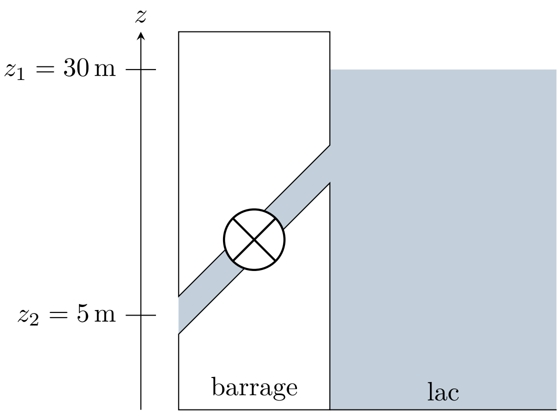
Bilans macroscopiques et ondes

Question de cours

Établir l'équation de d'Alembert pour la corde vibrante.

Exercice 1 : Production d'énergie hydroélectrique [oral banque PT]



L'eau d'un lac de retenue d'un barrage s'écoule par une conduite où se trouve une turbine. La conduite a un diamètre de sortie $D = 2{,}5\,\mathrm{m}$ et le débit volumique vaut $Q_{\mathrm{vol}} = 25\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$.

1 - Définir physiquement la notion de débit volumique.

2 - Donner sans calcul la vitesse à la surface du lac. Calculer la vitesse en sortie de la conduite.

3 - En appliquant la relation de Bernoulli, calculer la puissance maximale disponible sur la turbine.

4 - Le rendement est en pratique de 60 %, ce qui donne une puissance en sortie de turbine de 3,5 MW. Commenter les écarts et quantifier ce phénomène.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Le débit volumique représente le volume de fluide traversant une section donnée de la conduite par unité de temps, ou ici de façon équivalente le volume de fluide sortant de la conduite chaque seconde.

$\boxed{2}$ Le lac étant très grand par rapport à la conduite, on peut considérer qu'à la surface

$$v_1 \simeq 0\,.$$

La vitesse (débitante) en sortie de la conduite se déduit du débit volumique,

$$v_2 = \frac{Q_{\mathrm{vol}}}{S} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_2 = \frac{4Q_{\mathrm{vol}}}{\pi D^2} = 5{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

$\boxed{3}$ L'écoulement est incompressible et permanent. La relation de Bernoulli (corrigée) appliquée entre la surface du lac et la sortie de la conduite donne

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + w$$

où w est le travail indiqué *cédé* par le fluide, c'est-à-dire l'énergie massique perdue par le fluide dans la conduite.

> ***Rappel :*** *s'il est écrit côté sortie de la relation de Bernoulli modifiée, le travail indiqué est cédé par le fluide (il a cette énergie en entrée mais plus en sortie), s'il est écrit côté entrée alors il est reçu par le fluide.*

Dans le meilleur des cas, toute cette énergie est récupérée par la turbine. Comme $P_1 = P_2 = P_{\mathrm{atm}}$ et $v_1 = 0$ alors

$$w = g(z_2 - z_1) - \frac{v_2^2}{2}\,,$$

et comme $\mathcal{P} = \rho\, Q_{\mathrm{vol}} w$ alors

$$\boxed{\mathcal{P} = \rho\, Q_{\mathrm{vol}} \left[g(z_2 - z_1) - \frac{v_2^2}{2}\right] = 5{,}8\,\mathrm{MW}\,.}$$

$\boxed{4}$ La valeur donnée est cohérente avec celle trouvée ... ouf ! La différence vient des pertes de charge, non prises en compte dans la question précédente. Celles-ci sont de deux types : régulières le long de la conduite, et singulière à l'entrée. On exprime fréquemment la perte de charge sous forme d'une altitude Δz_c. Ici, elle correspond à 40 % du travail massique w soit

$$g\,\Delta z_\mathrm{c} = 0{,}4 w = 0{,}4 \frac{\mathcal{P}}{\rho Q_\mathrm{vol}}$$

d'où on déduit

$$\boxed{\Delta z_\mathrm{c} = 0{,}4 \frac{\mathcal{P}}{\rho\, g\, Q_\mathrm{vol}} = 9{,}5\,\mathrm{m}\,.}$$

Tout se passe donc comme si l'écoulement était parfait (pas de perte de charge) mais que le niveau de lac était plus bas de 9,5 m.

Bilans macroscopiques et ondes

Question de cours

Établir l'équation vérifiée par une onde de tension dans un câble coaxial sans pertes modélisé comme un milieu continu caractérisé par une inductance linéique et une capacité linéique.

