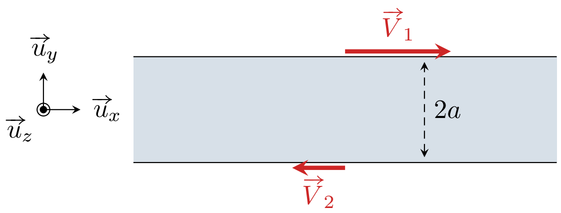
Hacheurs et statique des fluides

Exercice 1 : Écoulement de Couette plan



Considérons un fluide confiné entre deux plaques planes infinies situées en $y = \pm a$. La plaque supérieure est tirée à vitesse constante $\vec{V}_1$ dans le sens de $\vec{u}_x$, la plaque inférieure à vitesse constante $\vec{V}_2$ dans le sens opposé.

Le champ de vitesse de l'écoulement est donné par

$$\vec{v} = \left(\frac{V_1 + V_2}{2a} y + \frac{V_1 - V_2}{2}\right) \vec{u}_x \,.$$

1 - Représenter l'allure du champ de vitesse. Indiquer les lignes de courant.

2 - Le fluide considéré est-il un fluide parfait ou visqueux ?

3 - L'écoulement est-il compressible ?

4 - Calculer la vorticité $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v}$ de l'écoulement. Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Lignes de courant : droites selon $\vec{u}_x$. Champ de vitesse dessiné sur la figure 1.

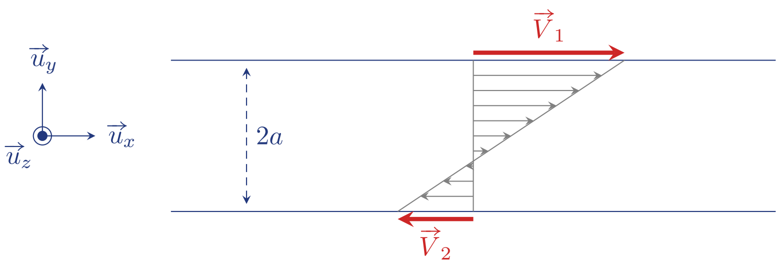


Figure 1 – Champ des vitesses de l'écoulement de Couette plan.

$\boxed{2}$ Visqueux car vitesse du fluide égale à la vitesse de la paroi en $x = \pm a$.

$\boxed{3}$ Calcul :)

$$\mathrm{div}\, \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0$$

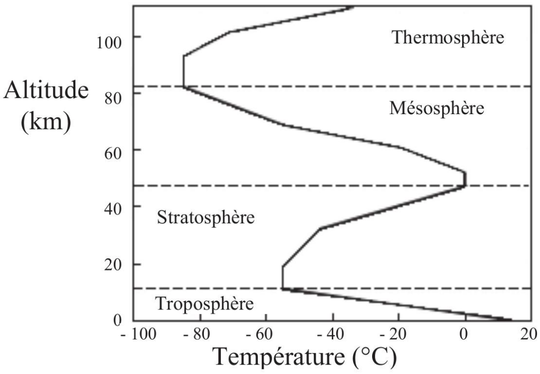
Écoulement incompressible.

$\boxed{4}$ Calcul encore :)

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{u}_z = -\frac{V_1 + V_2}{2a} \vec{u}_z$$

Il est donc rotationnel et ça se voit sur le champ de vitesse tracé à la première question.

Exercice 2 : Atmosphère adiabatique et polytropique



Cet exercice propose d'envisager d'autres modèles d'atmosphère que celui de l'atmosphère isotherme, qui ne permet évidemment pas d'expliquer les variations de températures observées, récapitulées sur la courbe ci-contre. On se limitera à la troposphère, c'est-à-dire la couche occupant les douze premiers kilomètres de l'atmosphère en partant de la surface de la Terre. On rappelle que le coefficient isentropique γ de l'air modélisé comme un gaz parfait diatomique est égal à $7/5$. Sa masse molaire vaut $29{,}0\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

On appelle gradient de température $\delta = \mathrm{d}T/\mathrm{d}z$.

1 - Supposons adiabatiques les transformations de l'air dans l'atmosphère. Déterminer deux exposants x et y tels que le produit $T^x P^y$ soit constant.

2 - En déduire la relation donnant $\mathrm{d}T/T$ en fonction de $\mathrm{d}P/P$ et γ.

3 - Établir l'expression du gradient de température adiabatique δ_{adiab} en fonction de γ, M_{air}, g et R. Donner sa valeur pour l'air.

4 - À partir de la figure, donner la valeur de la température au sommet de la troposphère à $12\,\mathrm{km}$ d'altitude ainsi que celle du gradient de température réel $\delta_{\text{réel}}$. Commenter la qualité du modèle, à comparer notamment au modèle d'atmosphère isotherme.

