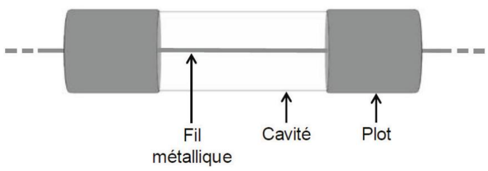
Phénomènes de transport

Question de cours

Rappeler le modèle microscopique de Drude de la conduction électrique. Établir l'expression de la conductivité électrique dans ce modèle.

Exercice 1 : Fonte d'un fusible [adapté écrit E3a PSI 2017]



La structure de base de tous les types de fusibles repose sur les mêmes éléments essentiels :

- ▷ deux plots de connexion permettant de relier le fusible au reste du circuit ;
- ▷ un fil métallique fin dont le métal constitutif est choisi avec un point de fusion à basse température (typiquement du plomb ou de l'étain) ;
- ▷ une cavité qui assure un rôle de protection et peut contenir un isolant.

En situation de fonctionnement normal, le fusible permet le passage du courant. En présence d'un défaut électrique créant un courant anormalement élevé, la fonte du fil métallique entraîne l'ouverture du circuit et le fusible remplit ainsi sa fonction de protection.

Le fil métallique est supposé cylindrique d'axe x, de section S et longueur L. On note μ sa masse volumique, λ et σ ses conductivités thermique et électrique et c sa capacité thermique massique. Toutes ces grandeurs sont supposées uniformes dans le fil métallique et indépendantes de la température. Le fil métallique est soudé à ses deux extrémités sur un plot supposé conducteur électrique et thermique parfait, maintenu à température constante T_0. Il s'agit de la température de l'air extérieur au fusible. Le fil est parcouru par un courant d'intensité I.

Dans un premier temps, le fil est supposé inséré dans une gaine assurant une isolation latérale thermique et électrique parfaite.

1 - Montrer par un bilan d'énergie que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température peut s'écrire

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I^2}{\sigma S^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,.$$

2 - Établir le profil de température dans le fil métallique en régime stationnaire. Tracer son allure.

On note T_{fus} la température de fusion du métal.

3 - Déterminer la position x_{fus} du fil métallique où débute la fusion du métal lorsque le courant atteint l'intensité maximale $I_{\max}$ supportée par le fusible.

Il existe également des fusibles où le fil métallique est entouré d'air, supposé à même température T_0 que les plots. Les échanges thermiques à l'interface sont modélisés par la loi de Newton : le flux thermique surfacique cédé à l'air extérieur est

$$\vec{j}_{\text{conv}} = h\,[T(x) - T_0]\,\vec{u}$$

avec h le coefficient de transfert convectif ($h \sim 10$ dans les unités SI usuelles) et $\vec{u}$ un vecteur unitaire suivant la normale extérieure à la surface d'échange.

On suppose se placer en régime permanent. On peut alors montrer que la température au sein du fil ne dépend que de la position x mais pas de la coordonée cylindrique radiale r à condition que le nombre de Biot $Bi = hD/\lambda$ (D diamètre du fil) soit très inférieur à 1.

4 - Vérifier que le nombre de Biot est sans dimension, et montrer en proposant des ordres de grandeur que la condition $Bi \ll 1$ est vérifiée.

5 - Montrer que la température vérifie l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} - k^2 (T - T_0 - T_1) = 0\,,$$

avec $k = \sqrt{4h/\lambda D}$ et $T_1 = \dfrac{16\,I^2}{\sigma \lambda k^2 \pi^2 D^4}$.

6 - La résoudre en tenant compte des conditions aux limites.

7 - Quel(s) mode(s) de transfert thermique manque(nt)-il(s) à cette étude ?