Exercice 1 : Écoulement cryogénique [oral banque PT]

On étudie une conduite cryogénique calorifugée horizontale de rayon $R = 5\,\mathrm{cm}$. On y fait circuler de l'azote liquide à $77\,\mathrm{K}$, de masse volumique $\rho = 8{,}0 \cdot 10^2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ et de viscosité dynamique $\eta = 1{,}7 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$. Le débit volumique est $D_\mathrm{v} = 10\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

On note ΔP la différence de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite. La vitesse du fluide dans la conduite dépend de la coordonnée radiale r selon

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta}(R^2 - r^2)\,.$$

1 - Représenter le profil de vitesse et en déduire la nature de l'écoulement.

2 - Calculer le débit massique D_m et l'exprimer en fonction notamment de ΔP.

3 - Calculer la perte de charge ΔP_c dans la conduite. Que serait-elle si la conduite était verticale ?

4 - Déterminer la puissance $\mathcal{P}$ à fournir pour compenser cette perte de charge.

On remplace l'azote par de l'hélium superfluide, de viscosité nulle, c'est-à-dire tel que la vitesse de l'écoulement est uniforme sur toute section de la conduite.

5 - Quelle conséquence cela a-t-il sur la puissance à fournir ? Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Les lignes de courant sont des droites, l'écoulement est donc laminaire. Le profil de vitesse dans une section est parabolique avec vitesse nulle aux parois, voir figure 1, en conséquence de la viscosité du fluide.

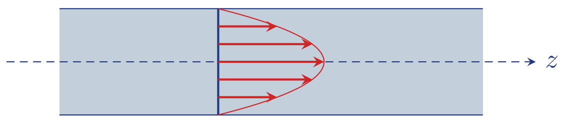


Figure 1 – Profil de vitesse dans l'écoulement.

$\boxed{2}$ Le débit massique se déduit du débit volumique par

$$\boxed{D_\mathrm{m} = \rho D_\mathrm{v} = 8\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.}$$

Le débit massique se calcule par une intégration sur une section transverse circulaire,

$$\begin{aligned}
D_\mathrm{m} &= \iint \rho\, v(r)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\rho\,\Delta P}{4\eta} \times \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R (R^2 - r^2)\, r\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi\,\rho\,\Delta P}{2\eta}\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R \\
&= \frac{\pi\,\rho\,\Delta P}{2\eta}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{D_\mathrm{m} = \frac{\pi\,\rho\,\Delta P\, R^4}{8\eta}\,.}$$

3 L'écoulement est permanent et incompressible mais ni homogène ni parfait : le théorème de Bernoulli s'applique le long d'une ligne de courant, entre l'entrée et la sortie de la conduite, et en tenant compte de la perte de charge ΔP_c,

$$\frac{P_\mathrm{e}}{\rho} + \frac{{v_\mathrm{e}}^2}{2} + g z_\mathrm{e} = \frac{P_\mathrm{s}}{\rho} + \frac{{v_\mathrm{s}}^2}{2} + g z_\mathrm{s} + \frac{\Delta P_\mathrm{c}}{\rho}\,.$$

Comme $\vec{v} = v\vec{u}_z$ alors les lignes de courant sont des droites parallèles à Oz, donc à rayon r fixé. La vitesse est donc constante sur une ligne de courant, d'où $v_\mathrm{s} = v_\mathrm{e}$. Comme la conduite est horizontale, alors $z_\mathrm{s} = z_\mathrm{e}$. Enfin, $P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s} = \Delta P$ par définition. Ainsi, il ne reste que

$$\boxed{\Delta P_\mathrm{c} = \Delta P\,.}$$

Si la conduite était verticale, on aurait

$$\boxed{\Delta P'_\mathrm{c} = \Delta P + \rho g (z_\mathrm{e} - z_\mathrm{s})\,.}$$

4 Pour maintenir le débit, il faut que la pompe compense exactement la perte de charge. Elle doit donc fournir une puissance

$$\mathcal{P} = D_\mathrm{m}\frac{\Delta P_\mathrm{c}}{\rho} = D_\mathrm{m}\frac{\Delta P}{\rho}\,.$$

Or d'après la question 2,

$$\Delta P = \frac{8\eta}{\pi \rho R^4} D_\mathrm{m}\,.$$

On en déduit

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{8\eta}{\pi R^4} {D_\mathrm{m}}^2 = 4\,\mathrm{kW}\,.}$$

> *Cet ordre de grandeur est tout à fait raisonnable : il correspond à peine plus que la consommation d'une machine à laver, et il est donc tout à fait accessible dans un laboratoire de recherche qui utiliserait de l'azote liquide.*

5 Si la vitesse est uniforme sur une section droite, cela signifie que le fluide n'est pas visqueux : $\eta = 0$. On constate sur l'expression de la puissance qu'elle devient nulle dans ce cas : le fluide n'a pas besoin que de la puissance lui soit apportée pour pouvoir s'écouler. Cela est physiquement cohérent car c'est la viscosité qui est responsable de la perte de charge que le pompe vient compenser.

