

Électrostatique et oxydoréduction

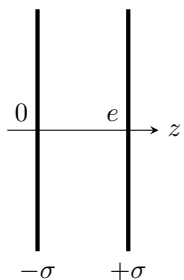
Question de cours

Calculer le champ électrostatique créé par un plan chargé en surface avec une densité de charge uniforme σ_0 .

Exercice 1 : Capteur capacitif

[banque PT 2015]

Les capteurs capacitifs utilisent un condensateur comme composant principal. On rappelle qu'un condensateur est formé de deux armatures conductrices séparées par un isolant électrique. Ici, l'isolant est de l'air, dont les propriétés électriques sont supposées identiques à celles du vide.



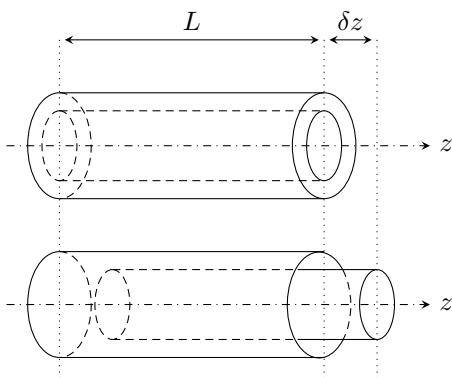
On considère pour commencer un condensateur à lame d'air constitué de deux armatures planes métalliques de surface S , en regard l'une de l'autre, portant respectivement des densités surfaciques uniformes de charge $\pm\sigma$. On suppose les dimensions des armatures beaucoup plus grandes que la distance e les séparant, ce qui permet d'utiliser le modèle du condensateur plan illimité.

- 1 - Calculer le champ $\vec{E}(M)$ créé par l'une des armatures du condensateur dans tout l'espace.
- 2 - En déduire le champ $\vec{E}(M)$ créé par le condensateur.

3 - En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$ et l'expression de la capacité $C_{p,0}$ du condensateur plan. On impose $V = 0$ sur l'armature chargée négativement.

On envisage maintenant la situation où l'une des deux armatures reste fixe tandis que l'autre est susceptible de se déplacer en translation d'une quantité algébrique δz par rapport à sa position de référence $z = e$.

4 - Donner l'expression de la capacité $C_p(\delta z)$ en fonction de $C_{p,0}$ et la simplifier dans l'hypothèse de petits déplacements $|\delta z| \ll e$.



On considère maintenant un condensateur formé de deux armatures cylindriques coaxiales, de longueur L et rayons respectifs $R_1 < R_2$ séparées par de l'air. L'armature interne porte une charge $-Q$ et l'externe une charge $+Q$, supposées uniformément réparties sur les surfaces. On suppose $L \gg R_2$, ce qui permet d'adopter un modèle illimité.

5 - Déterminer en justifiant qualitativement mais de manière précise la direction et le sens du champ électrostatique et les coordonnées dont dépend son module.

6 - Déterminer le champ en tout point de l'espace.

7 - En déduire le potentiel électrostatique puis la différence de potentiel entre les deux armatures du condensateur. On impose $V = 0$ sur l'armature intérieure.

8 - Déterminer la capacité C_{c0} du condensateur sous la forme $C_{c0} = AL_r$, où L_r est la longueur des portions de cylindre en regard (ici $L_r = L$).

9 - L'armature intérieure est susceptible de se déplacer d'une distance algébrique δz par rapport à sa position de référence. Déterminer l'expression littérale $C_c(\delta z)$ en fonction de $C_{c,0}$, L et δz . Tracer son allure.

10 - Dans la perspective de la mesure d'un déplacement δz , quelles sont les différences notables entre un condensateur plan et un condensateur cylindrique ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Non tapé

Électrostatique et oxydoréduction

Question de cours

Calculer le champ électrostatique créé par un cylindre infini chargé en volume avec une densité de charge uniforme ρ_0 .

