

Thermodynamique et diffusion de particules

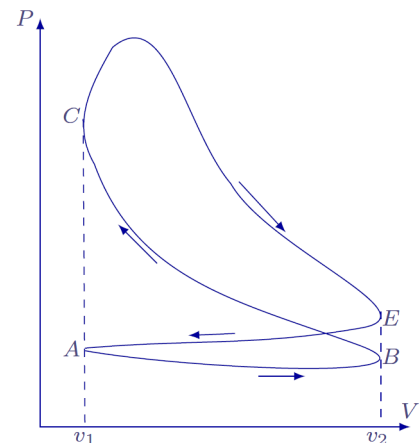
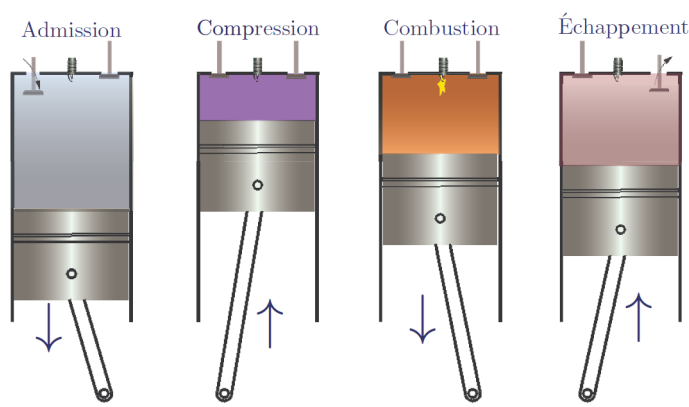
Question de cours

Établir l'équation de conservation puis l'équation de diffusion pour des particules dans le cas d'une diffusion à une dimension cartésienne.

Exercice 1 : Moteur à quatre temps

[oral CCP]

On étudie le fonctionnement d'un moteur à quatre temps dont le schéma représentatif est donné ci-dessous, de même que la représentation du cycle dans un diagramme de Watt $P - V$.



Le mélange de gaz subissant le cycle sera assimilé à un gaz parfait d'indice adiabatique $\gamma = c_P/c_V$.

- 1 - Identifier les différentes transformations du cycle réel sur le diagramme $P - V$.
- 2 - Modéliser le cycle réel par un cycle théorique comprenant six transformations, en utilisant des transformations réversibles isochores, isobares et adiabatiques. Déterminer les équations correspondant à chaque transformation.
- 3 - Comparer le cycle réel et le cycle modèle, segment par segment, en explicitant les phénomènes négligés dans le cycle modèle.
- 4 - A quoi l'aire du cycle correspond-elle ?
- 5 - Définir le rendement thermodynamique du moteur. L'exprimer, pour le cycle théorique établi question précédemment, en fonction des chaleurs reçues aux cours des phases isochores.
- 6 - Calculer le rendement du cycle théorique, en fonction des volumes minimal et maximal V_1 et V_2 , et de γ .

Éléments de correction de l'exercice 1 :

- 1 A-B : admission, B-C : compression, C-E : combustion, E-A : échappement. Se trouve facilement à partir des variations de volume, et on vérifie que c'est raisonnablement compatible avec les variations de pression.
- 2 Voir figure 1. A-B : isobare ; B-C : adiabatique ; C-D avec D sommet : isochore ; D-E : adiabatique ; E-B : isochore (chute de pression dès que la soupape d'échappement s'ouvre) ; B-A : isobare. Équations des branches : $P = \text{cte}$ ou $V = \text{cte}$ ou $PV^\gamma = \text{cte}$ pour les adiabatiques.
- 3 A-B : on néglige la dépression due à l'entrée de l'air. B-C : on néglige les pertes thermiques par conduction dans le cylindre. C-D : on néglige le fait que le volume augmente légèrement pendant l'explosion. D-E : idem B-C. E-A : on néglige la surpression.