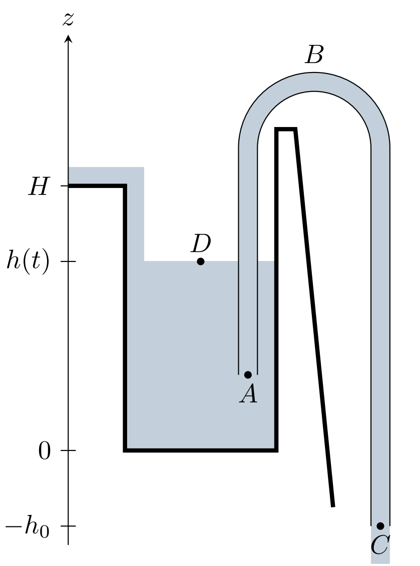
> *Cependant, l'utilisation de superfluides pose bien d'autres difficulté ... à commencer par le refroidissement à des températures de l'ordre de 4 K (limite pour que l'hélium soit superfluide).*

Bilans macroscopiques et ondes

Question de cours

Établir l'expression des longueurs d'onde λ_n et des fréquences f_n d'une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités.

Exercice 1 : Siphon



À la fonte des neiges, un bassin de surface $\Sigma = 100\,\mathrm{m}^2$ est alimenté en continu par un débit volumique $D_\mathrm{e} = 20\,\mathrm{L\cdot s^{-1}}$. Ce réservoir est dominé à l'une de ses extrémités par une butte, par dessus laquelle passe un tuyau cylindrique de section $S \ll \Sigma$ qui sert de siphon pour vider le bassin.

On nomme A le point d'entrée du siphon, B le point le plus haut du siphon, C la sortie du siphon, D un point de la surface libre dans le réservoir. La surface libre dans le réservoir et la sortie du siphon sont à la pression atmosphérique P_0.

1 - Que peut-on dire de la vitesse v_D ?

2 - Déterminer la vitesse du fluide en sortie du siphon. En déduire une condition sur C pour que le fluide s'écoule.

3 - Déterminer la pression P_B dans le fluide au point B. En déduire une condition sur B pour que le fluide s'écoule.

4 - À partir de la question précédente, expliquer pourquoi un siphon a besoin d'être amorcé. Que faut-il faire pour réaliser en pratique cet amorçage ?

5 - Déterminer les valeurs minimale et maximale de S pour que le système fonctionne correctement, c'est-à-dire que l'eau ne déborde pas du réservoir et que le siphon fonctionne sans se désamorcer.

Une fois l'été venu, le débit d'entrée se tarit puis s'annule. On suppose que le réservoir est alors à moitié rempli, $h = H/2$.

6 - Montrer que h est alors solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{S}{\Sigma}\sqrt{2g(h+h_0)} + D_0\,.$$

7 - Résoudre cette équation et déterminer le temps nécessaire pour vidanger complètement le réservoir.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

On suppose l'écoulement incompressible et parfait (sous-entendu par l'énoncé donc à préciser par le candidat !)

$\boxed{1}$ Compte tenu de la taille du bassin, de la faible valeur du débit d'entrée et de la différence entre S et Σ on peut faire l'hypothèse que $v_D \simeq 0$.

> *Attention, comme il y a un débit d'entrée il n'est pas possible d'utiliser la conservation du débit volumique sous la forme $\Sigma v_D = S v_C$.*

$\boxed{2}$ Théorème de Bernoulli appliqué le long d'une ligne de courant qui va de D à C :

$$P_0 + 0 + \rho g h = P_0 + \rho\frac{v_C^2}{2} + \rho g h_0 \qquad \text{d'où} \qquad v_C = \sqrt{2g(h+h_0)}$$

Il faut donc avoir $z_D > z_C$, c'est-à-dire que la sortie du siphon doit se trouver sous la surface libre du réservoir.