Exercice 1 : Diagramme potentiel-pH de l'aluminium

[CCP PSI 2013]

Les espèces chimiques envisagées dans cet exercice sont $\text{Al}(\text{OH})_{3(s)}$, Al^{3+} , $\text{Al}_{(s)}$ et $\text{Al}(\text{OH})_4^-$. On donne figure 1 le diagramme potentiel-pH de l'aluminium à 298 K, pour une concentration totale en espèces dissoutes de $10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le point A a pour ordonnée : $E = -1,71 \text{ V}$, le point B a pour abscisse $\text{pH}_B = 10$. On rappelle que l'eau (ou ses ions) peut agir comme oxydant ou comme réducteur. On supposera les pressions partielles des constituants gazeux égales à la pression standard, soit $P_{\text{O}_2} = P_{\text{H}_2} = P^\circ = 1 \text{ bar}$.

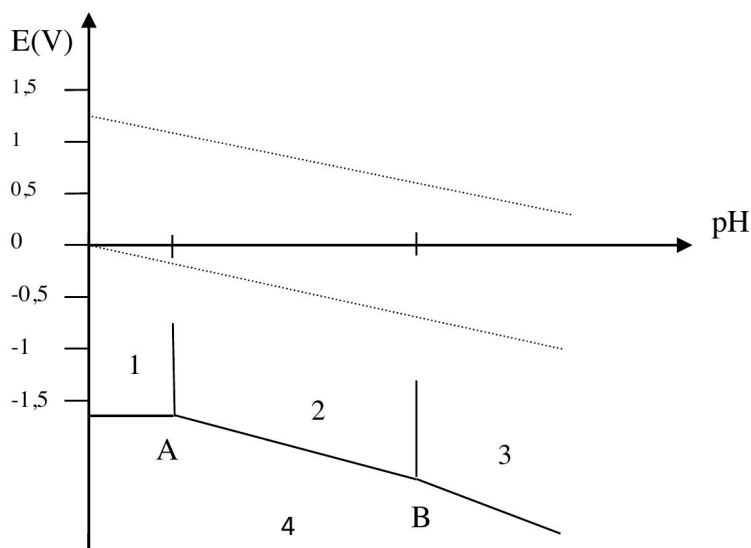


Figure 1 – Diagramme potentiel-pH de l'aluminium. Concentration de trace $C_{\text{tracé}} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Données : $E^\circ(\text{H}^+/\text{H}_2) = 0 \text{ V}$; $E^\circ(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$ et $\text{p}K_s(\text{Al}(\text{OH})_3) = 32$.

- 1 - Écrire les deux demi-réactions redox dans lesquelles interviennent les couples de l'eau. En déduire les deux équations des deux droites $E = f(\text{pH})$ figurant dans le diagramme potentiel-pH de l'eau. Tracer ce diagramme en précisant explicitement les domaines de prédominance de chacune des espèces étudiées.
- 2 - Préciser le degré d'oxydation de l'aluminium dans chacune des espèces envisagées et attribuer à chacun des quatre domaines numérotés de 1 à 4 l'espèce qui lui est rattachée.
- 3 - Déterminer l'abscisse pH_A du point A.
- 4 - Préciser les valeurs des pentes des trois segments figurant sur ce diagramme.
- 5 - Déterminer la valeur du potentiel standard $E^\circ(\text{Al}^{3+}/\text{Al})$.
- 6 - Par ajout de poudre d'aluminium dans une solution acide concentrée, on assiste à une vive réaction accompagnée d'un dégagement gazeux. De quel gaz s'agit-il ? Préciser l'équation bilan de cette réaction.
- 7 - Peut-on laisser sans protection particulière une barre d'aluminium en contact avec de l'eau de pluie ?
- 8 - Pourquoi l'aluminium est-il couramment utilisé pour les cadres de vélo, les structures de remorque, les lignes électriques à haute tension, etc ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Non tapé

Électrostatique et oxydoréduction

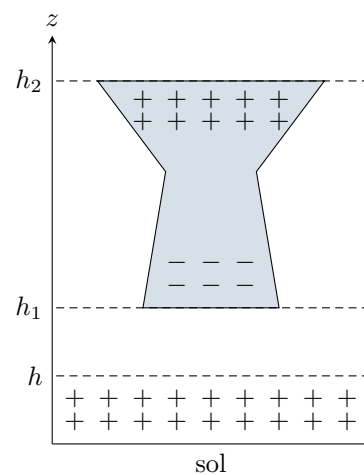
Question de cours

Calculer le champ électrostatique créé par une boule chargée en volume avec une densité de charge uniforme ρ_0 .

