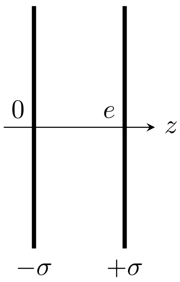
Électrostatique et thermochimie

Question de cours

Calculer le champ électrostatique créé par un plan chargé en surface avec une densité de charge uniforme σ_0.

Exercice 1 : Capteur capacitif [banque PT 2015]

Les capteurs capacitifs utilisent un condensateur comme composant principal. On rappelle qu'un condensateur est formé de deux armatures conductrices séparées par un isolant électrique. Ici, l'isolant est de l'air, dont les propriétés électriques sont supposées identiques à celles du vide.



On considère pour commencer un condensateur à lame d'air constitué de deux armatures planes métalliques de surface S, en regard l'une de l'autre, portant respectivement des densistés surfaciques uniformes de charge $\pm\sigma$. On suppose les dimensions des armatures beaucoup plus grandes que la distance e les séparant, ce qui permet d'utiliser le modèle du condensateur plan illimité.

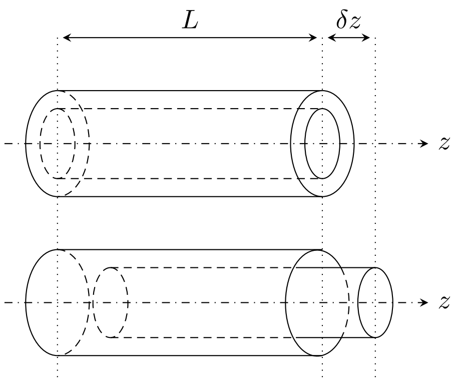
1 - Calculer le champ $\vec{E}(M)$ créé par l'une des armatures du condensateur dans tout l'espace.

2 - En déduire le champ $\vec{E}(M)$ créé par le condensateur.

3 - En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$ et l'expression de la capacité $C_{\mathrm{p},0}$ du condensateur plan. On impose $V = 0$ sur l'armature chargée négativement.

On envisage maintenant la situation où l'une des deux armatures reste fixe tandis que l'autre est susceptible de se déplacer en translation d'une quantité algébrique δz par rapport à sa position de référence $z = e$.

4 - Donner l'expression de la capacité $C_{\mathrm{p}}(\delta z)$ en fonction de $C_{\mathrm{p},0}$ et la simplifier dans l'hypothèse de petits déplacements $|\delta z| \ll e$.



On considère maintenant un condensateur formé de deux armatures cylindriques coaxiales, de longueur L et rayons respectifs $R_1 < R_2$ séparées par de l'air. L'armature interne porte une charge $-Q$ et l'externe une charge $+Q$, supposées uniformément réparties sur les surfaces. On suppose $L \gg R_2$, ce qui permet d'adopter un modèle illimité.

5 - Déterminer en justifiant qualitativement mais de manière précise la direction et le sens du champ électrostatique et les coordonnées dont dépend son module.

6 - Déterminer le champ en tout point de l'espace.

7 - En déduire le potentiel électrostatique puis la différence de potentiel entre les deux armatures du condensateur. On impose $V = 0$ sur l'armature intérieure.

8 - Déterminer la capacité $C_{\mathrm{c}0}$ du condensateur sous la forme $C_{\mathrm{c}0} = AL_{\mathrm{r}}$, où L_{r} est la longueur des portions de cylindre en regard (ici $L_{\mathrm{r}} = L$).

9 - L'armature intérieure est susceptible de se déplacer d'une distance algébrique δz par rapport à sa position de référence. Déterminer l'expression littérale $C_{\mathrm{c}}(\delta z)$ en fonction de $C_{\mathrm{c},0}$, L et δz. Tracer son allure.

10 - Dans la perspective de la mesure d'un déplacement δz, quelles sont les différences notables entre un condensateur plan et un condensateur cylindrique ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Non tapé

Électrostatique et thermochimie

Question de cours

Calculer le champ électrostatique créé par un cylindre infini chargé en volume avec une densité de charge uniforme ρ_0.

