

# Ondes acoustiques et électromagnétiques

## Question de cours

Écrire sous forme réelle et sous forme complexe **les** champs d'une onde électromagnétique plane, progressive, harmonique, polarisée rectilignement dans la direction  $Oy$ , se propageant dans le vide dans le sens des  $z$  décroissants. Nommer les paramètres et le lien qui peut exister entre eux.

### Éléments de correction de l'exercice 0 :

On a  $\vec{k} = -\frac{\omega}{c}\vec{e}_z$  car propagation dans le sens des  $z$  décroissants,  $B_0 = E_0/c$ , et comme le trièdre  $(-k\vec{e}_z, E\vec{e}_y, \vec{B})$  doit être direct alors le champ magnétique est porté par  $+\vec{e}_x$ .

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = +B_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x.$$

## Exercice 1 : Trombone à coulisse

[inspiré Centrale PC 2015]

On s'intéresse au son émis par un trombone à coulisse, dont le principe de fonctionnement est décrit par les deux documents donnés en fin d'énoncé. Notons  $f_p$  et  $\ell_p$  la fréquence et la longueur tuyau associées à la position  $p$  de la coulisse, et on modélise la coulisse comme un tuyau sonore de section constante.

1 - D'après les documents, quelle est la nature de l'onde acoustique dans un trombone à coulisse? Représenter schématiquement les deux allures possibles pour le champ de pression dans la coulisse, en fonction de la nature de la condition aux limites à l'embouchure.

2 - Dans le cas des deux ondes ci-dessus, relier la longueur  $L$  de la coulisse à la longueur d'onde de l'onde sonore émise.

Une première question consiste à déterminer cette condition aux limites.

3 - Calculer la longueur d'onde lorsque la coulisse est en première position. Conclure en utilisant la question précédente.

4 - Représenter les profils de pression et de vitesse dans le tuyau lorsque la coulisse est en première position.

5 - En assimilant le trombone à un tuyau sonore de section constante, compléter le tableau ci-dessous. On pourra commencer par raisonner sur des notes séparées d'un ton.

Position de la coulisse	1	2	3	4	5	6	7
Fréquence de la note (Hz)	115,2						
Longueur de tuyau (m)	2,950	3,126					4,174

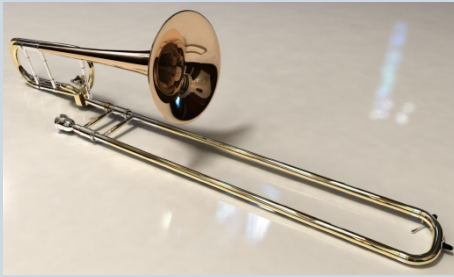
## Document 1 : Le trombone à coulisse

Le trombone est un instrument de musique à vent et à embouchure de la famille des cuivres clairs. Le terme désigne implicitement le trombone à coulisse caractérisé par l'utilisation d'une coulisse télescopique. Le trombone à coulisse est réputé pour être l'un des instruments les plus difficiles, mais également l'un des plus puissants d'un orchestre. Le trombone peut jouer des variations de nuances (intensités mesurées à 20 cm en sortie du trombone) allant d'une nuance *pp* (pianissimo = très faible) correspondant à 85 dB à une nuance *ff* (fortissimo = très fort) correspondant à 115 dB.

Le trombone peut, par variation de la position de la coulisse, émettre des sons de hauteurs différentes. On construit la version ténor en *sib*, en lui donnant, dans sa première position, c'est-à-dire, celle où la coulisse ne fonctionne pas, pour note fondamentale le *sib* de 115,2 Hz et pour longueur théorique 2,950 m. Les allongements produisent six autres positions, dont le son est à chaque fois abaissé d'un demi-ton. Le ton sépare deux sons dont les fréquences sont dans un rapport 8/9.

