < 0$.

Déterminer l'impédance d'entrée $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$ du montage. En déduire la valeur à donner à $R_N$ pour obtenir une inductance pure.

## *Éléments de correction de l'exercice 1 :*

Loi des nœuds :

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$


Étienne Thibierge, 27 septembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

Lois de comportement :

$$\underline{I_3} = -\frac{\underline{U}}{R_N} \qquad \text{et} \qquad \underline{I_2} = \frac{\underline{U}}{R}$$

car $\underline{V_+} = \underline{V_-} = 0$. Calculer $\underline{I_1}$ demande une loi des mailles en plus,

$$\underline{I_1} = \frac{\underline{U} - \underline{V_S}}{R} \qquad \text{avec} \qquad \underline{V_S} = -\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\underline{I_2}$$

la tension de sortie de l'ALI.

> *Au lieu d'introduire $\underline{V_S}$, on peut aussi passer par une loi des mailles dans les branches RC et R :*
>
> $$R\underline{I_2} + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\underline{I_2} = R\underline{I_1}$$
>
> *C'est même sans doute le plus malin car ça évite de faire intervenir une nouvelle inconnue.*

Ainsi,

$$\underline{I} = \frac{2\underline{U}}{R} - \frac{\underline{S}}{R} - \frac{\underline{U}}{R_N} = \frac{2\underline{U}}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}\underline{I_2} - \frac{\underline{U}}{R_N}$$

et donc

$$\underline{I} = \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}R^2C\omega} - \frac{1}{R_N}\right)\underline{U}$$

Pour une bobine idéale, on doit avoir

$$\underline{I} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}\underline{U}\,.$$

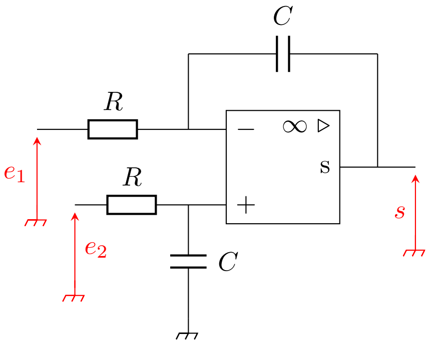
On a donc équivalence si $R_N = R/2$, sinon le montage est équivalent à une bobine idéale montée en parallèle d'une résistance telle que $1/r = 2/R - 1/R_N$.



Étienne Thibierge, 27 septembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

# ALI et oscillateurs

## Exercice : Montage à ALI




**1 -** En régime harmonique, exprimer la tension de sortie $\underline{S}$ en fonction de $\underline{E_1}$ et $\underline{E_2}$.

**2 -** Retranscrire cette relation dans le domaine temporel.

**3 -** À quoi ce montage sert-il ?

## *Éléments de correction de l'exercice 1 :*

**1** Pont diviseur dans la branche du haut : ($R$ et $C$ parcourus par le même courant car ALI idéal donc $i_- = 0$)

$$\frac{\underline{V_-} - \underline{E_1}}{\underline{S} - \underline{E_1}} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$$

Idem dans la branche du bas :

$$\frac{\underline{V_+}}{\underline{E_2}} = \frac{1/\mathrm{j}RC\omega}{R + 1/\mathrm{j}C\omega} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$$

Linéarité : $\underline{V_+} = \underline{V_-}$ d'où

$$\underline{V_-} - \underline{E_1} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\left(\underline{S} - \underline{E_1}\right)$$

$$\frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\underline{E_2} - \underline{E_1} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\left(\underline{S} - \underline{E_1}\right)$$

$$\underline{S} = \underline{E_1} + \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}\underline{E_2} - \frac{1 + \mathrm{j}RC\omega}{\mathrm{j}RC\omega}\underline{E_1}$$

$$\boxed{\underline{S} = \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}\left(\underline{E_2} - \underline{E_1}\right)}$$

**2**

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{RC}\int (e_2 - e_1)\mathrm{d}t}$$

**3** Intégrateur différentiel.



Étienne Thibierge, 27 septembre 2017, www.etienne-thibierge.fr