Colles semaine 21 – Sujet A D'Arsonval, PSI* 2017-2018

Mécanique des fluides et mélanges binaires

Question de cours

Établir le théorème des moments pour le changement d'état d'un alliage binaire métallique.

Exercice 1 : Écoulement de Poiseuille de deux liquides non miscibles

On réalise un écoulement de Poiseuille plan de deux liquides incompressibles, non miscibles, entre deux plaques planes horizontales fixes, représentées figure 1. On note respectivement $\rho_{1,2}$ et $\eta_{1,2}$ la masse volumique et la viscosité de chacun des fluides. Une pression uniforme P_e est imposée dans le plan $x = 0$, et une pression $P_\mathrm{s} < P_\mathrm{e}$ dans le plan $x = L$.

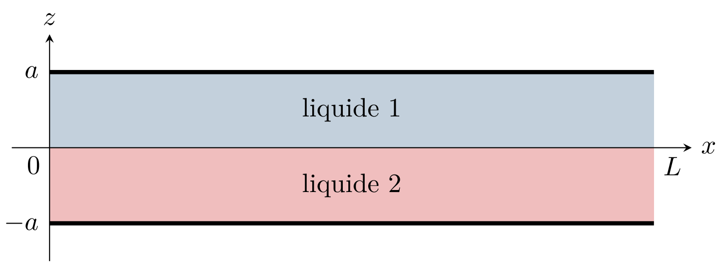


Figure 1 – Écoulement de Poiseuille de deux liquides non miscibles.

On suppose le régime stationnaire atteint. On néglige tout effet de bord, c'est-à-dire que la zone d'écoulement est considérée comme si elle était infiniment étendue dans la direction y. On admet alors que le champ des vitesses dans chacun des deux fluides est de la forme

$$\vec{v}_{1,2}(x,z) = v_{1,2}(x,z)\,\vec{e}_x\,.$$

1 - Lequel des deux fluides a la masse volumique la plus élevée ? On néglige par la suite tout effet du poids.

2 - Montrer que dans chaque liquide le champ des vitesses ne dépend pas de x.

3 - Montrer que la pression ne dépend que de x.

4 - Établir les expressions mathématiques des deux champs de vitesse.

5 - Représenter l'allure du champ des vitesses en fonction de z pour $\eta_1 = \eta_2$, $\eta_1 = 10\,\eta_2$ et $\eta_1 = 0{,}1\,\eta_2$.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ $\rho_2 > \rho_1$

$\boxed{2}$ Incompressibilité.

$\boxed{3}$ Bilan des actions mécaniques sur une particule fluide au cœur de l'écoulement : force de pression $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}V$ et forces de viscosité, qui sont dans la direction du mouvement donc forcément ici portées par $\vec{e}_x$.

Régime permanent donc lignes de courant et trajectoires des particules de fluides sont confondues, donc la trajectoire d'une particule de fluide est une droite parallèle à l'axe x. Comme le champ des vitesses ne dépend pas de x, elle garde la même vitesse tout au long de son mouvement, donc son accélération est nulle. Ainsi, la loi de la quantité de mouvement donne

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\mathrm{d}V + \mathrm{d}F_\mathrm{visc}\,\vec{e}_x$$

d'où par projection sur y et z on trouve $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial z} = 0$.

$\boxed{4}$ Force visqueuse exercée par la particule située en $z + \mathrm{d}z$: $\eta \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}(z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\vec{e}_x$. Idem au signe près pour celle située en z. Loi de la qté de mouvement :

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \eta\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \eta\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} = K_0$$

Étienne Thibierge, 5 avril 2018, www.etienne-thibierge.fr

forcément constant compte tenu des variables dont dépendent les deux membres.

On intègre la pression : $K_0 = \dfrac{P_\mathrm{s} - P_\mathrm{e}}{L}$ et on fait de même pour la vitesse. On trouve les constantes d'intégration à partir des trois CL : $v_1(a) = v_2(-a) = 0$ et $v_1(0) = v_2(0)$ (continuité de la vitesse). On trouve

$$v_1(z) = \frac{P_\mathrm{s} - P_\mathrm{e}}{2\eta_1 L}(z-a)^2 + \frac{a(P_\mathrm{s} - P_\mathrm{e})(3\eta_1 + \eta_2)}{2\eta_1 L(\eta_1 + \eta_2)}(z-a) \qquad \text{et} \qquad v_1(z) = \frac{P_\mathrm{s} - P_\mathrm{e}}{2\eta_2 L}(z+a)^2 + \frac{a(P_\mathrm{s} - P_\mathrm{e})(3\eta_2 + \eta_1)}{2\eta_2 L(\eta_2 + \eta_1)}(z+a)$$

Mécanique des fluides et mélanges binaires

Question de cours

Dans le cas d'un écoulement laminaire, établir la loi de Hagen-Poiseuille qui relie le débit volumique Q_V à la différence de pression ΔP. Définir la résistance hydraulique.