Les allongements de la coulisse sont obtenus par les mouvements du bras droit, la main gauche servant avec les lèvres à exercer le degré de pression nécessaire pour obtenir les harmoniques. On calcule les allongements d'après les

différences de longueur de tube qui correspondent à la production des sons fondamentaux. Pour un trombone ténor avec une première position, si $\flat$ , d'une longueur de 2,950 m, la deuxième, la (soit un demi-ton en dessous), a une longueur de 3,126 m et la septième de 4,174 m.



Position de la coulisse	Note fondamentale
1	si $\flat$
2	la
3	la $\flat$ = sol $\sharp$
4	sol
5	sol $\flat$ = fa $\sharp$
6	fa
7	mi

## Document 2 : Modéliser un instrument par un tuyau sonore

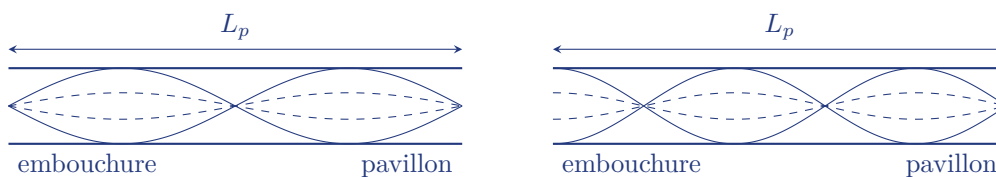
Une onde sonore est une perturbation mécanique (onde de compression-dilatation du milieu) qui se propage dans un milieu matériel. Cette onde se traduit d'une part par une surpression, appelée aussi pression acoustique, et d'autre part par un écoulement d'air se faisant à une vitesse appelée vitesse acoustique. Ces deux grandeurs sont l'analogie du déplacement et de la force de tension pour une corde vibrante.

Un tuyau sonore cylindrique peut être le siège d'un système d'ondes stationnaires, dans lequel les nœuds (resp. les ventres) de pression correspondent aux ventres (resp. aux nœuds) de vitesse. La position des nœuds et des ventres dans un tel tuyau dépend de la façon dont ses extrémités sont fermées. Une extrémité fermée par une paroi impose un ventre de pression alors qu'une extrémité ouverte sur l'extérieur impose au contraire un nœud de pression.

Un tuyau sonore peut souvent constituer une première modélisation d'un instrument de musique à vent. Le tuyau est alors ouvert au niveau du pavillon, mais la condition aux limites au niveau de l'embouchure dépend de la nature de celle-ci. Elle peut être de type « tuyau ouvert » ou « tuyau fermé » selon qu'il s'agit d'un instrument à embouchure de flûte (flûte à bec ou orgue), à anche (clarinette ou saxophone) ou à embouchure (trompette ou trombone à coulisse).

### Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 Les fréquences  $f_p$  des notes correspondent aux fréquences de résonance de la coulisse. Pour ces fréquences, une onde stationnaire est installée dans la coulisse et ses nœuds et ses ventres respectent les conditions aux limites. Le document 2 indique qu'il s'agit d'un nœud de pression au niveau du pavillon, mais ne précise pas s'il s'agit d'un nœud ou d'un ventre de pression au niveau de l'embouchure. La longueur de la coulisse doit donc correspondre à un multiple de la demi-longueur d'onde associée, auquel s'ajoute éventuellement un quart de longueur d'onde si les conditions aux limites sont dissymétriques, ce que résume la figure ci-dessous.



2 Traduit mathématiquement, cela indique que

$$L_p = n_p \frac{\lambda_p}{2}$$

avec  $n_p$  entier ou demi-entier. Supposons que l'indice  $n_p$  ne dépend pas de la position : on le notera simplement  $n$ . En utilisant la relation de dispersion, on trouve