- 4 Travail.

- 5 $\eta = -\frac{W_{BC} + W_{DE}}{Q_{CD}}$ car Q_{EB} se fait avec l'extérieur et n'est donc pas coûteux. D'après le premier principe

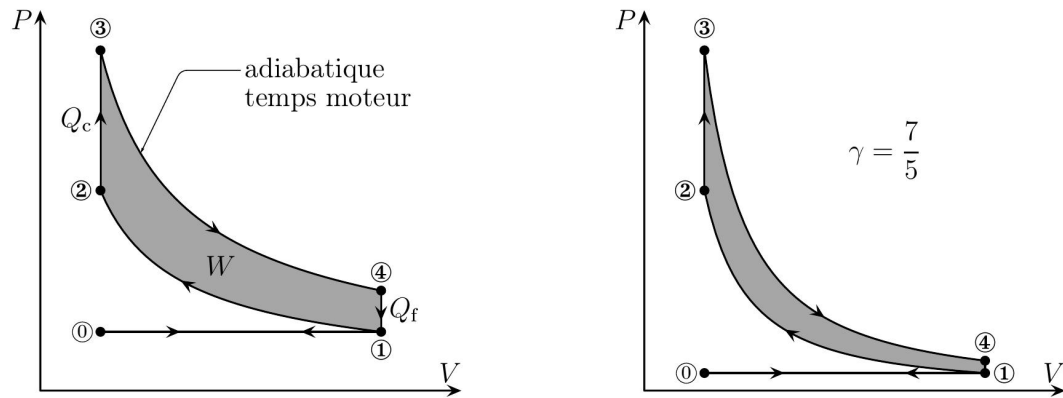


Figure 1 – Représentation du cycle de Beau de Rochas dans le diagramme de Watt. Le diagramme de gauche est déformé pour mieux visualiser le cycle, mais le diagramme de droite correspond au cycle d'un gaz parfait diatomique représenté à l'échelle. Figure extraite du cours en ligne de Matthieu Rigaut.

appliqué au gaz sur le cycle,

$$W_{BC} + W_{DE} + Q_{CD} + Q_{EB} = 0 \quad \text{d'où} \quad \eta = \frac{Q_{CD} + Q_{EB}}{Q_{CD}} = 1 + \frac{Q_{EB}}{Q_{CD}}$$

Comme $Q_{EB} < 0$ on a bien $\eta < 1$.

6 Au cours de l'isochore C-D :

$$\Delta U_{CD} = Q_{CD} + 0 = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_D - T_C)$$

Au cours de l'isochore E-B : idem, donc $Q_{EB} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_E - T_B)$.

Pour passer aux volumes, il faut utiliser la loi de Laplace sous la forme $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$ sur les adiabatiques et ensuite simplifier. On arrive à

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right)^{1-\gamma}$$

Thermodynamique et diffusion de particules

Question de cours

Établir l'équation de conservation puis l'équation de diffusion pour des particules dans le cas d'une diffusion à une dimension radiale dans une géométrie cylindrique.

Exercice 1 : Formation de la neige artificielle

[adapté oral CCP]

La neige artificielle est obtenue en pulvérisant de fines gouttes d'eau liquide à $T_1 = 10^\circ\text{C}$ dans l'air ambiant à $T_a = -15^\circ\text{C}$. On suppose que cette goutte reçoit de la part de l'air extérieur, pendant la durée dt , un transfert thermique $\delta Q = h [T_a - T(t)] S dt$ où $h = 65 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ est un coefficient phénoménologique dit conducto-convectif, et S est la surface de la goutte.

Données :

- ▷ masse volumique de l'eau liquide $\rho = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- ▷ capacité thermique massique à pression constante $c_P = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- ▷ enthalpie massique de fusion de la glace $\ell_{\text{fus}} = 335 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

1 - Dans un premier temps la goutte d'eau supposée sphérique de rayon $R = 0,20 \text{ mm}$ se refroidit en restant liquide. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$.