$\boxed{3}$ Bernoulli appliqué entre B et C :

$$P_B + \rho\frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B = P_0 + \rho\frac{v_C^2}{2} + \rho g z_C$$

Conservation du débit volumique : $v_B = v_C$ ce qui permet de simplifier, d'où

$$P_B = P_0 + \rho g(z_C - z_B)$$

Comme P_B doit être positive, alors $z_B < z_C + \dfrac{P_0}{\rho g}$

4 Lorsque le siphon est vide $P_B = P_0 = P_C$. Il faut aspirer pour faire monter le liquide dans le siphon.

5 Débit en sortie du siphon, connaissant v_C :

$$D_\mathrm{s} = S\sqrt{2g(h_0+h)}\,.$$

Bon fonctionnement du siphon :
▷ si $h = H$ alors il faut avoir $D_\mathrm{s} > D_\mathrm{e}$ sinon le réservoir déborde, d'où

$$s > \frac{D_\mathrm{e}}{\sqrt{2g(h_0+H)}} = 4{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

▷ si $h = z_A$ alors il faut avoir $D_\mathrm{s} < D_\mathrm{e}$ sinon le siphon se désamorce

$$s < \frac{D_\mathrm{e}}{\sqrt{2g(h_0+z_A)}} = 5{,}8\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

> *Énoncé pas très clair : si le réservoir déborde, est-ce par dessus la butte ou sur le côté gauche de la figure ? Cependant cela ne change rien à la résolution et c'est très simple à rectifier devant l'examinateur.*

6 Conservation du débit volumique, et attention car $\dot h_D = -v_D$

7 Séparation des variables :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2g(h+h_0)}} = -\frac{S}{\Sigma}\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \int_{H/2}^{0}\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2g(h+h_0)}} = -\frac{S}{\Sigma}\int_0^{\tau_\mathrm{vide}}\mathrm{d}t$$

On reconnaît à gauche l'intégrale d'une fonction de la forme $u'/2\sqrt{u}$ en la réécrivant sous la forme

$$\frac{1}{g}\int_{H/2}^{0}\frac{2g}{2\sqrt{2g(h+h_0)}}\mathrm{d}h = -\frac{S}{\Sigma}\int_0^{\tau_\mathrm{vide}}\mathrm{d}t$$

ce qui conduit à

$$\frac{1}{g}\left[\sqrt{2g\,(h+h_0)}\right]_{H/2}^{0} = -\frac{S}{\Sigma}\tau_\mathrm{vide}$$

et enfin

$$\boxed{\tau_\mathrm{vide} = \frac{\Sigma}{S}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{\frac{H}{2}+h_0} - \sqrt{h_0}\right)}$$

Bilans macroscopiques et ondes

Exercice 1 : Alimentation d'une maison depuis un château d'eau [écrit banque PT 2015]

On s'intéresse à une alimentation domestique en eau via un château d'eau. Le château d'eau est modélisé par un réservoir ouvert sur l'atmosphère, haut de $H = 20\,\mathrm{m}$ et de section maximale $S_0 = 25\,\mathrm{m}^2$, voir figure 1. Ce réservoir débouche sur une canalisation horizontale de section $s = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$. Cette canalisation alimente une installation domestique qui comporte un robinet ouvrant sur l'air atmosphérique par une ouverture de même section s.

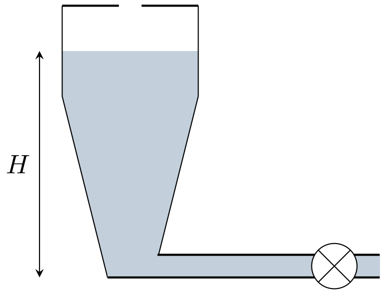


Figure 1 – Schéma général.

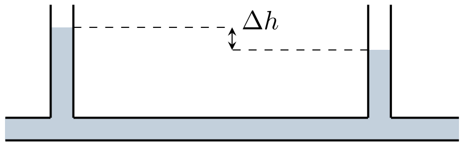


Figure 2 – Mesure de perte de charge.

1 - Justifier que la vitesse d'écoulement de l'eau au niveau de la surface libre est négligeable devant la vitesse dans la canalisation.

2 - Calculer numériquement le vitesse de l'eau en sortie du robinet en négligeant les pertes de charge.

3 - Calculer numériquement le débit volumique.

4 - La canalisation horizontale est le lieu d'une perte de charge régulière. Expliquer ce que cela signifie et en donner les causes. Exprimer le théorème de Bernoulli en introduisant un coefficient K caractéristique de cette perte de charge.