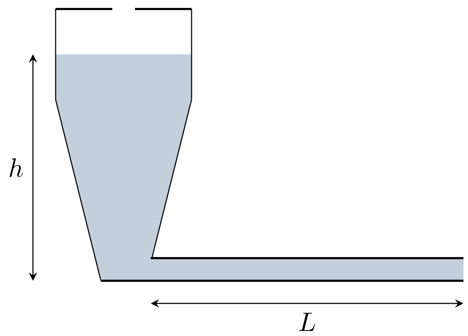
Donnée : pour un écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique de longueur L, le champ de vitesse s'écrit

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

Éléments de correction de l'exercice 0 :

$Q_V = \dfrac{\pi\,\Delta P}{8\eta L} R^4$.

Exercice 1 : Distribution d'eau potable par un château d'eau



Un château d'eau haut de $h = 25\,\mathrm{m}$ alimente un village en eau potable. On étudie l'alimentation d'une maison par une canalisation circulaire supposée rectiligne de longueur $L = 200\,\mathrm{m}$ et de section $S = 1\,\mathrm{cm}^2$ partant du pied du château d'eau.

Données : masse volumique $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et viscosité dynamique $\eta = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s}$ de l'eau.

1 - Estimer l'ordre de grandeur de la pression atteinte en entrée de la canalisation, en supposant pour cette question le débit dans la canalisation négligeable.

On étudie la canalisation en coordonnées cylindriques d'axe z correspondant à l'axe de la canalisation. On suppose l'écoulement laminaire et on admet que le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = v(r)\,\vec{e}_z$. On suppose le robinet ouvert à l'extrémité de la canalisation : la pression de sortie est égale à la pression atmosphérique.

2 - En étudiant les actions mécaniques subies par une particule de fluide au sein de l'écoulement, montrer d'abord que le champ de pression dans l'écoulement ne dépend que de z puis que

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \frac{\eta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$$

3 - Justifier que les deux termes de l'égalité ci-dessus sont nécessairement constants. Exprimer cette constante en fonction notamment de la hauteur h du château d'eau.

On admet que l'on peut montrer à partir de cette équation que le champ des vitesses dans la canalisation s'écrit

$$v(r) = \frac{\rho g h (R^2 - r^2)}{4\eta L}\,.$$

4 - Montrer que l'expression donnée est cohérente avec les conditions aux limites.

5 - Calculer le débit attendu en sortie de la canalisation. Expliquer pourquoi le débit d'un tuyau entartré diminue.

6 - Calculer la vitesse débitante et le nombre de Reynolds de l'écoulement. Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Hydrostatique : $P_\mathrm{e} = P_\mathrm{atm} + \rho g h$.

$\boxed{2}$ On raisonne sur une particule fluide au cœur de l'écoulement. Bilan des actions mécaniques :
▷ poids : l'énoncé ne le dit pas, mais il est négligé.
▷ force de pression $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}V$;

▷ force visqueuse exercée par la particule de mêmes θ et z mais centrée en r un peu plus grand :

$$\eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}(r+\mathrm{d}r)\right)\mathrm{d}S\,\vec{e}_z = \eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}(r+\mathrm{d}r)\right)\times(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$

▷ force visqueuse exercée par la particule de mêmes θ et z mais centrée en r un peu plus petit :

$$-\eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}(r)\right)\mathrm{d}S\,\vec{e}_z = -\eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}(r+\mathrm{d}r)\right)\times r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$

▷ les autres particules fluides n'exercent pas de force visqueuse car elles se déplacent à la même vitesse que celle qu'on étudie.

Régime permanent donc lignes de courant et trajectoires des particules de fluides sont confondues, donc la trajectoire d'une particule de fluide est une droite parallèle à l'axe z. Comme le champ des vitesses ne dépend pas de z, elle garde la même vitesse tout au long de son mouvement, donc son accélération est nulle. Ainsi, la loi de la quantité de mouvement donne

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\mathrm{d}V + \eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}(r+\mathrm{d}r)\right)\times(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,\vec{e}_z - \eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}(r+\mathrm{d}r)\right)\times r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$

ce qui conduit à l'équation demandée en projetant sur l'axe z.

3 Le terme de gauche ne dépend que de z mais pas de r, alors que le terme de droite ne dépend que de r mais pas de z. Si on intègre la partie en pression,

$$P(z) = Az + B \qquad \text{d'où} \qquad P(z) = \frac{(P_{\mathrm{atm}}+\rho g h) - P_{\mathrm{atm}}}{L}z + (P_{\mathrm{atm}}+\rho g h) = \frac{\rho g h}{L}z + (P_{\mathrm{atm}}+\rho g h)$$

d'où on identifie la constante A.

4 $v(R) = 0$.

5 Calcul de débit volumique :

$$Q = \iint v(r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\rho g h\,\pi R^4}{8\eta L}$$

Un tuyau entartré a un rayon plus faible.

6 Vitesse débitante : $V = Q/S$. Reynolds : $Re = \dfrac{RV\rho}{\eta} \sim 10^4 > 10^3$ donc hypothèse d'écoulement laminaire à revoir.