2 - En déduire la durée t_1 au bout de laquelle $T(t)$ est égale à $T_0 = -5,0^\circ\text{C}$.

3 - Lorsque la goutte atteint la température $T_0 = -5,0^\circ\text{C}$, la surfusion cesse : la goutte est partiellement solidifiée et sa température devient égale à $0,0^\circ\text{C}$. Calculer la fraction x de liquide restant à solidifier en supposant la transformation très rapide et adiabatique.

4 - Au bout de combien de temps t_2 la goutte est-elle complètement solidifiée ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

En oral, seule était rappelée la loi de Newton : flux conducto-convectif $\Phi = h [T_a - T]$.

1 Premier principe appliqué à la goutte pendant dt (transfo monobare) :

$$dH \underbrace{=}_{\text{échanges}} h [T_a - T(t)] 4\pi R^2 dt \underbrace{=}_{\text{liquide}} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c_P dT$$

d'où

$$\frac{dT}{dt} + \frac{3h}{\rho R c_P} T = \frac{3h}{\rho R c_P} T_a$$

et évidemment on pose $\tau = \rho R c_P / 3h$.

2 ▷ Solution particulière : $T_{\text{part}} = T_a$;

▷ Solution homogène : $T_{\text{hom}} = A e^{-t/\tau}$;

▷ Détermination de la constante sur la solution **complète** :

$$T(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} T_a + A e^{-t/\tau} \underbrace{=}_{\text{CI}} T_1$$

d'où

$$T(t) = T_a + (T_1 - T_a) e^{-t/\tau} .$$

On résout ensuite $T(t_1) = T_0$, d'où

$$t_1 = \tau \ln \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = 3,9 \text{ s} .$$

3 On sait qu'à la fin l'eau est diphasée, donc à $T_{\text{fus}} = 0^\circ\text{C}$. Raisonnement sur une transformation auxiliaire : d'abord toute l'eau liquide chauffe de T_0 à T_{fus} , puis ensuite une fraction $(1 - x)$ solidifie.

$$\Delta H \underbrace{=}_{\text{1er ppe}} 0 \underbrace{=}_{\text{transf.aux.}} m c_P (T_{\text{fus}} - T_0) + m(1 - x)(-\ell_{\text{fus}})$$

d'où on isole

$$x = 1 - \frac{c_P(T_{\text{fus}} - T_0)}{\ell_{\text{fus}}} = 0,94.$$

*** **Attention !** $\ell_{\text{sol}} = -\ell_{\text{fus}}$.

4 La transformation est un changement d'état isobare à T_{fus} . Premier principe pendant dt en supposant le rayon de la goutte constant et qu'une masse dm solidifie :

$$dH \underbrace{=}_{\text{échanges}} h [T_a - T_{\text{fus}}] 4\pi R^2 dt \underbrace{=}_{\text{solidif.}} -dm \ell_{\text{fus}}$$

soit

$$\frac{dm}{dt} = \frac{4\pi R^2 h (T_{\text{fus}} - T_a)}{\ell_{\text{fus}}}$$

Sachant que $m(t_1) = (1 - x)m_0$, la masse de solide évolue donc selon

$$m(t) = \frac{4\pi R^2 h (T_{\text{fus}} - T_a)}{\ell_{\text{fus}}} (t - t_1) + (1 - x)m_0$$

avec pour simplifier $m_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ la masse totale de la goutte. La goutte est complètement solidifiée lorsque $m(t_2) = m_0$, d'où

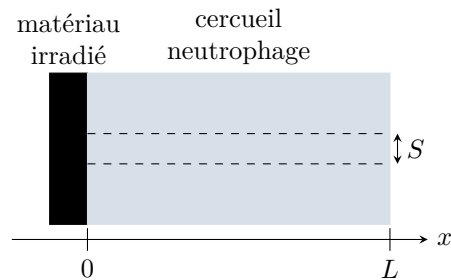
$$t_2 = t_1 + \frac{x R \ell_{\text{fus}} \rho}{3h(T_{\text{fus}} - T_a)} = 25 \text{ s}.$$

Thermodynamique et diffusion de particules

Question de cours

Établir l'équation de conservation puis l'équation de diffusion pour des particules dans le cas d'une diffusion à une dimension radiale dans une géométrie sphérique.