5 - Sur la canalisation horizontale on place deux tubes verticaux remplis d'eau séparés de $10\,\mathrm{m}$. On mesure une différence de hauteur d'eau $\Delta h = 2{,}0\,\mathrm{cm}$, voir figure 2. En déduire la perte de charge linéaire due au tuyau d'alimentation.

6 - Quelle est désormais la vitesse de l'eau en sortie du robinet situé à $1{,}0\,\mathrm{km}$ du chateau d'eau ?

7 - On souhaite retrouver la vitesse déterminée au début de l'exercice. On installe pour cela une pompe. Déterminer la puissance qu'elle doit fournir.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Tout au long de l'exercice, on raisonne implicitement sur des vitesses débitantes.

$\boxed{1}$ L'eau étant incompressible, il y a conservation du débit volumique, d'où on déduit

$$D_V = S_0 v_{\text{libre}} = s v_{\text{can}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{v_{\text{libre}}}{v_{\text{can}}} = \frac{s}{S_0} \ll 1\,.}$$

$\boxed{2}$ Supposons de plus l'écoulement stationnaire et parfait. Le théorème Bernoulli écrit le long d'une ligne de courant qui va du haut du chateau d'eau jusqu'à la sortie du robinet donne

$$\frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + 0 + gH = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{v_{\text{sortie}}^2}{2} + 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_{\text{sortie}} = \sqrt{2gH} = 20\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\,,}$$

en considérant que la pression dans le jet libre est égale à la pression atmosphérique P_{atm}.

$\boxed{3}$ En interprétant la vitesse précédente comme la vitesse débitante,

$$\boxed{D_V = v_{\text{sortie}}\, s = 20 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}} = 20\,\mathrm{L \cdot s^{-1}}\,.}$$

$\boxed{4}$ Une perte de charge régulière décrit une dissipation d'énergie mécanique du fluide par viscosité au sein du fluide et contre les parois de la canalisation. Le théorème de Bernoulli devient

$$\frac{P_\text{atm}}{\rho} + 0 + gH = \frac{P_\text{atm}}{\rho} + \frac{v_\text{sortie}^2}{2} + 0 + \frac{K}{\rho}\,.$$

> ***Rappel :*** *Une perte de charge peut s'exprimer indifféremment comme une pression ou comme une hauteur : ici K est homogène à une pression, mais on peut également l'écrire $K = \rho g K'$ où K' est une hauteur.*

$\boxed{5}$ Le fluide ne s'écoule pas dans les deux tubes verticaux, on y applique donc la loi de la statique des fluides pour en déduire la pression dans la canalisation : $P_\text{can} = P_0 + \rho g h$. La conservation du débit volumique indique que la vitesse d'écoulement v_can est la même sous les deux prises de pression. On en déduit en appliquant la relation de Bernoulli entre les deux tubes notés 1 et 2

$$\frac{P_\text{atm} + \rho g h_1}{\rho} + \frac{v_\text{can}^2}{2} + g z_\text{can} = \frac{P_\text{atm} + \rho g h_2}{\rho} + \rho\frac{v_\text{can}^2}{2} + \rho g z_\text{can} + \frac{K}{\rho}$$

d'où

$$K = \rho g (h_1 - h_2) = \rho\, g\, \Delta h\,.$$

La perte de charge linéaire k s'en déduit par $k = K/\Delta x$ avec $\Delta x = 1\,\text{m}$ la distance séparant les deux tubes,

$$\boxed{k = \frac{\rho\, g\, \Delta h}{\Delta x} = 20\,\text{Pa}\cdot\text{m}^{-1}\,.}$$

$\boxed{6}$ La perte de charge sur toute la longueur de canalisation vaut kL avec $L = 1{,}0\,\text{km}$. D'après la relation de Bernoulli appliquée entre le château d'eau et le robinet,

$$\frac{P_\text{atm}}{\rho} + 0 + gH = \frac{P_\text{atm}}{\rho} + \frac{v_\text{sortie}^2}{2} + 0 + kL \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_\text{sortie} = \sqrt{2\left(gH - \frac{kL}{\rho}\right)} = 13\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

> *Comme il n'y a aucun élément actif (pompe, etc.) pour l'imposer dans l'installation, le débit volumique est modifié par la perte de charge : on ne peut donc plus utiliser la valeur précédente pour calculer la vitesse.*

$\boxed{7}$ La perte de charge kL est l'énergie massique perdue par perte de charge, qu'il faut donc compenser par une pompe de puissance

$$\boxed{\mathcal{P} = \rho\, D_V\, kL = 4\cdot 10^5\,\text{W}\,.}$$