Étienne Thibierge, 6 novembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 Premier principe entre t et $t+\mathrm{d}t$ appliqué à l'élément mésoscopique de cylindre situé entre x et $x+\mathrm{d}x$ (masse δm et résistance δR) :

$$\delta m\, c\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t = +j_{\mathrm{th}}(x)S\mathrm{d}t - j_{\mathrm{th}}(x+\mathrm{d}x)S\mathrm{d}t + \delta R\, I^2\,\mathrm{d}t$$

$$\mu S\mathrm{d}x\, c\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t = -S\frac{\mathrm{d}j_{\mathrm{th}}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}x}{\sigma S}I^2\,\mathrm{d}t$$

$$\mu S c\frac{\partial T}{\partial t} = S\lambda\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} + \frac{I^2}{\sigma S} \qquad \text{(loi de Fourier)}$$

$$\boxed{\mu c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I^2}{\sigma S^2} + \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,.}$$

2 En régime stationnaire l'équation devient :

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{I^2}{\sigma\lambda S^2}$$

d'où par intégrations successives

$$T(x) = -\frac{I^2}{2\sigma\lambda S^2}x^2 + Ax + B$$

avec comme conditions aux limites $T(0) = T(L) = T_0$. On en déduit

$$T(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} B \underbrace{=}_{\text{CI}} T_0$$

et

$$T(L) \underbrace{=}_{\text{sol}} -\frac{I^2}{2\sigma\lambda S^2}L^2 + AL + T_0 \underbrace{=}_{\text{CI}} T_0 \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{I^2\,L}{2\lambda\sigma S^2}$$

Finalement :

$$\boxed{T(x) = -\frac{I^2}{2\sigma\lambda S^2}x^2 + \frac{I^2\,L}{2\lambda\sigma S^2}x + T_0}$$

Profil parabolique nécessairement symétrique par rapport à $L/2$ où la température est maximale.

3 C'est le point le plus chaud du fil donc $x_{\mathrm{fus}} = L/2$.

4 $[j] = [-\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T] = [\lambda]\,\dfrac{T}{L}$ et $[j] = [h]T$ donc

$$[\lambda]\,\frac{T}{L} = [h]T \qquad \text{d'où} \qquad [Bi] = \frac{[h]L}{[\lambda]} = 1$$

Ordre de grandeur : $\lambda \sim 400\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ pour un métal, donc

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{1}{30}\mathrm{m}^{-1}\,.$$

On a donc $Bi \ll 1$ tant que $D \ll 30\,\mathrm{m}$. Autant dire qu'on est large ...

5 Même bilan thermique que précédemment en ajoutant le flux convectif

$$\phi_{\mathrm{conv}} = -h\,(T(x) - T_0) \times \pi D\,\mathrm{d}x$$

Le premier principe devient :

$$\mu S c\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = S\lambda\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{I^2}{\sigma S}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - h\,(T(x) - T_0) \times \pi D\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

d'où en régime permanent

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{h\pi D}{S\lambda}\,[T(x) - T_0] + \frac{I^2}{\lambda\sigma S^2} = 0\,.$$

En reliant la section au diamètre sous la forme $S = \pi D^2/4$ on aboutit au résultat voulu.

6 Écriture sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - k^2 T = -k^2(T_0 + T_1)$$

- ▷ Forme générale des solutions :
  - → Solution particulière : $T_\mathrm{P} = T_0 + T_1$;
  - → Solution homogène : $T_\mathrm{H} = A\,\mathrm{e}^{kx} + B\,\mathrm{e}^{-kx}$;
  - → Conclusion : $T(x) = T_0 + T_1 + A\,\mathrm{e}^{kx} + B\,\mathrm{e}^{-kx}$.
- ▷ Détermination des constantes avec les conditions aux limites $T(0) = T(L) = 0$: pénible ! Je vous laisse ce plaisir, ainsi que celui de remercier les concepteurs du sujet E3a.

7 Rayonnement.

Phénomènes de transport

Question de cours

Établir l'expression de la résistance d'un câble cylindrique parcouru uniformément par un courant parallèle à son axe.

Exercice 1 : Température du corps humain en plongée

L'objectif de l'exercice est de modéliser les processus de transfert thermique entre le corps d'un plongeur et l'eau. On note $T(t)$ la température interne du plongeur à l'instant t, supposée uniforme, et $T_0 = 12\,°\mathrm{C}$ la température de l'eau, supposée constante. On note $S \sim 2\,\mathrm{m}^2$ l'aire totale du plongeur en contact avec l'eau.