5 - Les transformations réelles au sein de l'atmosphère ne sont en fait ni isothermes ni adiabatiques, mais entre les deux. On les appelle polytropiques et elles vérifient $PV^q = \text{cte}$ où le coefficient polytropique q est supérieur à 1. Déterminer sa valeur à partir de la figure.

6 - En déduire le profil de température $T(z)$.

7 - Même question pour le profil de pression $P(z)$.

8 - Calculer numériquement T et P à $10\,\mathrm{km}$ d'altitude.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

$\boxed{1}$ $P^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{cte}$.

$\boxed{2}$ On prend le logarithme et on différencie : $\dfrac{\mathrm{d}T}{T} = \dfrac{\gamma-1}{\gamma}\dfrac{\mathrm{d}P}{P}$

$\boxed{3}$ On identifie la relation de la statique des fluides :

$$\mathrm{d}P = -\rho g \mathrm{d}z = -\frac{MP}{RT}\mathrm{d}z \equiv \frac{P}{T}\frac{\gamma}{\gamma-1}\mathrm{d}T \qquad \text{d'où} \qquad \delta_{\text{ad}} = \frac{Mg(1-\gamma)}{R\gamma} = -10 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K \cdot m^{-1}}\,.$$

$\boxed{4}$ $T = -55\,°\mathrm{C}$ soit $\delta_{\text{réel}} = -6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K \cdot m^{-1}}$. Le modèle adiabatique est pas génial non plus.

$\boxed{5}$ q joue le rôle de γ dans les calculs, donc

$$\delta_{\text{réel}} = \frac{Mg(1-q)}{Rq} \qquad \text{d'où} \qquad q = \frac{Mg}{Mg + R\delta_{\text{réel}}} \simeq 1{,}2\,.$$

$\boxed{6}$ $\delta = \text{cte}$ donc tout simplement $T = T_0 - \delta z$.

$\boxed{7}$ Même analogie $q \leftrightarrow \gamma$, d'où

$$P(z) = P_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{q/(q-1)} = P_0 \left(1 - \frac{\delta z}{T_0}\right)^{q/(q-1)}$$

$\boxed{8}$ En prenant $T_0 = 288\,\mathrm{K}$ on trouve $T = 231\,\mathrm{K} = -42\,°\mathrm{C}$ et $P = 0{,}27\,\mathrm{bar}$.

Hacheurs et statique des fluides

Exercice 1 : Atmosphère isotherme [oral banque PT]

On assimile l'air à un gaz parfait placé dans un champ de pesanteur constant. L'air est composé de 78% de diazote, 21% de dioxygène et 1 % d'argon.

Données :
▷ Masses molaires : $M(\mathrm{Ar}) = 18\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, $M(\mathrm{N_2}) = 28\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ et $M(\mathrm{O_2}) = 32\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$;
▷ Volume molaire de l'air dans les CNTP : $22{,}4\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}$.

1 - À partir des données, retrouver la valeur numérique de la constante des gaz parfaits R.

2 - Calculer la masse molaire de l'air.

3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la pression dans l'atmosphère dans le modèle isotherme.

4 - La résoudre et calculer la pression au sommet de l'Everest (8848 m) en fonction de la pression atmosphérique au niveau de la mer. Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ CNTP = 1 bar et 0 °C. D'après la loi des GP,

$$R = \frac{PV_\mathrm{m}}{T} = 8{,}31\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}.$$

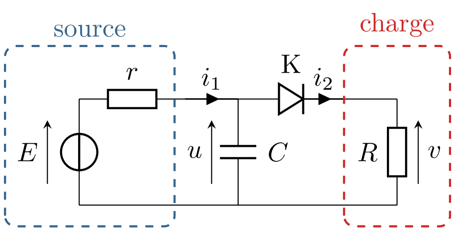
$\boxed{2}$ $M_\mathrm{air} = 0{,}78\,M(\mathrm{N_2}) + 0{,}21\,M(\mathrm{O_2}) + 0{,}01\,M(\mathrm{Ar}) = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

$\boxed{3}$ Loi de l'hydrostatique et des gaz parfaits :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \frac{Mg}{RT_0}P = 0$$

$\boxed{4}$ Solution exponentielle décroissante. $P_\mathrm{Everest} \simeq 0{,}33 P_\mathrm{atm}$. Ordre de grandeur correct.

Exercice 2 : Taux d'ondulation d'une tension lissée par condensateur



Considérons le montage ci-contre où se trouve un transistor K, c'est-à-dire un interrupteur commandé unidirectionnel. La source est modélisée par un générateur de Thévenin de fém constante positive E et de résistance interne r. La charge est purement résistive.

On s'intéresse au régime permanent T-périodique imposé par les commutations de K, qui est passant sur $[0, \alpha T]$ et bloqué sur $[\alpha T, T]$ où α est le rapport cyclique.

1 - Établir les équations différentielles vérifiées par la tension u sur chaque intervalle de temps. Les écrire sous forme canonique en introduisant des temps caractéristiques τ_1 et τ_2.

2 - En déduire la forme mathématique de $u(t)$, sans chercher à déterminer les constantes d'intégration qui interviennent. Représenter son chronogramme une fois le régime permanent établi.

3 - Déterminer les valeurs extrêmes accessibles la tension u en régime permanent. On note U_max et U_min les valeurs extrêmes réellement prises par u.

4 - À quelle condition peut-on dire que le condensateur lisse convenablement la tension de sortie de la source ?

On suppose cette condition vérifiée par la suite, et on linéarise toutes les expressions à l'ordre 1 en T/τ_1 et T/τ_2. On s'intéresse alors au taux d'ondulation résiduelle, c'est-à-dire aux petites fluctuations de la tension u autour de sa valeur moyenne, qu'on admet être égale à

$$\langle U\rangle = \frac{E}{1+\alpha\dfrac{r}{R}}\,.$$

5 - Simplifier le chronogramme de u dans le cadre de cette approximation. En déduire une relation très simple entre $\langle U\rangle$, $U_{\max}$ et $U_{\min}$.

6 - Simplifier l'expression de u sur l'intervalle $[0, \alpha T]$ pour établir une relation entre α, T, $U_{\max}$, $U_{\min}$, τ_1 et τ_2.

7 - En déduire l'expression simplifiée de $U_{\max}$, en fonction notamment de $\langle U\rangle$.

8 - Déterminer le taux d'ondulation, défini par

$$\eta = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{\langle U\rangle}\,.$$

Commenter l'expression trouvée : le taux d'ondulation est-il faible, comme souhaité ?

Éléments de correction de l'exercice 2 :

$\boxed{1}$ K ouvert : classique circuit rC,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_2}u = \frac{E}{\tau_2} \qquad \text{avec} \qquad \tau_2 = rC$$

K fermé :
- ▷ loi des noeuds : $i_1 = i_C + i_2$
- ▷ loi de comportement : $\frac{u-E}{r} = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{R}$
- ▷ bilan :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau_1} = \frac{E}{\tau_2} \qquad \text{avec} \qquad \tau_1 = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)$$

$\boxed{2}$ Solution homogène (avec constante pas à déterminer ici) et solution particulière donne

$$u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + E\frac{\tau_1}{\tau_2} \qquad \text{et} \qquad u(t) = B\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2} + E$$

Chronogramme : branches d'exponentielles qui se raccordent toujours de façon continue.

$\boxed{3}$ Ce sont simplement les solutions particulières, E et $E\tau_1/\tau_2$.

$\boxed{4}$ Il faut que u soit presque constante, donc que lorsque l'interrupteur change d'état le transitoire n'ait presque pas avancé, donc $\tau_1, \tau_2 \gg T$.

$\boxed{5}$ Un DL au premier ordre revient à approximer la fonction par sa tangente. Les branches d'exponentielle deviennent donc des droites affines. On voit directement en raisonnant en termes d'aire que

$$\langle U\rangle = \frac{U_{\max} + U_{\min}}{2}$$

$\boxed{6}$ On a $u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + E\tau_1/\tau_2$ et $u(t=0) = U_{\max}$ donc $A = U_{\max} - E\tau_1/\tau_2$. Ainsi,

$$\forall t \in [0, \alpha T], u(t) = \left(U_{\max} - \frac{\tau_1}{\tau_2}E\right)\left(1 - \frac{t}{\tau_1}\right) + \frac{\tau_1}{\tau_2}E$$

et en se plaçant à $t = \alpha T$ où $u = U_{\min}$ on trouve

$$U_{\min} = U_{\max}\left(1 - \alpha\frac{T}{\tau_1}\right) + \frac{\alpha T}{\tau_2}E$$

$\boxed{7}$ Découle directement des deux questions précédentes :

$$U_{\max} = \langle U\rangle\left(1 + \frac{\alpha T}{2\tau_1}\right) - \frac{\alpha T}{2\tau_2}E$$

$\boxed{8}$ Idem !

$$\eta = \alpha(1-\alpha)\frac{T}{\tau_2}\frac{r}{R}$$

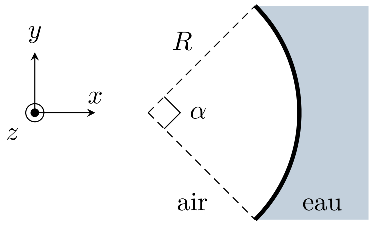
Proportionnel à T/τ_2 donc faible.

Hacheurs et statique des fluides

Question de cours

Rappeler la relation de van't Hoff. En déduire l'influence de la température sur un équilibre chimique.

Exercice 1 : Barrage voûte



Un barrage voûte est un type de barrage dénommé ainsi en raison de sa forme arquée caractéristique. La forme courbe de ces barrages permet de reporter les efforts dus à la poussée de l'eau sur chaque côté des rives. Un tel barrage fonctionne sur le même principe que les voûtes des cathédrales : pour ces dernières, la charge se concentre sur les piliers des voûtes, alors que pour les barrages, l'effort se concentre aux points d'appuis sur les rives. Ce type de barrage est donc adapté aux vallées étroites disposant de versant très rigides.

On modélise un tel barrage par un quart de cylindre de hauteur $H = 135\,\mathrm{m}$, rayon R et d'ouverture $\alpha = \pi/2$. Le couronnement, c'est-à-dire l'arc de cercle au sommet du barrage, a pour longueur $L = 230\,\mathrm{m}$.

1 - Déterminer le rayon R du quart de cylindre.

2 - Déterminer sans calcul la direction et le sens des force exercées par l'air sur le barrage, par l'eau sur le barrage, puis de la résultante.

3 - Calculer $\overrightarrow{F}_{\mathrm{air}}$ exercée par l'air sur le barrage.

4 - Calculer $\overrightarrow{F}_{\mathrm{eau}}$ exercée par l'air sur le barrage.

5 - En déduire la résultante.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 $L = R\alpha$ soit $R = \dfrac{2L}{\pi} = 146\,\mathrm{m}$.

2 Analyse des symétries. Air : exercée selon $+\overrightarrow{e}_x$, eau : exercée selon $-\overrightarrow{e}_x$, et il en est a priori de même pour la résultante.

3 Coordonnées cylindriques de centre O et d'axe z. On prend l'origine $z = 0$ à la surface du barrage, le fond se trouve donc en $z = -H$.

4 Pression de l'air uniforme.

$$\overrightarrow{F}_{\mathrm{air}} = \iint P_0\,\mathrm{d}S\,\overrightarrow{n} = \int_{z=-H}^{0}\int_{\theta=-\alpha/2}^{+\alpha/2} P_0 \times R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \times (\cos\theta\,\overrightarrow{e}_x + \sin\theta\,\overrightarrow{e}_y)$$

Par parité (ou par symétrie) on constate que le terme sur $\overrightarrow{e}_y$ s'annule. Ne reste à calculer que la composante sur $\overrightarrow{e}_x$. L'intégrale sur z se factorise directement.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_{\mathrm{air}} &= P_0\,R\,H \int_{\theta=-\alpha/2}^{+\alpha/2} \cos\theta\mathrm{d}\theta\;\overrightarrow{e}_x \\ &= P_0\,R\,H\,[\sin\theta]_{-\alpha/2}^{+\alpha/2}\;\overrightarrow{e}_x \\ &= P_0 RH \times 2\sin\frac{\alpha}{2}\,\overrightarrow{e}_x \\ &\boxed{\overrightarrow{F}_{\mathrm{air}} = \sqrt{2}\,P_0\,RH\;\overrightarrow{e}_x}\end{aligned}$$

5 Exactement la même chose sauf que $P(z) = P_0 - \rho_0 g z$ car on est dans l'eau, et le vecteur normal change de sens.

$$\overrightarrow{F}_{\mathrm{eau}} = \iint P(z)\,\mathrm{d}S\,\overrightarrow{n} = \int_{z=-H}^{0}\int_{\theta=-\alpha/2}^{+\alpha/2} [P_0 - \rho_0 g z] \times R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \times (-\cos\theta\,\overrightarrow{e}_x - \sin\theta\,\overrightarrow{e}_y)$$

Par parité (ou par symétrie) on constate que le terme sur $\overrightarrow{e}_y$ s'annule. Ne reste à calculer que la composante sur $\overrightarrow{e}_x$. Les intégrales se factorisent facilement.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_{\text{eau}} &= -R\left(\int_{z=-H}^{0}[P_0-\rho_0 g z]\,\mathrm{d}z\right)\times\left(\int_{\theta=-\alpha/2}^{+\alpha/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)\overrightarrow{e}_x\\
&= -R\left[P_0 z-\rho_0 g\frac{z^2}{2}\right]_{-H}^{0}[\sin\theta]_{-\alpha/2}^{+\alpha/2}\,\overrightarrow{e}_x\\
&= -R\left(P_0 H+\rho_0 g\frac{H^2}{2}\right)\times 2\sin\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{e}_x
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{eau}} = -\sqrt{2}R\left(P_0 H+\rho_0 g\frac{H^2}{2}\right)\overrightarrow{e}_x\,.}$$

6 Résultante : il suffit de sommer

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\sqrt{2}R\rho_0 g\frac{H^2}{2}\overrightarrow{e}_x}$$