

# Ferromagnétisme et transformateur

## Question de cours

Établir l'expression de l'inductance propre de la bobine à noyau de fer doux modélisé linéairement.

### Éléments de correction de l'exercice 0 :

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{\ell}$$

## Exercice 1 : Solénoïdes imbriqués

[oral CCP]

Deux solénoïdes  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  de même axe ( $Oz$ ), de même longueur  $\ell$  et de rayons  $r_1$  et  $r_2 > r_1$  sont emboîtés l'un dans l'autre, voir figure ???. Ils présentent tous deux le même nombre de spires  $N$ . On suppose que la longueur  $\ell$  est très supérieure aux rayons.

La bobine intérieure est parcourue par un courant  $i_1(t) = I \cos(\omega t)$ , avec  $I = 1$  A. La bobine extérieure est en court-circuit.

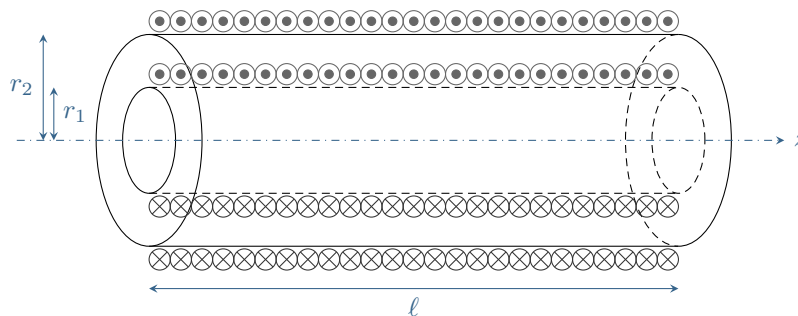


Figure 1 – Solénoïdes imbriqués.

- Déterminer les coefficients d'induction propre  $L_1$ ,  $L_2$ , et le coefficient d'induction mutuelle  $M$ .
- En négligeant les résistances internes des fils, déterminer le courant  $i_2(t)$  parcourant la bobine extérieure. Quelle est son amplitude ?
- Que vaut le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde central ?

### Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 Par hypothèse,  $\ell \gg r_1$  et  $r_2$ , ce qui justifie d'approximer les solénoïdes comme infinis. En notant  $i_1$  et  $i_2$  les courants qui y circulent et compte tenu de l'orientation des spires, le champ qu'ils créent en leur intérieur vaut

$$\vec{B}_{1,2} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i_{1,2} \vec{e}_z.$$

#### Inductance propre $L_1$ :

▷ Flux créé par  $\mathcal{S}_1$  au travers d'une spire  $s_1$  de  $\mathcal{S}_1$  :

$$\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_1(M) \cdot dS \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_1$$

▷ Flux total créé par  $\mathcal{S}_1$  au travers de lui-même :

$$\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = N \phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i_1.$$

▷ Inductance propre : par définition,  $\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = L_1 i_1$  donc

$$L_1 = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

**Inductance propre  $L_2$**  : par la même démarche,

$$L_2 = \pi r_2^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

**Inductance mutuelle  $M$**  : comme le champ créé par  $S_2$  est uniforme à l'intérieur de  $S_1$  alors que la réciproque n'est pas vraie, il est plus simple de calculer  $M$  à partir du flux créé par  $S_2$  au travers de  $S_1$ .

▷ Flux créé par  $S_2$  au travers d'une spire  $s_1$  de  $S_1$  :

$$\phi_{S_2 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_2(M) \cdot dS \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_2$$

▷ Flux total créé par  $S_2$  au travers de  $S_1$  :

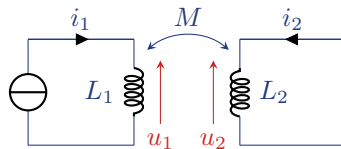
$$\phi_{S_2 \rightarrow S_1} = N \phi_{S_2 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{S_2 \rightarrow S_1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i_2.$$

▷ Inductance mutuelle : par définition,  $\phi_{S_2 \rightarrow S_1} = M i_2$  donc

$$M = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

**2** Le circuit équivalent est tracé figure ???. Le circuit 1 contient une bobine et un générateur de courant imposant le courant  $i_1$ , le circuit 2 ne contient qu'une bobine court-circuitée. Il y a un couplage inductif entre les deux circuits. Compte tenu de la convention récepteur,

$$u_1 = +L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = +L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$