Exercice 1 : Écrantage de Debye

Les plasmas sont des milieux macroscopiquement neutres, partiellement ou totalement ionisés. Qu'ils soient naturels ou artificiels, on les rencontre dans des contextes très variés : arc électrique, atmosphère des étoiles, ionosphère, etc.

Considérons un plasma d'argon contenant (en moyenne) dans un volume mésoscopique $\mathrm{d}V$, $n_\mathrm{e}\,\mathrm{d}V$ électrons libres de masse m_e et de charge $-e$, $n_\mathrm{i}\,\mathrm{d}V = n_\mathrm{e}\,\mathrm{d}V$ ions Ar^+ de masse m_i et $n_0\,\mathrm{d}V$ atomes Ar de masse m_0. Le plasma est supposé en équilibre thermodynamique local et on note T sa température.

On considère un ion argon Ar^+ particulier, placé en O et pris comme origine. En raison de l'attraction coulombienne, on observe au voisinage de cet ion un surplus de charges négatives, responsable d'un écart local à la neutralité globale du plasma. En notant $V(r)$ le potentiel électrique total en un point M situé à distance $r = OM$ de l'ion Ar^+, les densités volumiques d'ions et d'électrons en M sont données par la loi de Boltzmann,

$$n_+(M) = n_\mathrm{i} \exp\left[-\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right] \qquad \text{et} \qquad n_-(M) = n_\mathrm{e} \exp\left[+\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right].$$

On suppose la température et le potentiel électrique tels que $eV(r) \ll k_\mathrm{B}T$

Donnée : pour une fonction $f(r)$ en coordonnées sphériques, $\Delta f = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rf)$.

1 - Montrer que V est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[rV(r)\right] = \frac{n_\mathrm{e} e r}{\varepsilon_0}\left(\exp\left[+\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right] - \exp\left[-\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right]\right)$$

La simplifier compte tenu de l'hypothèse faite sur la température du plasma.

2 - En déduire une équation différentielle portant sur la fonction auxiliaire $u(r) = rV(r)$. Résoudre cette équation en introduisant deux constantes A et B. Identifier une longueur caractéristique λ_D à expliciter en fonction de ε_0, $k_\mathrm{B}T$, n_e et e

3 - On admet que $V(\infty) = 0$ et qu'au voisinage immédiat de l'ion Ar^+ l'influence de sa charge, supposée ponctuelle, l'emporte sur celle des charges électroniques distribuées en volume. En déduire les deux constantes A et B.

4 - Déterminer l'expression du potentiel $V(r)$ en fonction de e, ε_0 et de λ_D. Commenter le résultat et interpréter le sens physique de λ_D, appelée longueur de Debye.

5 - Pour ce plasma d'argon, $n_\mathrm{e} = 3{,}0 \cdot 10^{21}\,\mathrm{m^{-3}}$. Calculer numériquement λ_D pour une température de $10^3\,\mathrm{K}$ et comparer cette valeur au rayon atomique de l'argon $a = 71\,\mathrm{pm}$.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Équation de Poisson : $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ avec

$$\rho(r) = en_\mathrm{i} \exp\left[-\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right] - en_\mathrm{e}\exp\left[\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right] \qquad \text{et} \qquad n_\mathrm{i} = n_\mathrm{e}\,.$$

Un développement limité au premier ordre donne $\mathrm{e}^x \simeq 1 + x$, donc

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[rV(r)\right] = \frac{2n_\mathrm{e} e r}{\varepsilon_0}\,\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}$$

$\boxed{2}$ Direct :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} - \frac{2n_\mathrm{e}e^2}{\varepsilon_0 k_\mathrm{B}T}u = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} - \frac{u}{\lambda_\mathrm{D}^2} = 0$$

qui se résout en
$$u(r) = A\,\mathrm{e}^{-r/\lambda_\mathrm{D}} + B\,\mathrm{e}^{r/\lambda_\mathrm{D}}$$
(solution qu'il est pas mal de connaître, ou qui se retrouve avec la méthode habituelle de l'équation caractéristique)