Exercice 1 : Nuage d'orage

[oral banque PT]

L'apparition de cumulonimbus, nuage colossal au profil en forme d'enclume, est annonciatrice d'un orage imminent. On modélise dans cet exercice un nuage typique, situé entre les altitudes $h_1 = 2$ km et $h_2 = 10$ km et de section horizontale $S = 1$ km². On pose $h_0 = (h_1 + h_2)/2$ et $H = h_2 - h_1$.



On constate habituellement dans ces nuages l'apparition de charges négatives à la base du nuage et de charges positives au sommet : on considérera que la densité volumique de charge $\rho(z)$ varie linéairement de la valeur maximale $\rho_0 > 0$ au sommet du nuage à la valeur opposée $-\rho_0$ à sa base. La base chargée du nuage fait alors apparaître, par influence et ionisation de l'air, des charges positives dans l'atmosphère sur une hauteur $h = 500$ m. On les supposera réparties uniformément avec une densité volumique ρ_{sol} . Le sol est assimilé à un bon conducteur, l'air entre $z = h$ et $z = h_1$ n'est pas chargé. Dans la modélisation proposée, les effets de bords sont négligés : les grandeurs étudiées sont supposées ne dépendre que de l'altitude z .

Des mesures effectuées par ballon sonde permettent de déterminer la valeur de la composante verticale du champ électrique dans l'atmosphère : quasiment nul au niveau du sol, environ $65 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ à 500 m d'altitude et jusqu'à $200 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ de valeur maximale à l'intérieur du nuage.

- 1 - Expliquer le phénomène d'influence à l'origine de la présence des charges au sol.
- 2 - La conservation de la charge ne semble pas vérifier sur le schéma. Comment expliquer ce paradoxe ?
- 3 - Justifier qu'en tout point M on ait $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$.
- 4 - Déterminer le champ électrique dans les quatre domaines $0 < z < h$; $h < z < h_1$; $h_1 < z < h_2$ et enfin $z > h_2$.
- 5 - Tracer l'allure de $E(z)$.
- 6 - Sachant que que $E(z)$ admet un extrémum au milieu du nuage, exprimer E_{max} en fonction de h et H . On supposera $\rho_0 \simeq \rho_{\text{sol}}$.
- 7 - Lorsque le champ électrique atteint localement la valeur $E_{\text{dis}} = 10 \text{ kV} \cdot \text{cm}^{-1}$, appelé champ disruptif, l'air est ionisé et un courant électrique devient possible. Comparer la valeur du champ disruptif à celle du champ électrique dans le nuage. Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

- 1 Modification de la répartition des charges dans un conducteur sous l'effet d'un champ extérieur : les charges \ominus

à la base du nuage repoussent les charges \ominus de l'air et du sol et attirent les charges \oplus .

2 Le « sol » est infini : les charges \ominus sont plus loin et non représentées.

3 L'énoncé est un peu vague (mal restitué par le candidat ?), mais laisse en gros entendre que le nuage est infini (ou éventuellement symétrie cylindrique ?). Il y a invariance par translation parallèle au sol, donc \vec{E} ne dépend que de z . De plus, tout plan passant par M et contenant l'axe z est plan de symétrie de la distribution de charges, donc plan de symétrie du champ. Le champ est inclus dans l'intersection de tous ces plans de symétrie : il est donc porté par \vec{u}_z .

4 On utilise le théorème de Gauss appliqué à une surface cylindrique de section S , située entre $z = 0$ et z quelconque, sachant que d'après l'énoncé (mesures en ballon sonde) $E(0) = 0$. Ainsi,

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = SE(z).$$

▷ pour $0 < z < h$: $Q_{\text{int}}(z) = \rho_{\text{sol}}Sz$ donc

$$E(z) = \frac{\rho_{\text{sol}}z}{\varepsilon_0}.$$

▷ pour $h < z < h_1$: $Q_{\text{int}}(z) = \rho_{\text{sol}}Sh$ donc

$$E(z) = \frac{\rho_{\text{sol}}h}{\varepsilon_0}.$$

▷ Exprimons la densité volumique de charge à l'intérieur du nuage : elle est de la forme $\rho(z) = Az + B$ avec $\rho(h_1) = -\rho_0$ et $\rho(h_2) = \rho_0$ d'où

$$\rho(z) = \frac{2\rho_0}{H}(z - 2h_0)$$

Ainsi,

$$Q_{\text{int}} = \rho_{\text{sol}}Sh + \int_{h_1}^z \frac{2\rho_0}{H}(z - 2h_0)Sdz = \rho_{\text{sol}}Sh + \frac{2\rho_0 S}{H} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h_1^2}{2} - 2h_0(z - h_1) \right).$$

et donc

$$E(z) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H} (z^2 - 2h_0z) + \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\rho_{\text{sol}}h - \frac{2\rho_0}{H} \left(\frac{h_1^2}{2} - 2h_0h_1 \right) \right]$$