**Figure 2 – Circuit électrique équivalent.**

D'après la loi des mailles,  $u_2 = 0$  donc

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L} \frac{di_1}{dt}$$

et par intégration

$$i_2 = -\frac{M}{L} i_1 + \text{cte.}$$

Comme le solénoïde  $S_2$  n'est pas relié à un générateur, on peut supposer qu'il n'y a pas de courant continu qui serait physiquement impossible à cause des résistances des fils, même si elles sont faibles. Finalement,

$$i_2(t) = -\frac{M}{L} I \cos(\omega t),$$

d'amplitude

$$I_2 = \frac{M}{L} I.$$

**3** D'après le principe de superposition, en un point  $M$  se trouvant à l'intérieur des deux solénoïdes,

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} (i_1 + i_2) \vec{e}_z$$

d'où en remplaçant

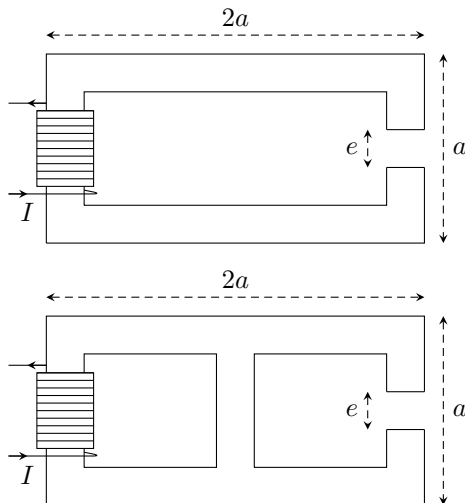
$$\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} \left(1 - \frac{M}{L}\right) I \cos(\omega t) \vec{e}_z.$$

# Ferromagnétisme et transformateur

## Question de cours

Représenter l'allure des cycles d'hystérésis  $(H, M)$  et  $(H, B)$  d'un milieu ferromagnétique. Distinguer milieu dur et milieu doux. Définir le champ rémanent, l'aimantation rémanante, et l'excitation coercitive.

## Exercice 1 : Circuit magnétique à deux mailles



Considérons le circuit magnétique ci-contre fait d'un matériau de perméabilité relative  $\mu_r$  et alimenté par un enroulement de  $N$  spires parcourues par un courant  $I$ . La section  $S$  du circuit est constante. L'air est assimilé au vide.

1 - Exprimer le champ magnétique  $B_{\text{air}}$  dans l'entrefer. Simplifier l'expression obtenue dans la limite  $\mu_r \gg 1$ .

On considère désormais l'ajout d'une barre à la carcasse magnétique, comme représenté sur le second schéma : le circuit magnétique compte « deux mailles ».

2 - Déterminer la nouvelle expression du champ magnétique dans l'entrefer.

3 - Simplifier cette expression dans la limite d'une perméabilité  $\mu_r \gg 1$ , et la comparer au circuit magnétique simple.

4 - En déduire l'utilité du dispositif.

## Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 Théorème d'Ampère :  $(6a - e)H_m + eH_{\text{air}} = NI$  soit

$$(6a - e) \frac{B_m}{\mu_0 \mu_r} + e \frac{B_{\text{air}}}{\mu_0} = \mu_0 NI$$

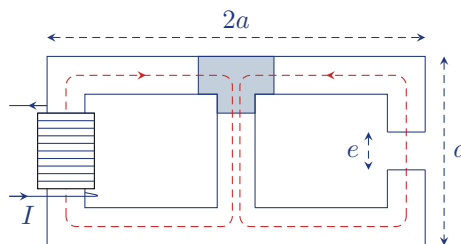
et d'après la conservation du flux  $B_m S = B_{\text{air}} S$  d'où

$$\left( \frac{6a - e}{\mu_r} + e \right) B_{\text{air}} = \mu_0 NI$$

ce qui donne en simplifiant

$$B_{\text{air}} = \frac{\mu_0 NI}{e}.$$

2 On numérote les branches 1 à 3 de gauche à droite pour noter les champs et on indice « a » les champs dans l'air.



On a les quatre équations électromagnétiques :

- ▷ (1) Th d'Ampère dans la maille de gauche (branches 1 et 2, orientation cf. figure) :  $3aH_1 + aH_2 = NI$ .
- ▷ (2) Th d'Ampère dans la maille de droite (branches 2 et 3, orientation cf. figure) :  $(3a - e)H_3 + aH_2 + eH_{\text{air}} = 0$ .
- ▷ (3) Conservation du flux au travers de la surface bleue et division par  $S$  :  $B_1 + B_3 = B_2$  soit avec les excitations magnétiques  $H_1 + H_3 = H_2$ .
- ▷ (4) Conservation du flux au niveau de l'entrefer et division par  $S$  :  $B_3 = B_{\text{air}}$  soit avec les excitations  $\mu_r H_3 = H_{\text{air}}$ .

Il faut maintenant touiller pour faire sortir  $H_{\text{air}}$ .