- ▹ L'ensemble de la peau est modélisée par une unique résistance thermique $R_\mathrm{peau} = 8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}$.
- ▹ Le plongeur est équipé d'une combinaison en néoprène d'épaisseur $e = 5\,\mathrm{mm}$. Le contact thermique entre la peau du plongeur et l'intérieur de la combinaison est supposé parfait. Le néoprène est une mousse remplie de bulles de diazote. Lorsque la combinaison est gorgée d'eau, sa conductivité thermique est de l'ordre de $\lambda_\mathrm{combi} = 5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$. On note R_combi la résistance thermique associée.
- ▹ Les transferts thermiques entre la paroi externe de la combinaison et l'eau sont modélisés par la loi de Newton donnant le courant thermique conducto-convectif sortant,

$$\vec{j}_\mathrm{cc} = h(T_\mathrm{paroi} - T_0)\vec{n}\,,$$

  où $\vec{n}$ est la normale unitaire sortante et $h = 2 \cdot 10^2\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$ un paramètre phénoménologique. On note R_cc la résistance thermique conducto-convective.

1 - Exprimer R_cc en fonction de h et S.

2 - Proposer le schéma électrique équivalent permettant de déterminer la résistance thermique totale R_tot entre l'intérieur du corps du plongeur et l'eau. En déduire l'expression du flux thermique total Φ_tot en fonction de T, T_0 et R_tot.

3 - Estimer les valeurs numériques de R_combi et R_cc. Conclure sur une expression approchée de R_tot.

Le corps humain se réchauffe grâce à la dégradation des molécules d'ATP. On note $\mathcal{P}_\mathrm{ATP}$ la puissance associée à cette production interne et C la capacité thermique du plongeur.

4 - Montrer que la température T du plongeur au cours du temps est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau}(T_0 + R_\mathrm{tot}\mathcal{P}_\mathrm{ATP}) \qquad \text{avec} \qquad \tau = CR_\mathrm{tot}\,.$$

5 - Résoudre cette équation en supposant constante $\mathcal{P}_\mathrm{ATP} = 1{,}5 \cdot 10^2\,\mathrm{W}$. On introduira $T_\mathrm{c} = 37\,°\mathrm{C}$ la température du corps humain hors de l'eau.

6 - Le plongeur est en hypothermie lorsque sa température devient inférieure à 35 °C. Déterminer le temps maximal que peut durer une plongée sans danger pour un plongeur de 75 kg de capacité thermique massique $c = 4 \cdot 10^3\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 $\Phi_\mathrm{cc} = hS(T_\mathrm{paroi} - T_0)$ donc $R_\mathrm{cc} = 1/hS$.

2 Association série des trois : $R_\mathrm{tot} = R_\mathrm{peau} + R_\mathrm{combi} + R_\mathrm{cc}$ donc $\Phi_\mathrm{tot} = (T - T_0)/R_\mathrm{tot}$.

3 $R_\mathrm{combi} = \dfrac{e}{\lambda S} \sim 5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}$ et $R_\mathrm{cc} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}$ donc $R_\mathrm{tot} \simeq R_\mathrm{peau} + R_\mathrm{combi}$

4 On se place dans l'ARQS (rappel : les résistances thermiques ne sont valables qu'en régime continu). Premier principe pendant $\mathrm{d}t$ appliqué au plongeur :

$$\mathrm{d}H = -\Phi_\mathrm{tot}\mathrm{d}t + \mathcal{P}_\mathrm{ATP}\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{T - T_0}{R_\mathrm{tot}} + \mathcal{P}_\mathrm{ATP}$$

Or $\mathrm{d}H = C\,[T(t+\mathrm{d}t) - T(t)]$ d'où on arrive au résultat

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau}(T_0 + R_{\mathrm{tot}}\mathcal{P}_{\mathrm{ATP}}) \qquad \text{avec} \qquad \tau = C R_{\mathrm{tot}}\,.$$

5 Solution particulière $T_\infty = T_0 + R_{\mathrm{tot}}\mathcal{P}_{\mathrm{ATP}}$, solution homogène $A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, et $T(0) = T_{\mathrm{c}}$ d'où on trouve

$$T(t) = T_\infty + [T_{\mathrm{c}} - T_\infty]\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

6 Durée maximale $\Delta t_{\max}$ telle que $T(\Delta t_{\max}) = T_{\mathrm{hypo}}$, qui vaut

$$\Delta t_{\max} = \tau \ln \frac{T_{\mathrm{c}} - T_\infty}{T_{\mathrm{hypo}} - T_\infty} = 1 \cdot 10^4\,\mathrm{s} = 3\,\mathrm{h}$$

Phénomènes de transport

Question de cours

Établir l'équation de conservation de la charge électrique en coordonnées cartésiennes à une dimension. Donner sans démonstration la généralisation à trois dimensions.

