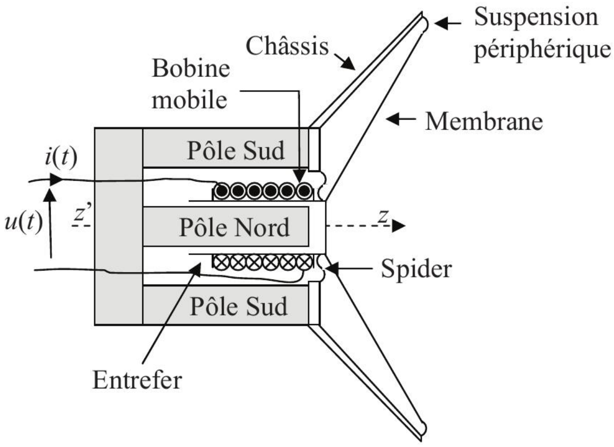
Induction

Question de cours

Établir les conditions (en termes de potentiel chimique) d'équilibre et d'évolution d'un corps pur lors d'un changement d'état.

Exercice 1 : Haut-parleur en régime sinusoïdal forcé [CCP PC 2016]

Un haut-parleur électrodynamique, schématisé figure 1, est constitué d'un châssis sur lequel est fixé le circuit magnétique. Sur cet ensemble rigide est fixé l'élément actif du haut-parleur : l'équipage mobile formé de la membrane et de la bobine mobile. La liaison avec le châssis est assurée, près du centre par le spider, pièce de toile rigidifiée par du plastique et qui joue le rôle d'un ressort et sur le pourtour par une suspension périphérique. L'ensemble de la suspension assure le rappel vers la position d'équilibre et le guidage en translation parallèlement à l'axe $z'z$. Le circuit magnétique, constitué d'aimants permanents, génère un champ magnétique $\vec{B}$ radial et uniforme ($B = 1{,}05\,\mathrm{T}$) dans l'entrefer. La longueur totale du bobinage de la bobine mobile vaut $\ell = 3{,}81\,\mathrm{m}$. La masse de l'équipage mobile vaut $m = 4{,}0\,\mathrm{g}$. On prend comme origine des z la position d'équilibre du centre d'inertie de l'équipage mobile (bobine + membrane). La tension appliquée u est supposée sinusoïdale, de fréquence f.



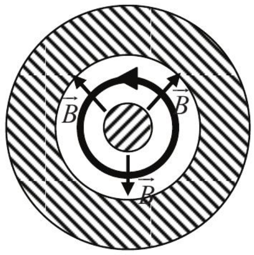


Figure 1 – Schéma de principe d'un haut-parleur électrodynamique.

L'équation électrique du système s'écrit

$$u(t) - R\,i(t) - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + e(t) = 0 \qquad \text{avec} \qquad e(t) = v_z(t)\,B\,\ell$$

et son équation mécanique est

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -i(t)\,\ell\,B - k\,z(t) - \lambda\,v_z(t)\,.$$

1 - Indiquer l'origine physique de chaque terme des deux équations électrique et mécanique. Les écrire dans le formalisme complexe.

2 - En déduire l'expression de l'impédance du haut-parleur $\underline{Z}(\omega) = \underline{u}(t)/\underline{i}(t)$.

Cette impédance $\underline{Z}(\omega)$ s'interprète comme la mise en série de deux impédances : l'impédance propre $\underline{Z_\mathrm{e}}(\omega)$, qui ne contient que des termes relatifs au circuit électrique, et l'impédance motionnelle $\underline{Z_\mathrm{m}}(\omega)$, qui ne dépend que des caractéristiques mécaniques du système.

3 - Préciser les expressions de $\underline{Z_\mathrm{e}}(\omega)$ et $\underline{Z_\mathrm{m}}(\omega)$.

4 - Montrer que l'admittance motionnelle $\underline{Y_\mathrm{m}} = 1/\underline{Z_\mathrm{m}}$ peut s'écrire sous la forme

$$\underline{Y_\mathrm{m}} = \mathrm{j}C_\mathrm{m}\omega + \frac{1}{\mathrm{j}L_\mathrm{m}\omega} + \frac{1}{R_\mathrm{m}}\,,$$

Étienne Thibierge, 15 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

en précisant les expressions de C_m, L_m et R_m.