Exercice 1 : Diffusion dans un matériau neutrophage



Pour éviter tout danger d'irradiation, il est nécessaire d'enrober certains matériaux radioactifs d'une couche faite d'un matériau à même d'absorber les neutrons : on parle de cercueil neutrophage.

On admet que la diffusion des neutrons émis par le matériau irradié dans le matériau neutrophage est équivalente à une diffusion de Fick unidimensionnelle, dans un barreau de longueur L et de section S sans fuite de neutron par les surfaces latérales du barreau. On note $n(x, t)$ la densité volumique de neutrons mobiles à l'abscisse x et à l'instant t , et $j(x, t)$ la densité de courant de neutrons orientée dans le sens des x croissants.

Un matériau irradié, placé en $x < 0$, envoie dans le matériau neutrophage un flux surfacique J_0 homogène et constant de neutrons. On considère que le neutrophage absorbe $kn(x, t)$ neutrons par unité de temps et de volume.

1 - Montrer que $n(x, t)$ obéit à l'équation

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - kn.$$

2 - Que devient cette équation en régime permanent ? Est-ce celle d'un oscillateur harmonique ? Montrer qu'une solution de la forme $n(x) = N_0 e^{-\alpha x}$ convient pour α à préciser.

3 - Déterminer, en régime permanent, l'expression de $n(x)$ en fonction de J_0 , k et D .

4 - En déduire quelle doit être l'épaisseur minimale L_{\min} du neutrophage pour que 99% des neutrons y soient absorbés. Même question pour que le flux de neutrons soit réduit de 99%.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 Bilan de matière sur une tranche d'épaisseur dx :

$$n(x, t + dt) S dx - n(x, t) S dx = +j(x, t) S dt - j(x + dx, t) S dt - knS dx dt$$

Développement limité et simplification :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} - kn$$

Loi de Fick à une dimension conduit au résultat.

2 En régime permanent,

$$D \frac{d^2 n}{dx^2} - kn = 0$$

Pas OH car signe $-$. Solution exponentielle convient si $\alpha = \sqrt{k/D}$.

3 D'après la loi de Fick,

$$j(x) = -D \frac{dn}{dx} = \alpha D N_0 e^{-\alpha x} = \sqrt{kD} N_0 e^{-\alpha x}.$$

Condition aux limites : $j(0) = J_0 = \sqrt{kD} N_0$ ce qui donne N_0 . Finalement,

$$n(x) = \frac{J_0}{\sqrt{kD}} e^{-\alpha x}.$$

4 Comme il y a proportionnalité entre n et j , c'est la même réponse pour les deux questions : $j(x) = J_0/100$ se résout en

$$e^{-\alpha x} = \frac{1}{100} \quad \text{soit} \quad \alpha x = \ln(100) \quad \text{d'où} \quad L_{\min} = \frac{\ln 100}{\alpha}.$$

Thermodynamique et diffusion de particules

Pour aborder un exercice de type résolution de problème, il peut notamment être utile de faire un schéma modèle, d'identifier et nommer les grandeurs pertinentes, d'utiliser l'analyse dimensionnelle, de proposer des hypothèses simplificatrices, de décomposer le problème en des sous-problèmes simples, etc. Le candidat peut également être amené à proposer des valeurs numériques raisonnables pour les grandeurs manquantes ... et toutes les valeurs données ne sont pas forcément utiles. Le tout est évidemment à adapter à la situation proposée !