Mécanique des fluides et mélanges binaires

Question de cours

Définir le nombre de Reynolds et l'interpréter physiquement. Expliquer son lien au régime d'écoulement. Associer une gamme de nombre de Reynolds à un modèle de force de traînée.

Exercice 1 : Écoulement de lave

Cet exercice propose une étude simple de l'écoulement de la lave le long des pentes d'un volcan. On modélise la lave par un fluide newtonien (hypothèse très simplificatrice) incompressible, de viscosité dynamique η constante et de masse volumique ρ constante. L'air est supposé être un fluide parfait à la pression P_0. La pente est assimilée à un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale, voir figure 1. On suppose l'écoulement permanent, l'épaisseur h de la couche de lave étant uniforme, et parallèle à la ligne de plus grande pente. Ces hypothèses permettent d'écrire le champ des vitesses de l'écoulement sous la forme

$$\vec{v} = v_x(x,y)\,\vec{e}_x\,.$$

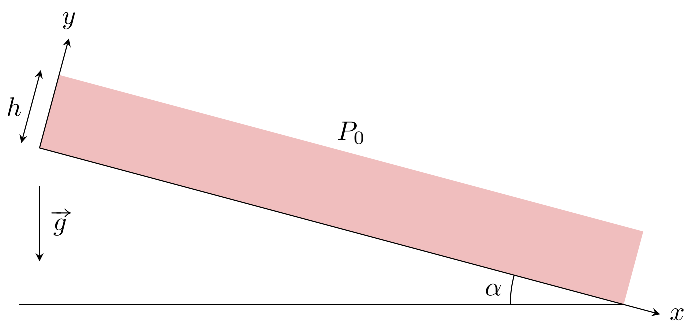


Figure 1 – Écoulement de lave sur les pentes d'un volcan.

1 - Montrer que $\vec{v} = v_x(y)\,\vec{e}_x$

2 - Déterminer les conditions aux limites portant sur $v_x(y)$ et/ou sa dérivée.

3 - Déterminer le champ de pression et le champ de vitesse dans le fluide.

4 - Calculer la vitesse maximale. À quel endroit est-elle atteinte ? Représenter alors le profil des vitesses.

5 - Calculer le débit volumique de lave au travers d'une tranche de fluide de largeur L selon Oz.

6 - Déterminer la contrainte $\vec{\tau}$ (force par unité de surface) exercée par la lave sur le sol.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Incompressibilité.

$\boxed{2}$ $v_x(y=0) = 0$ (adhérence d'un fluide visqueux à une paroi) et $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}(y=h) = 0$ (pas d'action de contact entre un fluide visqueux et un fluide parfait).

$\boxed{3}$ On raisonne sur une particule fluide au cœur de l'écoulement. Bilan des actions mécaniques :
- ▷ poids : $\rho\vec{g}\,\mathrm{d}V = \rho g(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y)$
- ▷ force de pression $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}V$;
- ▷ force visqueuse exercée par la particule juste au dessus, en $y+\mathrm{d}y$: $\eta\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}(y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\vec{e}_x$;
- ▷ force visqueuse exercée par la particule juste en dessous, en y : $-\eta\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\vec{e}_x$;
- ▷ les autres particules fluides n'exercent pas de force visqueuse car elles se déplacent à la même vitesse que celle qu'on étudie.

Régime permanent donc lignes de courant et trajectoires des particules de fluides sont confondues, donc la trajectoire d'une particule de fluide est une droite parallèle à l'axe x. Comme le champ des vitesses ne dépend pas de x, elle garde la même vitesse tout au long de son mouvement, donc son accélération est nulle. Ainsi, la loi de la quantité de mouvement donne

$$\overrightarrow{0} = \rho g(\sin\alpha\,\overrightarrow{e}_x - \cos\alpha\,\overrightarrow{e}_y) - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\mathrm{d}V + \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}(y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e}_x - \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e}_x$$

Projections sur z et surtout y permettent de conclure que

$$P = P(x,y) = -\rho g y\cos\alpha + K(x)$$

Or pour tout x,

$$P(x,h)\underbrace{=}_{\text{CL}}P_0\underbrace{=}_{\text{sol}}-\rho g h\cos\alpha + K(x) \qquad \text{d'où} \qquad K = P_0 + \rho g h\cos\alpha \qquad \text{donc} \qquad \boxed{P = P_0 - \rho g(y-h)\cos\alpha\,.}$$

Indépendant de x.

Projection sur x, intégration et conditions aux limites permettent de conclure que

$$\boxed{v_x(y) = \frac{\rho g\sin\alpha}{\eta}y\left(h - \frac{y}{2}\right)}$$

4 Vitesse maximale atteinte au niveau de la surface libre : la CL montre que la dérivée s'annule à la surface ! L'allure du profil de vitesse est donc une demi-parabole.

5 $Q = \iint v_x(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = L\int v_x(y)\mathrm{d}y = \dfrac{\rho g L h^3\sin\alpha}{3\eta}$

6 $\overrightarrow{\tau} = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}(y{=}0)\,\overrightarrow{e}_x$. Calcul à faire.