5 - Proposer un schéma électrique équivalent de l'impédance $\underline{Z}(\omega)$ du haut-parleur dans lequel apparaissent R, L, C_m, L_m et R_m.

6 - On peut également décomposer l'impédance du haut-parleur en partie réelle et imaginaire,

$$\underline{Z} = R_T + \mathrm{j}X_T\,.$$

Montrer que

$$R_T = R + \frac{R_\mathrm{m}}{1 + R_\mathrm{m}^2\left(C_\mathrm{m}\omega - \dfrac{1}{L_\mathrm{m}\omega}\right)^2}\,.$$

7 - Exprimer la fréquence de résonance du haut parleur, pour laquelle R_T est maximale.

8 - En utilisant la courbe $R_T = f(\omega)$ de la figure 2, déterminer la valeur numérique de la résistance R et de la fréquence de résonance.

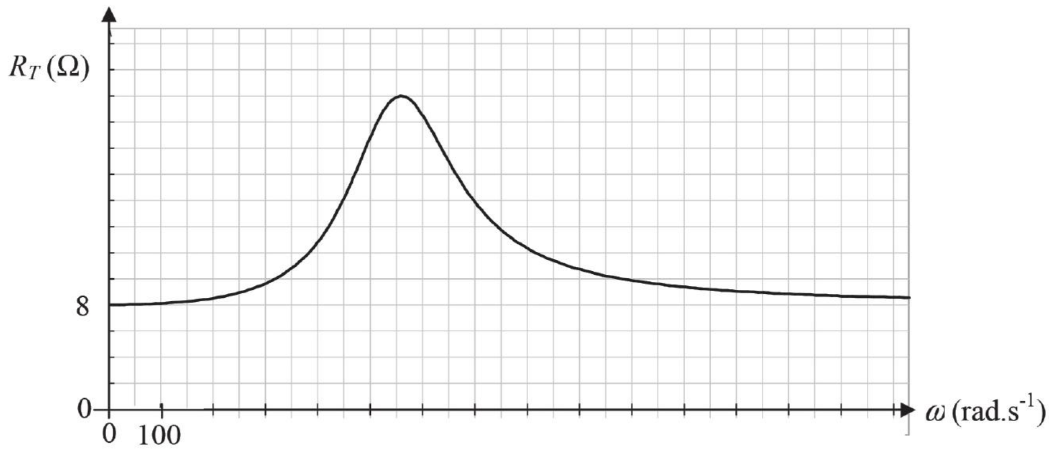


Figure 2 – Courbe représentant la résistance en fonction de la pulsation.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Partie A2 du sujet original.

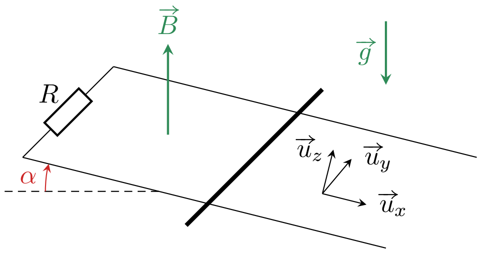
Corrigé proposé par Éric Ouvrard (PC Lorient) : `http://cpgedupuydelome.fr/IMG/pdf/d8-c-prive.pdf`

Induction

Question de cours

Énoncer et nommer les équations de Maxwell. Retrouver le théorème de Gauss.

Exercice 1 : Rails de Laplace inclinés [d'après oral CCP]



Un barreau métallique de masse m glisse sans frottement mécanique sur deux rails conducteurs, séparés d'une distance a et inclinés d'un angle α par rapport à l'horizontale. Les rails sont fermés sur une résistance R, et un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, dirigé selon la verticale ascendante, règne entre eux. On repère par $x(t)$ la position du barreau le long des rails.

1 - En appliquant la loi de Lenz, donner le sens du courant i qui circule dans le circuit. La force de Laplace accélère-t-elle ou freine-t-elle la chute du barreau ? Le barreau peut-il s'immobiliser ?

2 - Exprimer la force de Laplace $\vec{F}_\mathrm{L}$ qui s'exerce sur le barreau mobile en fonction de i, a, B et α.

3 - En exploitant la conservation de la puissance, obtenir une relation entre i, R, a, B, α et la vitesse v du barreau.