Exercice 1 : Money, money, money

Vous achetez six bouteilles de 1 L de jus de fruit que vous rangez dans votre réfrigérateur. Une heure plus tard, elles sont à la température du frigo.

Combien vous coûte ce refroidissement ?

Données :

- ▷ l'efficacité thermodynamique du réfrigérateur vaut 70 % de l'efficacité de Carnot ;
- ▷ l'isolation imparfaite du réfrigérateur se traduit par des fuites thermiques de puissance 10 W ;
- ▷ capacité thermique massique de l'eau liquide : $4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- ▷ tarifs EDF : 1 kWh coûte 0,15 €.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Supposons que les bouteilles de jus de fruit sont à température initiale $T_I = 25^\circ\text{C}$, et que la température finale (celle du frigo) vaut $T_F = 5^\circ\text{C}$. Commençons par calculer l'énergie nécessaire au refroidissement.

- ▷ Système : contenu du frigo.
- ▷ Bilan des échanges énergétiques :
 - transfert thermique reçu de la part du fluide frigorigène : $Q_{\text{frigo}} < 0$ que l'on cherche à déterminer ;
 - transfert thermique de fuite : $Q_{\text{fuite}} = +\mathcal{P}_{\text{fuite}} \Delta t > 0$ avec $\mathcal{P}_{\text{fuite}} = 10 \text{ W}$ et $\Delta t = 1 \text{ h} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ s}$ (attention au signe, compte tenu de la différence de température, c'est le contenu du frigo qui reçoit effectivement de l'énergie).
- ▷ Variation d'énergie interne : par additivité, $\Delta U = \Delta U_{\text{jus}}$, et on assimile le jus de fruit à de l'eau du point de vue thermique.

$$\Delta U \underbrace{=}_{\text{1er ppe}} Q_{\text{frigo}} + Q_{\text{fuite}} \underbrace{=}_{\text{modèle}} m_{\text{jus}} c_{\text{eau}} (T_F - T_I)$$

où $m_{\text{jus}} = 6 \text{ kg}$. On en déduit

$$Q_{\text{frigo}} = m_{\text{jus}} c_{\text{eau}} (T_F - T_I) - \mathcal{P}_{\text{fuite}} \Delta t = -5,4 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Calculons maintenant le coût en énergie électrique du refroidissement. On fait l'hypothèse que l'énergie électrique fournie au frigo ne sert qu'à faire tourner le moteur. Par définition de l'efficacité d'un frigo, $e = |Q_{\text{froid}}/W|$ où les échanges énergétiques sont ceux du fluide. Ici, on a donc $e = |Q_{\text{frigo}}|/\mathcal{E}_{\text{élec}}$. Par ailleurs, l'efficacité de Carnot d'un frigo vaut $e_C = T_{\text{frigo}}/(T_{\text{ext}} - T_{\text{frigo}})$. En combinant, on en déduit

$$e = \frac{|Q_{\text{frigo}}|}{\mathcal{E}_{\text{élec}}} = 0,7 \frac{T_{\text{frigo}}}{T_{\text{ext}} - T_{\text{frigo}}} \simeq 10 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_{\text{élec}} = \frac{|Q_{\text{frigo}}|}{e} = 5 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Enfin, calculons le prix en euros de cette énergie, sachant que $1 \text{ kWh} = 1 \cdot 10^3 \text{ W} \times 3,6 \cdot 10^3 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$. On trouve

$$p = \frac{5 \cdot 10^4 \text{ J}}{3,6 \cdot 10^6 \text{ J}} \times 0,15 \text{ €} = 0,2 \text{ centime}.$$