3 De la question précédente on déduit
$$V(r) = \frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{-r/\lambda_\mathrm{D}} + \frac{B}{r}\,\mathrm{e}^{r/\lambda_\mathrm{D}}$$
La première condition donne $B = 0$ (justification par croissance comparée). La deuxième est plus subtile. Elle se formule sur V (avec un équivalent), mais il est plus simple de le dire sur u, sachant que pour une charge ponctuelle
$$V_\mathrm{CP}(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{d'où} \qquad u_\mathrm{CP}(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}$$
donc
$$u(r) \underbrace{\simeq}_{\text{sol}} A \underbrace{=}_{\text{CL}} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}$$

4 $V(r) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\mathrm{e}^{-r/\lambda_\mathrm{D}}$. Il décroît plus vite que celui d'un ion ponctuel placé en $r = 0$, sur une distance caractéristique λ_D. Cela signifie que les charges situées à une distance $r \gg \lambda_\mathrm{D}$ ne perçoivent pas l'effet de l'ion situé en $r = 0$.

5 $\lambda_\mathrm{D} = 3 \cdot 10^{-8}$ m, ce qui ne correspond qu'à une quarantaine de rayons atomiques : l'écrantage est très performant.

Étienne Thibierge, 15 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

Colles semaine 9 – Sujet C D'Arsonval, PSI* 2017-2018

Électrostatique et thermochimie

Question de cours

Calculer le champ électrostatique créé par une boule chargée en volume avec une densité de charge uniforme ρ_0.

Exercice 1 : Cheminée au bioéthanol [oral CCP]

Les cheminées au bioéthanol constituent une alternative aux cheminées à bois traditionnelles. La combustion de l'éthanol C_2H_5OH dans l'air produit des flammes d'une trentaine de centimètres de haut.

1 - Ecrire l'équation de combustion de l'éthanol. Les produits sont formés à l'état gazeux.

2 - Définir et calculer l'enthalpie standard de cette réaction, $\Delta_\mathrm{r}H°$.

3 - Calculer la masse d'air nécessaire à la combustion de 1,5 L d'éthanol.

4 - Déterminer la température de flamme T_fl, c'est-à-dire la température atteinte par le milieu réactionnel en négligeant tout transfert thermique avec l'extérieur. La température initiale vaut $T_\mathrm{i} = 298\,\mathrm{K}$.

5 - En hiver, une pièce de $30\,\mathrm{m}^2$ doit être chauffée avec une puissance $P = 3\,\mathrm{kW}$. Quel volume V_0 de bioéthanol faudrait-il brûler par heure pour chauffer la pièce par ce seul moyen ? Commenter.

Données :

- masses molaires ($\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$) : H : 1,0 ; C : 12 ; N : 14 ; O : 16 ;
- masse volumique, enthalpie standard de formation et capacité thermique molaire standard à pression constante (à 298 K) :

	$C_2H_5OH_{(liq)}$	$H_2O_{(g)}$	$CO_{2(g)}$	$O_{2(g)}$	$N_{2(g)}$
ρ ($\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$)	789	0,60	1,80	1,31	1,25
$\Delta_\mathrm{f}H°$ ($\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$)	−277,0	−241,8	−393,5	0	0
C_P° ($\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$)	111	33,6	37,1	29,4	29,1

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 $C_2H_5OH_{(liq)} + 3\,O_{2(g)} = 2\,CO_{2(g)} + 3\,H_2O_{(g)}$

2 Loi de Hess

$$\Delta_\mathrm{r}H° = 2\,\Delta_\mathrm{f}H°(CO_{2(g)}) + 3\,\Delta_\mathrm{f}H°(H_2O_{(g)}) - 3\,\Delta_\mathrm{f}H°(O_{2(g)}) - \Delta_\mathrm{f}H°(C_2H_5OH_{(liq)}) = -1{,}24 \cdot 10^3\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}\,.$$

3 Quantité de matière contenue dans $V = 1{,}5\,\mathrm{L}$ d'éthanol :

$$n = \frac{V \times \rho}{M} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3} \times 789}{(24+6+16)10^{-3}} = 25{,}7\,\mathrm{mol}\,.$$

Quantité de matière minimale de dioxygène nécessaire : $3n$.