4 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par v et la résoudre, sachant que le barreau est lâché en $x = 0$ sans vitesse initiale. Justifier que le mouvement présente un régime transitoire de durée caractéristique τ à déterminer.

5 - En déduire $x(t)$.

6 - Les rails ont une longueur totale L. Déterminer l'énergie électrique totale transmise à la résistance R lors du mouvement du barreau sur les rails, en supposant le temps de chute très grand devant τ. Interpréter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ La cause du phénomène d'induction est la glissade du barreau sur les rails, dans la direction $+\vec{u}_x$. Le courant induit qui circule dans le circuit génère une force de Laplace induite, dont la loi de Lenz indique qu'elle s'oppose au mouvement : **elle freine le barreau**, donc est dirigée selon $-\vec{u}_x$. On en déduit que le sens réel du courant lorsqu'il traverse le barreau mobile est selon $-\vec{u}_y$, comme indiqué figure 1. Le barreau ne peut cependant pas s'arrêter : s'il venait à s'arrêter, alors il n'y aurait plus de variations de flux donc plus d'induction ... et plus de force de Laplace induite pour le retenir, si bien que son poids l'entraînerait à nouveau.

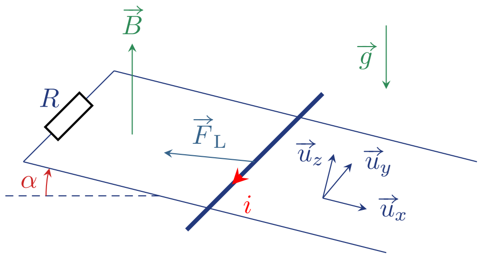


Figure 1 – Rails de Laplace inclinés.

$\boxed{2}$ On choisit le sens positif de i comme étant celui déterminé à la question précédente. La force de Laplace subie par le barreau vaut donc

$$\vec{F}_\mathrm{L} = i(-a\vec{u}_y) \wedge \vec{B} \qquad \text{avec} \qquad \vec{B} = B(-\sin\alpha\,\vec{u}_x + \cos\alpha\,\vec{u}_z)$$

ce qui conduit donc à

$$\vec{F}_\mathrm{L} = iaB\,(\sin\alpha\,\vec{u}_y \wedge \vec{u}_x - \cos\alpha\,\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{F}_\mathrm{L} = -iaB\,(\cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_z)\,.}$$

$\boxed{3}$ La puissance fournie par la force de Laplace vaut

$$\mathcal{P}_\mathrm{Lapl} = \vec{F}_\mathrm{L} \cdot (v\,\vec{u}_x) = -iaB\,v\cos\alpha\,.$$

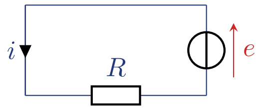


Figure 2 – Circuit électrique équivalent aux rails de Laplace inclinés.

Le circuit électrique équivalent, figure 2, ne compte que le générateur induit et la résistance. Ainsi, $e = Ri$.

Enfin, on utilise la conservation de la puissance,

$$\mathcal{P}_{\text{Lapl}} + ei = 0 \qquad \text{d'où} \qquad -\, iaB\, v \cos\alpha + Ri^2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{Ri = aB\, v\cos\alpha\,.}$$

$\boxed{4}$ ▷ Système : barreau mobile ;

▷ Référentiel : terrestre, supposé galiléen ;

▷ Bilan des forces :
- → poids du barreau : $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin\alpha\,\vec{u}_x - \cos\alpha\,\vec{u}_z)$;
- → force de Laplace : $\vec{F}_{\text{L}} = -iaB\,(\cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_z)$;
- → réaction des rails, normale aux rails car sans frottement : $\vec{R} = R\vec{u}_z$.

▷ Loi de la quantité de mouvement :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{L}} + \vec{R}$$

soit en projection sur $\vec{u}_x$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg\sin\alpha - iaB\cos\alpha\,.$$

En utilisant la question précédente pour remplacer i (découpler les équations électrique et magnétique), on aboutit à

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg\sin\alpha - \frac{(aB\cos\alpha)^2}{R}v$$

et finalement

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{(aB\cos\alpha)^2}{mR}v = g\sin\alpha\,.}$$

Cette équation différentielle se met sous forme canonique,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}v = g\sin\alpha \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{mR}{(aB\cos\alpha)^2}\,.$$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre, et on sait que τ est la durée du régime transitoire.