D'après l'équation (3) et l'équation (4) :

$$H_{\text{air}} = \mu_r H_2 - \mu_r H_1$$

Or d'après l'équation (1)

$$H_1 = \frac{NI}{3a} - \frac{H_2}{3}$$

d'où

$$H_{\text{air}} = \frac{4}{3}\mu_r H_2 - \mu_r \frac{NI}{3a}$$

Enfin d'après l'équation (2)

$$H_2 = -\frac{3a-e}{a}H_3 - \frac{e}{a}H_{\text{air}} = -\left(\frac{3a-e}{a\mu_r} + \frac{e}{a}\right)H_{\text{air}}$$

Pour terminer

$$\begin{aligned} H_{\text{air}} &= -\frac{4}{3}\mu_r \left(\frac{3a-e}{a\mu_r} + \frac{e}{a}\right)H_{\text{air}} - \frac{\mu_r NI}{3a} \\ \left(1 + \frac{12a-4e}{3a} + \frac{4\mu_r e}{3a}\right)H_{\text{air}} &= -\frac{\mu_r NI}{3a} \\ \frac{3a+12a-4e+4\mu_r e}{3a}H_{\text{air}} &= -\frac{\mu_r NI}{3a} \\ (15a-4e+4\mu_r e)H_{\text{air}} &= -\mu_r NI \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$B_{\text{air}} = -\frac{\mu_0 \mu_r NI}{15a-4e+4\mu_r e}$$

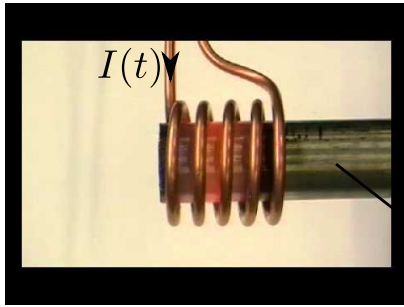
- 3** Idem pour un entrefer mais avec largeur  $4e$ .
- 4** Simuler des entrefers plus grands, mais sans problème de fuite magnétique.

# Ferromagnétisme et transformateur

## Question de cours

Définir l'excitation magnétique  $\vec{H}$  et écrire l'équation de Maxwell-Ampère dans un milieu magnétique. Quelles sont les sources du champ  $\vec{H}$ ? du champ  $\vec{B}$ ?

## Exercice 1 : Soudure par induction



Un dispositif de soudure utilise le phénomène d'induction pour chauffer et faire fondre le métal à souder. Pour cela, une bobine est parcourue par un courant alternatif  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$  de forte intensité et à haute fréquence. Au centre de cette bobine est placé un cylindre, qui est le métal à chauffer.

On note  $a$  le rayon du cylindre à chauffer. On suppose que la loi d'Ohm locale s'applique dans ce matériau (conductivité électrique notée  $\gamma$ ). Pour simplifier, on néglige les effets de bords de la bobine que l'on assimile donc à un solénoïde infini.

1 - Faire un schéma du dispositif s'inspirant de la photographie et rappeler sans démonstration l'expression du champ créé par la bobine.

2 - Expliquer rapidement pourquoi le métal placé au centre chauffe.

3 - Justifier que le champ électrique induit dans le métal est de la forme  $\vec{E} = E_\theta(r) \vec{e}_\theta$ .

4 - Exprimer le champ électrique induit en fonction de  $\mu_0$ ,  $n$ ,  $r$ , et  $\frac{dI}{dt}$ .

5 - En déduire l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule dans le matériau.

Donnée :  $\text{rot } \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$

## Éléments de correction de l'exercice 1 :

Voir par exemple : <https://www.youtube.com/watch?v=PC79B2Vo2XE>.

1  $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$  avec l'axe  $z$  orienté par rapport au courant  $I$

2 Le champ  $\vec{B}$  varie dans le temps, donc le flux de  $\vec{B}$  à travers le métal varie également. Il y a donc induction et apparition de courants induits (les courants de Foucault) qui vont chauffer le matériau par effet Joule.

3 Analyse des invariances montre que  $E$  ne dépend que de  $r$ . Plus difficile pour la direction ! Ici la source première du champ électrique est le courant  $I$  dans la bobine. Or tout plan contenant l'axe  $Oz$  est plan d'anti-symétrie de la distribution de  $I$  dans la bobine : on en déduit que  $E$  est perpendiculaire à ce plan, donc porté par  $\vec{e}_\theta$ .

4 Équation de Maxwell-Faraday :  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 n \dot{I} \vec{e}_z$ .

Et on a également  $\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z$ , d'où  $\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} = -\mu_0 n \dot{I} r$ .

On intègre par rapport à  $r$  :  $rE_\theta = -\mu_0 n \dot{I} \frac{r^2}{2} + A$ , avec  $A$  une constante que l'on détermine en prenant  $r = 0$  : il ne reste alors que  $A = 0$ .

On a donc  $E_\theta(r) = -\mu_0 n \dot{I} \frac{r}{2}$ .

5 On en déduit le courant :  $\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \mu_0 n \dot{I} \frac{r}{2} \vec{e}_\theta$ .

Et la puissance volumique dissipée par effet Joule :  $\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma ||\vec{E}||^2$ , soit  $\mathcal{P} = \frac{1}{4} \gamma \mu_0^2 n^2 \dot{I}^2 r^2$ .