▷ pour $z > h_2$: on remplace z par h_2 dans l'expression précédente.

5 Voir figure 1.

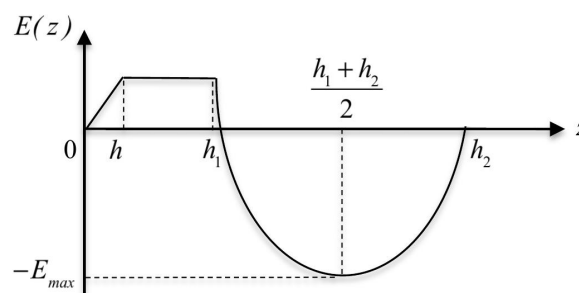


Figure 1 – Évolution du champ électrique dans le nuage.

6 Au milieu du nuage $z = h_0$. Un calcul un peu long et moche (à mon avis abusif pour un exo d'oral banque PT) conduit à un résultat nettement moins moche,

$$E_{\text{max}} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{H}{4} - h \right)$$

7 Le champ au centre du nuage est donné, et il est inférieur au champ disruptif. Ce donc n'est pas comme ça qu'apparaît la foudre. Le champ disruptif est en fait atteint au niveau d'une pointe, comme un arbre, un clocher ou un paratonnerre : c'est là que le champ disruptif est atteint, et l'éclair permet de vider le nuage des charges accumulées.

Électrostatique et oxydoréduction

Exercice 1 : Champ électrostatique créé par une boule creuse

[oral banque PT]

Une boule de centre O et de rayon R contient des charges dont la densité volumique ρ est homogène.

- 1 - Déterminer la direction du champ \vec{E} et la variable dont dépend la norme de \vec{E} .
 - 2 - Calculer en tout point de l'espace le champ $\vec{E}(M)$. Représenter la norme de \vec{E} en fonction de la variable d'espace.
 - 3 - En déduire le potentiel $V(M)$ en tout point de l'espace. Tracer la courbe représentant $V(M)$ en fonction de la variable d'espace.
- À l'intérieur de la boule se trouve une cavité sphérique creuse de rayon $R' < R$.
- 4 - Supposons les deux sphères concentriques. Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace sans avoir recours au théorème de Gauss.
 - 5 - On suppose maintenant que le centre des deux sphères est distant de $OO' = a < R'$. Déterminer le champ électrique et le potentiel dans la cavité.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r.$

2 Utilisation du théorème de Gauss.

$$\begin{cases} \vec{E}(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r & \text{pour } r > R \\ \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{e}_r & \text{pour } r \leq R \end{cases}$$

3 $E_r = -\frac{dV}{dr}$ qu'on intègre. Potentiel nul à l'infini, et continu en $r = R$.

$$\begin{cases} V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} & \text{pour } r > R \\ V(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) & \text{pour } r \leq R \end{cases}$$

4 Principe de superposition : on voit la cavité comme une boule de densité volumique de charge $-\rho$, et on somme les deux champs.

$$\begin{cases} \vec{E}(r) = \frac{\rho(R^3 - R'^3)}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r & \text{pour } r > R \\ \vec{E}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(r - \frac{R'^3}{r^2} \right) \vec{e}_r & \text{pour } R' < r \leq R \\ \vec{E}(r) = \vec{0} & \text{pour } r < R' \end{cases}$$

5 Là encore principe de superposition

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{e}_r - \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0} \vec{e}'_r$$

avec $r \vec{e}_r = \overrightarrow{OM}$ et $r' \vec{e}'_r = \overrightarrow{O'M}$, soit

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O'M}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overrightarrow{OO'}$$

Le champ est uniforme dans la cavité, d'autant plus grand que les centres sont éloignés.