▷ Résolution de l'équation différentielle :
- → Forme générale des solutions :
  - ∗ solution particulière : comme le second membre est constant, la solution particulière est constante, et on trouve
$$0 + \frac{1}{\tau}v_{\text{p}} = g\sin\alpha \qquad \text{d'où} \qquad v_{\text{p}} = g\tau\sin\alpha = \frac{Rmg\sin\alpha}{(aB\cos\alpha)^2}\,.$$
  - ∗ solution générale de l'équation homogène : $v_{\text{h}} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.
  - ∗ bilan : $v(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + g\tau\sin\alpha$.
- → Détermination de la constante à partir de la condition initiale :
$$v(0) \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} A + g\tau\sin\alpha \qquad \text{d'où} \qquad A = -g\tau\sin\alpha\,.$$
- → Conclusion :
$$\boxed{v(t) = \frac{Rmg\sin\alpha}{(aB\cos\alpha)^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

$\boxed{5}$ La loi horaire $x(t)$ se déduit par intégration :

$$x(t) = \frac{Rmg\sin\alpha}{(aB\cos\alpha)^2}\left(t + \tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + B\right)\,.$$

La constante B se déduit de la condition initiale,

$$x(0) \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} \frac{R\,mg\sin\alpha}{(aB\cos\alpha)^2}\,(0+\tau+B) \qquad \text{d'où} \qquad B = -\tau\,.$$

Finalement,

$$\boxed{x(t) = \frac{R\,mg\sin\alpha}{(aB\cos\alpha)^2}\left[t+\tau\left(\mathrm{e}^{-t/\tau}-1\right)\right]\,.}$$

6 Par conservation de la puissance, l'énergie fournie à la résistance R pendant la durée de chute est égale à l'opposé du travail de la force de Laplace. En supposant le temps de chute très grand devant τ, on peut considérer qu'à tout instant $v \simeq v_\mathrm{p}$. La force de Laplace est donc une force constante. Son travail vaut alors

$$W_\mathrm{L} = \int \vec{F}_\mathrm{L}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M} = (\vec{F}_\mathrm{L}\cdot\vec{u}_x)\int_0^L \mathrm{d}x = -\frac{(aB\cos\alpha)^2}{R}vL$$

et ainsi

$$W_\mathrm{L} = -\frac{(aB\cos\alpha)^2}{R}\,\frac{R\,mg\sin\alpha}{(aB\cos\alpha)^2}L = -mg\sin\alpha L\,.$$

On en déduit l'énergie Q_R fournie à la résistance, égale à l'énergie fournie par le générateur induit,

$$W_\mathrm{L} + Q_R = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{Q_R = mg\sin\alpha L\,.}$$

Induction

Question de cours

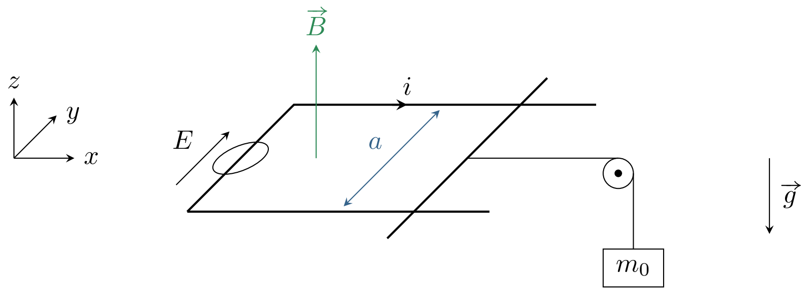
L'équation de Poynting s'écrit

$$\frac{\partial e_{\text{em}}}{\partial t} + \operatorname{div} \overrightarrow{\Pi} = -\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} \,.$$

Nommer et donner l'expression de e_{em} et $\overrightarrow{\Pi}$. Que traduit physiquement cette équation ? Indiquer ce que représentent chacun des termes.

Exercice 1 : Treuil électromécanique

On modélise un treuil par un moteur linéaire, analogue à un dispositif de rails de Laplace séparés d'une distance a plongés dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ et alimentés par un générateur de tension continue E. La tige mobile est reliée à la masse m_0 à soulever par l'intermédiaire d'un câble inextensible et d'une poulie dont on néglige les frottements d'axe. On note R la résistance électrique du circuit, supposée indépendante de la position de la tige mobile. Ce circuit est orienté dans le sens indiqué sur la figure.