Thermodynamique et diffusion de particules

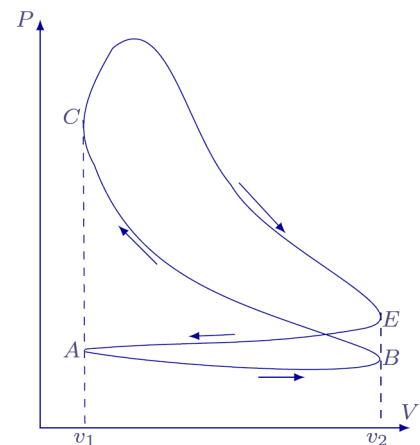
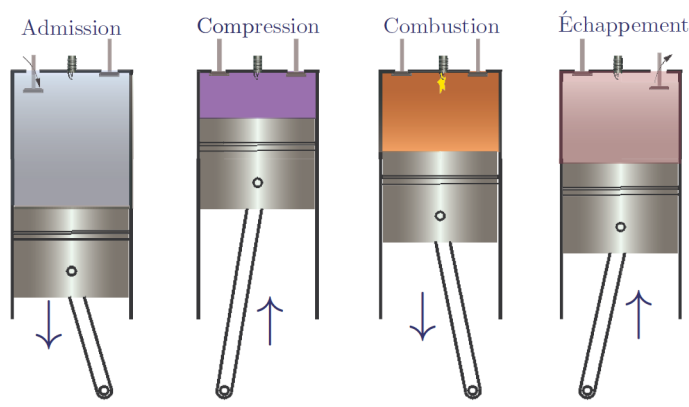
Question de cours

Établir l'équation de conservation puis l'équation de diffusion pour des particules dans le cas d'une diffusion à une dimension cartésienne.

Exercice 1 : Moteur à quatre temps

[oral CCP]

On étudie le fonctionnement d'un moteur à quatre temps dont le schéma représentatif est donné ci-dessous, de même que la représentation du cycle dans un diagramme de Watt $P - V$.



Le mélange de gaz subissant le cycle sera assimilé à un gaz parfait d'indice adiabatique $\gamma = c_P/c_V$.

- 1 - Identifier les différentes transformations du cycle réel sur le diagramme $P - V$.
- 2 - Modéliser le cycle réel par un cycle théorique comprenant six transformations, en utilisant des transformations réversibles isochores, isobares et adiabatiques. Déterminer les équations correspondant à chaque transformation.
- 3 - Comparer le cycle réel et le cycle modèle, segment par segment, en explicitant les phénomènes négligés dans le cycle modèle.
- 4 - A quoi l'aire du cycle correspond-elle ?
- 5 - Définir le rendement thermodynamique du moteur. L'exprimer, pour le cycle théorique établi question précédemment, en fonction des chaleurs reçues aux cours des phases isochores.
- 6 - Calculer le rendement du cycle théorique, en fonction des volumes minimal et maximal V_1 et V_2 , et de γ .

Thermodynamique et diffusion de particules

Question de cours

Établir l'équation de conservation puis l'équation de diffusion pour des particules dans le cas d'une diffusion à une dimension radiale dans une géométrie cylindrique.

Exercice 1 : Formation de la neige artificielle

[adapté oral CCP]

La neige artificielle est obtenue en pulvérisant de fines gouttes d'eau liquide à $T_1 = 10^\circ\text{C}$ dans l'air ambiant à $T_a = -15^\circ\text{C}$. On suppose que cette goutte reçoit de la part de l'air extérieur, pendant la durée dt , un transfert thermique $\delta Q = h [T_a - T(t)] S dt$ où $h = 65 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ est un coefficient phénoménologique dit conducto-convectif, et S est la surface de la goutte.

Données :

- ▷ masse volumique de l'eau liquide $\rho = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- ▷ capacité thermique massique à pression constante $c_P = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- ▷ enthalpie massique de fusion de la glace $\ell_{\text{fus}} = 335 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

1 - Dans un premier temps la goutte d'eau supposée sphérique de rayon $R = 0,20 \text{ mm}$ se refroidit en restant liquide. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$.

2 - En déduire la durée t_1 au bout de laquelle $T(t)$ est égale à $T_0 = -5,0^\circ\text{C}$.

3 - Lorsque la goutte atteint la température $T_0 = -5,0^\circ\text{C}$, la surfusion cesse : la goutte est partiellement solidifiée et sa température devient égale à $0,0^\circ\text{C}$. Calculer la fraction x de liquide restant à solidifier en supposant la transformation très rapide et adiabatique.

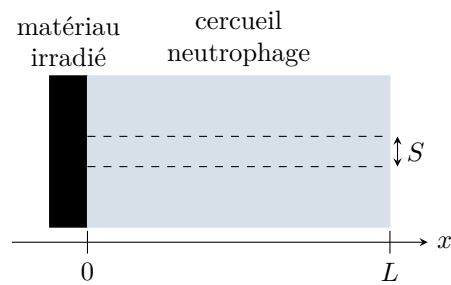
4 - Au bout de combien de temps t_2 la goutte est-elle complètement solidifiée ?

Thermodynamique et diffusion de particules

Question de cours

Établir l'équation de conservation puis l'équation de diffusion pour des particules dans le cas d'une diffusion à une dimension radiale dans une géométrie sphérique.

Exercice 1 : Diffusion dans un matériau neutrophage



Pour éviter tout danger d'irradiation, il est nécessaire d'enrober certains matériaux radioactifs d'une couche faite d'un matériau à même d'absorber les neutrons : on parle de cercueil neutrophage.

On admet que la diffusion des neutrons émis par le matériau irradié dans le matériau neutrophage est équivalente à une diffusion de Fick unidimensionnelle, dans un barreau de longueur L et de section S sans fuite de neutron par les surfaces latérales du barreau. On note $n(x, t)$ la densité volumique de neutrons mobiles à l'abscisse x et à l'instant t , et $j(x, t)$ la densité de courant de neutrons orientée dans le sens des x croissants.

Un matériau irradié, placé en $x < 0$, envoie dans le matériau neutrophage un flux surfacique J_0 homogène et constant de neutrons. On considère que le neutrophage absorbe $kn(x, t)$ neutrons par unité de temps et de volume.

1 - Montrer que $n(x, t)$ obéit à l'équation

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - kn.$$

2 - Que devient cette équation en régime permanent ? Est-ce celle d'un oscillateur harmonique ? Montrer qu'une solution de la forme $n(x) = N_0 e^{-\alpha x}$ convient pour α à préciser.

3 - Déterminer, en régime permanent, l'expression de $n(x)$ en fonction de J_0 , k et D .

4 - En déduire quelle doit être l'épaisseur minimale L_{\min} du neutrophage pour que 99% des neutrons y soient absorbés. Même question pour que le flux de neutrons soit réduit de 99%.

Thermodynamique et diffusion de particules

Pour aborder un exercice de type résolution de problème, il peut notamment être utile de faire un schéma modèle, d'identifier et nommer les grandeurs pertinentes, d'utiliser l'analyse dimensionnelle, de proposer des hypothèses simplificatrices, de décomposer le problème en des sous-problèmes simples, etc. Le candidat peut également être amené à proposer des valeurs numériques raisonnables pour les grandeurs manquantes ... et toutes les valeurs données ne sont pas forcément utiles. Le tout est évidemment à adapter à la situation proposée !

Exercice 1 : Money, money, money

Vous achetez six bouteilles de 1 L de jus de fruit que vous rangez dans votre réfrigérateur. Une heure plus tard, elles sont à la température du frigo.

Combien vous coûte ce refroidissement ?

Données :

- ▷ l'efficacité thermodynamique du réfrigérateur vaut 70 % de l'efficacité de Carnot ;
- ▷ l'isolation imparfaite du réfrigérateur se traduit par des fuites thermiques de puissance 10 W ;
- ▷ capacité thermique massique de l'eau liquide : $4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- ▷ tarifs EDF : 1 kWh coûte 0,15 €.