Exercice 1 : Crayon combustible nucléaire [adapté écrit CCP PC 2013]

Un crayon combustible est constitué de pastilles d'oxyde d'uranium ou d'oxyde mixte d'uranium et de plutonium (d'un diamètre et d'une hauteur d'environ $r_\mathrm{c} \sim 1\,\mathrm{cm}$) empilées dans des tubes de métal (gaines en alliage de zirconium) fermés aux extrémités formant un cylindre de hauteur totale $H \gg r_\mathrm{c}$. Les transformations nucléaires au sein du crayon produisent une puissance thermique volumique P_v. On étudie le régime permanent, et on suppose que les échanges thermiques ne se font que par conduction radiale. Les conductivités thermiques du combustible et de la gaine sont respectivement notée λ_c et λ_g. Le contact thermique entre le cœur et la gaine est supposé parfait, si bien que la température est continue à l'interface.

Données :

▷ Forme générale de l'équation de la chaleur en présence d'un terme source :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = P_v + \lambda\,\Delta T\,.$$

▷ Expression de l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,.$$

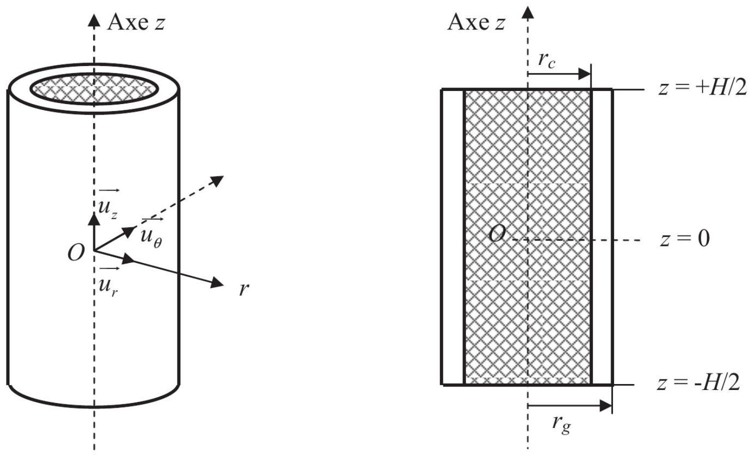


Figure 1 – Repère et dimensions du crayon combustible.

1 - En remarquant que le système possède une symétrie de révolution autour de l'axe Oz et que le régime est permanent, simplifier l'équation de la chaleur proposée.

2 - En déduire l'expression de l'évolution de la température selon r dans le combustible en fonction de la température au centre $T(r=0) = T_0$.

3 - Exprimer alors l'écart de température moyen entre le centre et la périphérie du combustible $\Delta T_\mathrm{comb} = T_0 - T_\mathrm{c}$, où $T_\mathrm{c} = T(r=r_\mathrm{c})$.

4 - Exprimer la température $T(r)$ dans la gaine en fonction de la température T_c et celle de la paroi de la gaine $T_\mathrm{g} = T(r=r_\mathrm{g})$.

5 - Exprimer le flux thermique surfacique ϕ s'échappant de la paroi du crayon en $r = r_\mathrm{c}$ en fonction de P_v et de r_c.

6 - En déduire l'expression de $\Delta T_\mathrm{tot} = T_\mathrm{c} - T_\mathrm{g}$ en fonction de P_v, r_c, r_g et λ_g.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 Seule variable restante : r, donc

$$0 = P_v + \frac{\lambda_c}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right).$$