Masse d'air nécessaire :

$$m_\mathrm{air} = 3nM_{O_2} + 4 \times 3nM_{N_2} = 11{,}1\,\mathrm{kg}$$

4 On se place dans les conditions stœchiométriques et on raisonne en deux temps : d'abord la réaction à $T_\mathrm{i} = 298\,\mathrm{K}$ puis le chauffage des produits de T_i à T_fl sans oublier le diazote,

$$\Delta H = 0 = n\Delta_\mathrm{r}H° + \left[2nC_P^\circ(CO_2) + 3nC_P^\circ(H_2O) + 12nC_P^\circ(N_2)\right](T_\mathrm{fl} - T_\mathrm{i})$$

ce qui donne

$$T_\mathrm{fl} = T_\mathrm{i} - \frac{\Delta_\mathrm{r}H°}{2C_P^\circ(CO_2) + 3C_P^\circ(H_2O) + 12C_P^\circ(N_2)} = 2{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{K}$$

C'est énorme !

> *Attention au nombre « stœchiométrique » du diazote : comme celui de O_2 est 3, alors $3n$ moles de O_2 ont été consommées, et comme on a mis de l'air elles étaient accompagnées de $4 \times 3n = 12n$ moles de diazote.*

$\boxed{\mathbf{5}}$ Transfert thermique cédé à la pièce par la réaction : $Q = n\,\Delta_\mathrm{r}H°$, donc puissance de chauffage en ramenant à un intervalle de temps Δt :

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{n\,\Delta_\mathrm{r}H°}{\Delta t} = \frac{V\,\rho\,\Delta_\mathrm{r}H°}{M\,\Delta t}$$

Ainsi

$$V = \frac{P\,M\,\Delta t}{\rho\,\Delta_\mathrm{r}H°} = 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3 = 0{,}5\,\mathrm{L}$$

Cela semble donc assez efficace.

Électrostatique et thermochimie

Exercice 1 : Champ électrostatique créé par une boule creuse [oral banque PT]

Une boule de centre O et de rayon R contient des charges dont la densité volumique ρ est homogène.

1 - Déterminer la direction du champ $\vec{E}$ et la variable dont dépend la norme de $\vec{E}$.

2 - Calculer en tout point de l'espace le champ $\vec{E}(M)$. Représenter la norme de $\vec{E}$ en fonction de la variable d'espace.

3 - En déduire le potentiel $V(M)$ en tout point de l'espace. Tracer la courbe représentant $V(M)$ en fonction de la variable d'espace.

À l'intérieur de la boule se trouve une cavité sphérique creuse de rayon $R' < R$.

4 - Supposons les deux sphères concentriques. Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace sans avoir recours au théorème de Gauss.

5 - On suppose maintenant que le centre des deux sphères est distant de $OO' = a < R'$. Déterminer le champ électrique et le potentiel dans la cavité.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ $\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r$.

$\boxed{2}$ Utilisation du théorème de Gauss.

$$\begin{cases} \vec{E}(r) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r & \text{pour } r > R \\ \vec{E}(r) = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,\vec{e}_r & \text{pour } r \leq R \end{cases}$$

$\boxed{3}$ $E_r = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ qu'on intègre. Potentiel nul à l'infini, et continu en $r = R$.

$$\begin{cases} V(r) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} & \text{pour } r > R \\ V(r) = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \dfrac{r^2}{3}\right) & \text{pour } r \leq R \end{cases}$$

$\boxed{4}$ Principe de superposition : on voit la cavité comme une boule de densité volumique de charge $-\rho$, et on somme les deux champs.

$$\begin{cases} \vec{E}(r) = \dfrac{\rho(R^3 - R'^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r & \text{pour } r > R \\ \vec{E}(r) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \dfrac{R'^3}{r^2}\right)\vec{e}_r & \text{pour } R' < r \leq R \\ \vec{E}(r) = \vec{0} & \text{pour } r < R' \end{cases}$$

$\boxed{5}$ Là encore principe de superposition

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,\vec{e}_r - \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}\,\vec{e}_r\,'$$

avec $r\,\vec{e}_r = \overrightarrow{OM}$ et $r'\,\vec{e}_r\,' = \overrightarrow{O'M}$, soit

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O'M}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OO'}$$

Le champ est uniforme dans la cavité, d'autant plus grand que les centres sont éloignés.

Étienne Thibierge, 15 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr