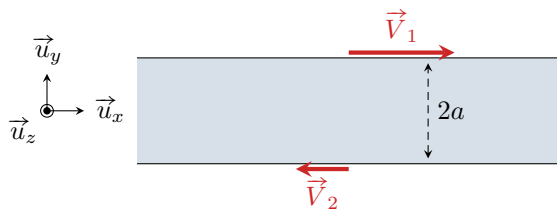


Mécanique des fluides et optimisation des équilibres

Exercice 1 : Écoulement de Couette plan



Considérons un fluide confiné entre deux plaques planes infinies situées en $y = \pm a$. La plaque supérieure est tirée à vitesse constante \vec{V}_1 dans le sens de \vec{u}_x , la plaque inférieure à vitesse constante \vec{V}_2 dans le sens opposé.

Le champ de vitesse de l'écoulement est donné par

$$\vec{v} = \left(\frac{V_1 + V_2}{2a} y + \frac{V_1 - V_2}{2} \right) \vec{u}_x.$$

- 1 - Représenter l'allure du champ de vitesse. Indiquer les lignes de courant.
- 2 - Le fluide considéré est-il un fluide parfait ou visqueux ?
- 3 - L'écoulement est-il compressible ?
- 4 - Calculer la vorticité $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$ de l'écoulement. Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

- 1 Lignes de courant : droites selon \vec{u}_x . Champ de vitesse dessiné sur la figure 1.

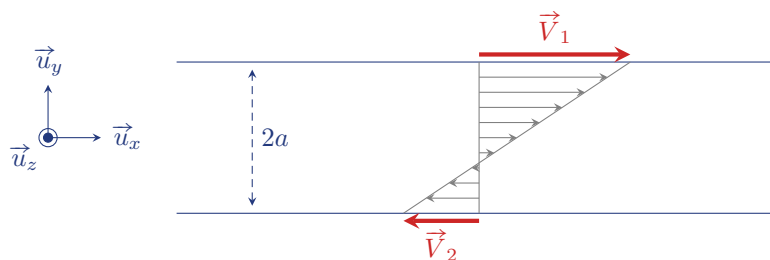


Figure 1 – Champ des vitesses de l'écoulement de Couette plan.

- 2 Visqueux car vitesse du fluide égale à la vitesse de la paroi en $x = \pm a$.
- 3 Calcul :

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0$$

Écoulement incompressible.

- 4 Calcul encore :

$$\vec{\text{rot}} \vec{v} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{u}_z = -\frac{V_1 + V_2}{2a} \vec{u}_z$$

Il est donc rotationnel et ça se voit sur le champ de vitesse tracé à la première question.

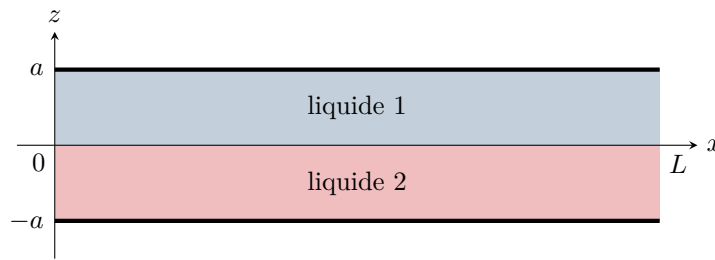


Figure 2 – Écoulement de Poiseuille de deux liquides non miscibles.

Exercice 2 : Écoulement de Poiseuille de deux liquides non miscibles

On réalise un écoulement de Poiseuille plan de deux liquides incompressibles, non miscibles, entre deux plaques planes horizontales fixes, représentées figure 2. On note respectivement $\rho_{1,2}$ et $\eta_{1,2}$ la masse volumique et la viscosité de chacun des fluides. Une pression uniforme P_e est imposée dans le plan $x = 0$, et une pression $P_s < P_e$ dans le plan $x = L$.

On suppose le régime stationnaire atteint. On néglige tout effet de bord, c'est-à-dire que la zone d'écoulement est considérée comme si elle était infiniment étendue dans la direction y . On admet alors que le champ des vitesses dans chacun des deux fluides est de la forme

$$\vec{v}_{1,2}(x, z) = v_{1,2}(x, z) \vec{e}_x.$$

- 1 - Lequel des deux fluides a la masse volumique la plus élevée ? On néglige par la suite tout effet du poids.
- 2 - Montrer que dans chaque liquide le champ des vitesses ne dépend pas de x .
- 3 - Montrer que la pression ne dépend que de x .
- 4 - Établir les expressions mathématiques des deux champs de vitesse.
- 5 - Représenter l'allure du champ des vitesses en fonction de z pour $\eta_1 = \eta_2$, $\eta_1 = 10 \eta_2$ et $\eta_1 = 0,1 \eta_2$.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

1 $\rho_2 > \rho_1$

2 Incompressibilité.

3 Bilan des actions mécaniques sur une particule fluide au cœur de l'écoulement : force de pression $-\overrightarrow{\text{grad}} P dV$ et forces de viscosité, qui sont dans la direction du mouvement donc forcément ici portées par \vec{e}_x .

Régime permanent donc lignes de courant et trajectoires des particules de fluides sont confondues, donc la trajectoire d'une particule de fluide est une droite parallèle à l'axe x . Comme le champ des vitesses ne dépend pas de x , elle garde la même vitesse tout au long de son mouvement, donc son accélération est nulle. Ainsi, la loi de la quantité de mouvement donne

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}} P dV + dF_{\text{visc}} \vec{e}_x$$

d'où par projection sur y et z on trouve $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$.

4 Force visqueuse exercée par la particule située en $z + dz$: $\eta \frac{dv}{dz}(z + dz) dx dy \vec{e}_x$. Idem au signe près pour celle située en z . Loi de la qté de mouvement :

$$-\frac{dP}{dx} dx dy dz + \eta \frac{d^2 v}{dz^2} dx dy dz = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dP}{dx} = \eta \frac{d^2 v}{dz^2} = K_0$$

forcément constant compte tenu des variables dont dépendent les deux membres.

On intègre la pression : $K_0 = \frac{P_s - P_e}{L}$ et on fait de même pour la vitesse. On trouve les constantes d'intégration à partir des trois CL : $v_1(a) = v_2(-a) = 0$ et $v_1(0) = v_2(0)$ (continuité de la vitesse). On trouve

$$v_1(z) = \frac{P_s - P_e}{2\eta_1 L} (z-a)^2 + \frac{a(P_s - P_e)(3\eta_1 + \eta_2)}{2\eta_1 L(\eta_1 + \eta_2)} (z-a) \quad \text{et} \quad v_2(z) = \frac{P_s - P_e}{2\eta_2 L} (z+a)^2 + \frac{a(P_s - P_e)(3\eta_2 + \eta_1)}{2\eta_2 L(\eta_2 + \eta_1)} (z+a)$$

Mécanique des fluides et optimisation des équilibres

Question de cours

Définir un écoulement incompressible. Établir une première conséquence en termes de champ de vitesse et une deuxième en termes de débit.

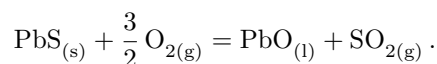
Exercice 1 : Grillage du sulfure de plomb

[écrit CCP MP 2017]

Le plomb métallique peut être obtenu par voie sèche à partir du minerai de sulfure de plomb, appelé galène. La préparation du métal est réalisée actuellement en deux étapes : le grillage du sulfure de plomb suivi de la réduction du monoxyde de plomb. On s'intéresse dans cet exercice à l'étape de grillage.

Données							
Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\text{K}^{-1}$							
Masse volumique du plomb solide : $\rho = 11\,350 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$							
Températures de fusion sous une pression de 1 bar :							
$T_f(\text{Pb}) = 596 \text{ K}$							
$T_f(\text{PbO}) = 1\,161 \text{ K}$							
$T_f(\text{PbS}) = 1\,387 \text{ K}$							
Données thermodynamiques à 298 K :							
Composé	Pb(s)	PbO(s)	PbS(s)	O ₂ (g)	C(s)	CO ₂ (g)	SO ₂ (g)
Enthalpie standard de formation (kJ.mol ⁻¹)	0	-219,0	-120,4	0	0	-393,5	-296,8
Entropie molaire standard (J.mol ⁻¹ .K ⁻¹)	64,8	66,5	91,2	205,2	5,7	213,8	248,2
Enthalpie standard de fusion du plomb : à 596 K, $\Delta_{\text{fus}} H^0 = 4,8 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$							
Enthalpie standard de fusion du monoxyde de plomb PbO : à 1 161 K, $\Delta_{\text{fus}} H^0 = 11,7 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$							
Données thermodynamiques à 1 273 K : capacités thermiques molaires isobares en J.K ⁻¹ .mol ⁻¹							
Composé	PbS (s)	O ₂ (g)	PbO (l)	SO ₂ (g)	N ₂ (g)		
C _p ⁰	49,5	29,4	45,8	39,9	29,1		
On supposera que, dans le domaine de température étudié, $\Delta_r H^0$ et $\Delta_r S^0$ sont indépendants de la température pour toutes les réactions chimiques envisagées.							
Les phases solides sont non miscibles.							

Le sulfure de plomb est chauffé en présence de dioxygène. Une réaction d'oxydation se produit :



Dans tout l'exercice, on se place dans le domaine $1161 \text{ K} < T < 1387 \text{ K}$.

- Justifier pourquoi l'enthalpie standard $\Delta_r H^0$ et l'entropie standard $\Delta_r S^0$ de la réaction sont différentes pour T supérieure ou inférieure à 1161 K. Les calculer.
- La réaction est-elle endothermique ou exothermique ? Commenter le signe de l'entropie standard de réaction.
- Justifier comment évolue l'équilibre si on augmente la température, toutes choses égales par ailleurs.
- Donner l'expression de l'enthalpie libre standard $\Delta_r G^0$ de la réaction en fonction de la température T .
- Calculer la constante d'équilibre K^0 de la réaction à 1273 K. Conclure.
- Exprimer le quotient réactionnel Q en fonction de la pression P et des quantités de matière n en O₂, n' en SO₂

et N pour la totalité des gaz.

7 - Comment évolue l'équilibre si on augmente la pression, toutes choses égales par ailleurs ?

8 - On utilise de l'air pour effectuer la réaction. La présence de diazote favorise-t-elle la réaction à température et pression fixées ? Pourquoi pensez-vous que les industriels utilisent de l'air plutôt que du dioxygène pur ?

Les réactifs, c'est-à-dire le minerai et l'air, sont portés à 1273 K pour réagir entre eux. Le caractère rapide et total de la réaction permet de formuler une hypothèse d'adiabaticité.

9 - En supposant que l'on part des proportions stœchiométriques, à quelle température seraient portés les produits pris initialement à 1273 K ? Pourrait-on réaliser le grillage ?

10 - On ne peut pas baisser la température de réaction en dessous de 950 °C sinon le phosphate de plomb, qui se forme simultanément, ne serait pas décomposé. On ne peut donc travailler qu'entre 950 °C et 1114 °C. Pourquoi se positionne-t-on plutôt du côté bas du domaine ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 La température de 1161 K correspond à la température de fusion de l'oxyde de plomb PbO , ce qui modifie légèrement ses grandeurs standard de formation. D'après la loi de Hess,

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ(\text{PbO}_{(l)}) + \Delta_f H^\circ(\text{SO}_{2(g)}) - \Delta_f H^\circ(\text{PbS}_{(s)}) - \frac{3}{2} \Delta_f H^\circ(\text{O}_{2(g)})$$

avec

$$\Delta_f H^\circ(\text{PbO}_{(l)}) = \Delta_f H^\circ(\text{PbO}_{(s)}) + \Delta_{\text{fus}} H(\text{PbO}).$$

Finalement,

$$\Delta_r H^\circ = -383,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

De même,

$$\Delta_r S^\circ = S^\circ(\text{PbO}_{(l)}) + S^\circ(\text{SO}_{2(g)}) - S^\circ(\text{PbS}_{(s)}) - \frac{3}{2} S^\circ(\text{O}_{2(g)})$$

avec

$$S^\circ(\text{PbO}_{(l)}) = S^\circ(\text{PbO}_{(s)}) + \frac{\Delta_{\text{fus}} H(\text{PbO})}{T_{\text{fus}}(\text{PbO})}.$$

Finalement,

$$\Delta_r S^\circ = -74,2 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

2 On a $\Delta_r H^\circ < 0$ donc la transformation est **exothermique**. Par ailleurs, il y a **consommation de gaz** au cours de la transformation ($\Delta \nu_{\text{gaz}} = -1/2$), il est donc logique d'obtenir $\Delta_r S^\circ < 0$.

3 D'après le principe de modération de Le Châtelier, le système réagit en évoluant dans le sens endothermique, qui est ici le **sens conduisant à la formation de PbS** et à la consommation de PbO .

Ce résultat peut également être démontré avec la loi de Van't Hoff, mais l'ordre des questions laisse entendre que ce n'est pas demandé ici : le calcul de K° ne vient qu'après.

4 Par définition, $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$ soit dans l'approximation d'Ellingham

$$\Delta_r G^\circ = -383 \cdot 10^3 - 74,2 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1}).$$

5 Par définition,

$$K^\circ = \exp -\frac{\Delta_r G^\circ}{RT} = 7,5 \cdot 10^{11} \gg 1.$$

La transformation est donc quasi-totale, ce qui est favorable.

6 L'activité d'un gaz s'exprime par

$$a_i = \frac{p_i}{p^\circ} = \frac{n_i P}{N p^\circ}$$

où $p_i = x_i P$ est sa pression partielle, et $x_i = n_i/N$ sa fraction molaire. Le quotient réactionnel s'écrit

$$Q = \frac{1 \times \frac{n'P}{Np^\circ}}{1 \times \left(\frac{nP}{Np^\circ}\right)^{3/2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q = \frac{n'}{n^{3/2}} \sqrt{\frac{Np^\circ}{P}}}$$

7 On raisonne à température fixée, donc K° n'est pas modifiée. D'après la question précédente, Q diminue si P augmente, donc pour atteindre de nouveau l'équilibre Q doit augmenter : **le système évolue en sens direct**.

8 La présence du diazote augmente N sans autre impact : elle tend donc à augmenter Q et ainsi à favoriser un déplacement de l'équilibre en sens inverse, **ce qui est défavorable à la réaction**. On utilise de l'air **pour des raisons économiques** : purifier du dioxygène coûte cher.

9 On décompose la transformation thermodynamique réelle en une suite de deux transformations : d'abord la transformation chimique isotherme puis l'échauffement des produits. Comme l'enthalpie est une fonction d'état,

$$\Delta H = n_0 \Delta_r H^\circ + C_{p,\text{prod}}(T_{\text{fin}} - T_{\text{init}}) \underbrace{=}_0$$

Exprimons maintenant la capacité thermique des produits $C_{p,\text{prod}}$, en s'appuyant sur un bilan de matière.

	PbS	+	$\frac{3}{2}$ O ₂	=	PbO	+	SO ₂		N ₂
EI	n_0		$\frac{3}{2}n_0$		0		0		$4 \times \frac{3}{2}n_0 = 6n_0$
EF	0		0		n_0		n_0		$6n_0$

Ainsi,

$$C_{p,\text{prod}} = \sum_{\text{produits}} n_i C_{p,i}^\circ = n_0 [C_p^\circ(\text{PbO}) + C_p^\circ(\text{SO}_2) + 6C_p^\circ(\text{N}_2)] = n_0 \times 260,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Finalement,

$$\boxed{T_{\text{fin}} = T_{\text{init}} - \frac{n_0 \Delta_r H^\circ}{C_{p,\text{prod}}} = 2747 \text{ K}.$$

Il s'agit d'une température très élevée, donc **très défavorable à la réaction** d'après la question 3.

10 Même argument que précédemment : on ne veut pas que la température augmente trop car c'est défavorable, on a donc tout intérêt à partir d'une température initiale elle-même déjà basse.

Mécanique des fluides et optimisation des équilibres

Question de cours

Rappeler la relation de van't Hoff. En déduire l'influence de la température sur un équilibre chimique.

Exercice 1 : Écoulement de lave

Cet exercice propose une étude simple de l'écoulement de la lave le long des pentes d'un volcan. On modélise la lave par un fluide newtonien (hypothèse très simplificatrice) incompressible, de viscosité dynamique η constante et de masse volumique ρ constante. L'air est supposé être un fluide parfait à la pression P_0 . La pente est assimilée à un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale, voir figure 1. On suppose l'écoulement permanent, l'épaisseur h de la couche de lave étant uniforme, et parallèle à la ligne de plus grande pente. Ces hypothèses permettent d'écrire le champ des vitesses de l'écoulement sous la forme

$$\vec{v} = v_x(x, y) \vec{e}_x.$$

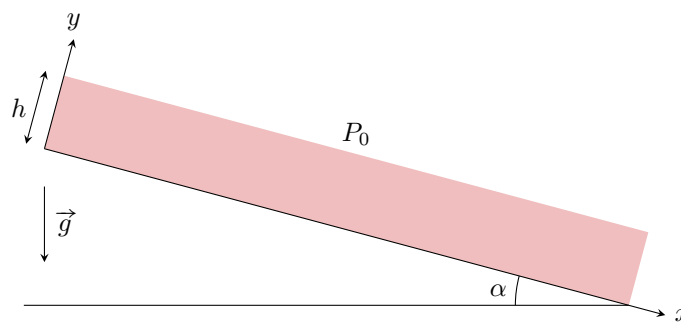


Figure 1 – Écoulement de lave sur les pentes d'un volcan.

- 1 - Montrer que $\vec{v} = v_x(y) \vec{e}_x$
- 2 - Déterminer les conditions aux limites portant sur $v_x(y)$ et/ou sa dérivée.
- 3 - Déterminer le champ de pression et le champ de vitesse dans le fluide.
- 4 - Calculer la vitesse maximale. À quel endroit est-elle atteinte? Représenter alors le profil des vitesses.
- 5 - Calculer le débit volumique de lave au travers d'une tranche de fluide de largeur L selon Oz .
- 6 - Déterminer la contrainte $\vec{\tau}$ (force par unité de surface) exercée par la lave sur le sol.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

- 1 Incompressibilité.
- 2 $v_x(y=0) = 0$ (adhérence d'un fluide visqueux à une paroi) et $\frac{dv_x}{dy}(y=h) = 0$ (pas d'action de contact entre un fluide visqueux et un fluide parfait).
- 3 On raisonne sur une particule fluide au cœur de l'écoulement. Bilan des actions mécaniques :
 - ▷ poids : $\rho \vec{g} dV = \rho g (\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$
 - ▷ force de pression – $\text{grad } P dV$;
 - ▷ force visqueuse exercée par la particule juste au dessus, en $y + dy$: $\eta \frac{dv}{dy}(y + dy) dx dz \vec{e}_x$;
 - ▷ force visqueuse exercée par la particule juste en dessous, en y : $-\eta \frac{dv}{dy}(y) dx dz \vec{e}_x$;

▷ les autres particules fluides n'exercent pas de force visqueuse car elles se déplacent à la même vitesse que celle qu'on étudie.

Régime permanent donc lignes de courant et trajectoires des particules de fluides sont confondues, donc la trajectoire d'une particule de fluide est une droite parallèle à l'axe x . Comme le champ des vitesses ne dépend pas de x , elle garde la même vitesse tout au long de son mouvement, donc son accélération est nulle. Ainsi, la loi de la quantité de mouvement donne

$$\vec{0} = \rho g(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y) - \overrightarrow{\text{grad}} P dV + \eta \frac{dv}{dy}(y + dy) dx dz \vec{e}_x - \eta \frac{dv}{dy}(y) dx dz \vec{e}_x$$

Projections sur z et surtout y permettent de conclure que

$$P = P(x, y) = -\rho g y \cos \alpha + K(x)$$

Or pour tout x ,

$$P(x, h) \underbrace{=}_{\text{CL}} P_0 \underbrace{=}_{\text{sol}} -\rho g h \cos \alpha + K(x) \quad \text{d'où} \quad K = P_0 + \rho g h \cos \alpha \quad \text{donc} \quad \boxed{P = P_0 - \rho g(y - h) \cos \alpha.}$$

Indépendant de x .

Projection sur x , intégration et conditions aux limites permettent de conclure que

$$\boxed{v_x(y) = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} y \left(h - \frac{y}{2} \right)}$$

4 Vitesse maximale atteinte au niveau de la surface libre : la CL montre que la dérivée s'annule à la surface ! L'allure du profil de vitesse est donc une demi-parabole.

$$\mathbf{5} \quad Q = \iint v_x(y) dy dz = L \int v_x(y) dy = \frac{\rho g L h^3 \sin \alpha}{3\eta}$$

$$\mathbf{6} \quad \vec{\tau} = \frac{dv_x}{dy}(y=0) \vec{e}_x. \text{ Calcul à faire.}$$