2 On doit résoudre :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{P_v}{\lambda_c}$$

Par intégrations successives :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{P_v}{\lambda_c}r \qquad \text{soit} \qquad r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{P_v}{2\lambda_c}r^2 + A$$

avec A constante, puis

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{P_v}{2\lambda_c}r + \frac{A}{r} \qquad \text{soit} \qquad T(r) = -\frac{P_V}{4\lambda_c}r^2 + A\ln(r) + B$$

avec B constante. Détermination des constantes avec les conditions aux limites : $T(0) = T_0$ donc $A = 0$ sinon divergence et $B = T_0$, d'où

$$T(r) = -\frac{P_V}{4\lambda_c}r^2 + T_0\,.$$

3 $T_c = -\dfrac{P_V}{4\lambda_c}{r_c}^2 + T_0$ donc on a directement

$$\Delta T_{\mathrm{comb}} = \frac{P_V}{4\lambda_c}{r_c}^2\,.$$

4 Même équation différentielle, mais avec $P_V = 0$. La solution devient de la forme

$$T(r) = A'\ln r + B'$$

avec comme conditions aux limites $T(r_c) = T_c = A'\ln(r_c) + B'$ et $T(r_g) = T_g = A'\ln(r_g) + B'$. Par somme et différence, on en déduit

$$A' = \frac{T_g - T_c}{\ln r_g - \ln r_c} \qquad \text{et} \qquad B' = -A'\ln r_c + T_c\,.$$

Finalement, au sein de la gaine,

$$T(r) = \frac{T_g - T_c}{\ln\dfrac{r_g}{r_c}}\ln\frac{r}{r_c} + T_c\,.$$

5 En régime permanent, toute la puissance produite au sein du crayon s'échappe nécessairement par sa paroi latérale, donc

$$\pi{r_c}^2\,H \times P_v = 2\pi r_c\,H \times \phi \qquad \text{d'où} \qquad \phi = \frac{P_v r_c}{2}\,.$$

6 Le flux peut également s'obtenir avec la loi de Fourier en $r = r_c$,

$$\phi = -\lambda_g\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\lambda_g\frac{T_g - T_c}{\ln\dfrac{r_g}{r_c}}\frac{1}{r_c}\,.$$

En égalisant les deux expressions de ϕ, on en déduit

$$\Delta T_{\mathrm{tot}} = \frac{P_V{r_c}^2}{2\lambda_g}\ln\frac{r_g}{r_c}\,.$$

Phénomènes de transport

Exercice 1 : Géothermie

La croûte continentale terrestre a une épaisseur moyenne $\ell = 30\,\mathrm{km}$, limitée par la discontinuité de Moho. Sa conductivité thermique moyenne vaut $\lambda = 20\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Au niveau du sol, la température vaut $T_2 = 300\,\mathrm{K}$ alors qu'elle vaut $T_1 = 900\,\mathrm{K}$ sur la discontinuité de Moho. Les éléments radioactifs de la croûte terrestre libèrent, en se désintégrant, une puissance volumique $p = 10\,\mathrm{\mu W \cdot m^{-3}}$.

On néglige localement la courbure de la Terre et on se place en régime permanent : la température ne dépend que de la profondeur z, mesurée le long d'un axe vertical ascendant dont l'origine se trouve à la profondeur ℓ.

1 - Établir l'équation différentielle régissant le champ de température $T(z)$.

2 - Résoudre cette équation.

3 - En déduire le flux géothermique au niveau du sol. Commenter l'influence des éléments radioactifs.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 Bilan d'enthalpie sur une tranche mésoscopique de hauteur $\mathrm{d}z$ et de section S pendant $\mathrm{d}t$ avec un terme source

$$\mathrm{d}H = \rho c_P \mathrm{d}T = +j(z)S\mathrm{d}t - j(z+\mathrm{d}z)S\mathrm{d}t + pS\mathrm{d}z\mathrm{d}t = 0$$

car régime permanent. Avc la loi de Fourier, cela donne

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}z} = -\lambda \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2} = p\,.$$

2 Forme générale de la solution :

$$T(z) = -\frac{p}{2\lambda} z^2 + Az + B$$

Avec les conditions aux limites :

$$B = T_1 \qquad \text{et} \qquad A = \frac{T_2 - T_1}{\ell} + \frac{p\ell}{2\lambda}$$

3 Flux thermique à la surface :

$$\boxed{j(\ell) = p\ell + \frac{\lambda(T_1 - T_2)}{\ell} = 0{,}55\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}\,.}$$

à comparer avec $0{,}4\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$ si $p = 0$. Rôle important de la radioactivité !

> *On peut aussi utiliser la résistance thermique.*