1 - Quel doit être le signe du courant i imposé par le générateur pour que le système puisse fonctionner en treuil, c'est-à-dire puisse soulever la masse ? Déterminer la valeur minimale de E permettant d'atteindre ce fonctionnement.

2 - Établir l'expression de la force de tension du câble en fonction de l'accélération $\ddot{z}$ de la masse. Quelle hypothèse peut-on proposer pour simplifier l'expression obtenue ? On se place dans cette hypothèse par la suite.

3 - Établir les équations électrique et mécanique du système.

4 - En déduire l'expression de la vitesse $v_z(t)$ de la masse m_0 en supposant qu'elle est initialement immobile. Déterminer la valeur limite de la vitesse de levage, notée V_0.

5 - Établir et interpréter le bilan de puissance du système en régime permanent à vitesse V_0.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Pour que la masse soit soulevée, il faut que la force de Laplace subie par la tige soit dirigée selon $-\overrightarrow{e}_x$, ce qui impose $i > 0$. La valeur minimale de E correspond au cas où la norme de la force de Laplace est égale au poids de m_0, c'est-à-dire

$$m_0 g = i_{\min} a B = \frac{E_{\min}}{R} a B \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E_{\min} = \frac{R\, m_0\, g}{a\, B}}$$

$\boxed{2}$ Loi de la quantité de mouvement appliquée à la masse m_0 :

$$m_0 \overrightarrow{a} = m_0 \overrightarrow{g} + \overrightarrow{T} \qquad \text{soit} \qquad \overrightarrow{T} = m_0 \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{g} \right) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{T_z = m_0 (\ddot{z} + g)}$$

Hypothèse : faible accélération, $\ddot{z} \ll g$ (g est l'accélération d'une chute libre, c'est donc une forte accélération), donc quel que soit le mouvement de la masse la norme de la tension du câble est égale à $m_0 g$.

$\boxed{3}$ Équation mécanique : loi de la quantité de mouvement appliquée à la tige (masse m),

$$\boxed{m \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -iaB + m_0 g \,.}$$

Équation électrique : on raisonne sur le circuit équivalent, qui contient une fém e liée à l'induction. $S = ax$ donc $\phi = S\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n} = -SB$, donc

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = av_xB\,.$$

Par la loi des mailles,

$$\boxed{E + av_xB = Ri}$$

$\boxed{4}$ Commençons par le vitesse v_x de la tige mobile :

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -aB\left(\frac{E + av_xB}{R}\right) + m_0g \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \frac{(aB)^2}{Rm}v_x = -\frac{aBE}{Rm} + \frac{m_0}{m}g$$

On pose $\tau = Rm/(aB)^2$, et on en déduit

$$v_x(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{m_0gR}{(aB)^2} - \frac{E}{aB}\,.$$

Vue la géométrie, la vitesse de la masse v_z est de même norme mais de signe opposé par rapport à v_x, donc

$$v_z(t) = -A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - \frac{m_0gR}{(aB)^2} + \frac{E}{aB}$$

En régime asymptotique on identifie la vitesse limite de levage,

$$\boxed{V_0 = -\frac{m_0gR}{(aB)^2} + \frac{E}{aB}\,.}$$

et on écrit la solution sous la forme

$$\boxed{v_z(t) = V_0\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

$\boxed{5}$ En régime permanent à vitesse de la masse V_0 (et donc courant dans le circuit I_0 mais vitesse $v_x = -V_0$), les équations électrique et mécanique deviennent respectivement

$$E = +aV_0B + RI_0 \qquad \text{et} \qquad 0 = -I_0aB + m_0g$$

En multipliant comme d'habitude par I_0 et V_0,

$$EI_0 = +aI_0V_0B + RI_0^2 \qquad \text{et} \qquad 0 = -I_0aBV_0 + m_0gV_0$$

et en sommant ces deux équations

$$\boxed{E\,I_0 = RI_0^2 + m_0gV_0\,.}$$

Interprétation :
- ▷ EI_0 : puissance fournie par le générateur ;
- ▷ RI_0^2 : puissance dissipée par effet Joule ;
- ▷ m_0gV_0 : variation d'énergie potentielle de la masse m_0.