$$f_p = \frac{c}{2L_p} n \quad n \text{ entier ou demi-entier.} \quad (1)$$

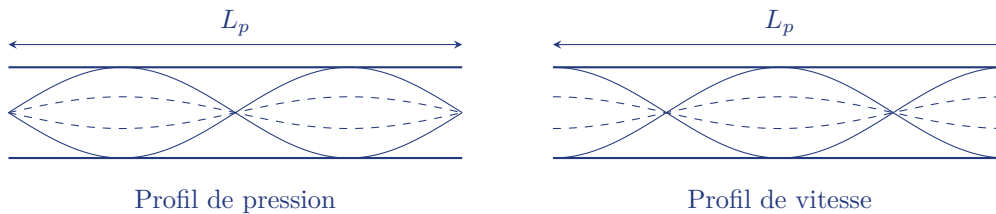
Par conséquent, l'indice de quantification  $n$  vaut

$$n = \frac{2L_1 f_1}{c} = 2$$

à partir des données du document 1 pour la première position. Il s'agit d'un nombre entier et non pas demi-entier. Cela signifie que **la condition aux limites imposée par les lèvres du tromboniste au niveau de l'embouchure est**

la même que celle imposée par l'atmosphère au niveau du pavillon, c'est-à-dire un nœud de pression et un ventre de vitesse. De surcroît, la valeur 2 indique que le tuyau compte un nœud de pression supplémentaire au centre du tuyau.

3 Comme les nœuds et les ventres sont inversés pour pression et vitesse, on en déduit les profils de surpression acoustique et de vitesse acoustique représentés ci-dessous.



4 Le document 1 précise que deux positions successives de la coulisse produisent des notes séparées d'un demi-ton et indique que le rapport des fréquences associées à des notes séparées d'un ton vaut 8/9. Cela permet de calculer de proche en proche les fréquences associées aux positions  $p$  impaires en partant de  $f_1$  par

$$f_{p+2} = \frac{8}{9} f_p$$

On peut ainsi remplir les premières cases,

Position	1	2	3	4	5	6	7
Fréquence (Hz)	115,2		<b>102,4</b>		<b>91,0</b>		<b>80,9</b>
Longueur (m)	2,950	3,126					4,174

En outre, la condition (1) indique que les fréquences de résonance sont inversement proportionnelles à la longueur  $L_p$  de la coulisse. Calculons de proche en proche les longueurs de tuyau pour les positions  $p$  en partant de  $L_1$  et  $L_2$  par

$$L_{p+2} = \frac{9}{8} L_p,$$

ce qui permet de compléter de nouvelles cases du tableau :

Position	1	2	3	4	5	6	7
Fréquence (Hz)	115,2		102,4		91,0		80,9
Longueur (m)	2,950	3,126	<b>3,318</b>	<b>3,517</b>	<b>3,734</b>	<b>3,956</b>	4,174

Évidemment, on pourrait utiliser la valeur de  $n$  calculée la question précédente. Néanmoins, il est plus prudent d'utiliser la relation de proportionnalité en cas d'erreur ... ce qui a aussi le mérite de donner un moyen de contrôle des résultats!

Les calculs peuvent être vérifiés en s'assurant que le produit  $L_p f_p$  ne dépend pas de  $p$  comme indiqué par la condition de quantification (1).

Calculer  $L_7 = 9L_5/8 = 4,200$  m ne donne pas exactement la valeur indiquée dans le document 1. Ce petit écart peut sans doute s'expliquer par la présence du pavillon du trombone, qui rend la modélisation par un tuyau de section constante moins précise.

Enfin, calculons les fréquences  $f_p$  pour  $p$  pair par proportionnalité déduite de la condition de quantification (1). Celle-ci indique

$$f_p = \frac{L_1}{L_p} f_1$$

Cela permet de terminer de compléter le tableau.

Position	1	2	3	4	5	6	7
Fréquence (Hz)	115,2	<b>108,7</b>	102,4	<b>96,6</b>	91,0	<b>85,9</b>	80,9
Longueur (m)	2,950	3,126	3,318	3,517	3,734	3,956	4,174

Cette fois, les calculs peuvent être vérifiés en s'assurant que  $f_{p+2} = 8f_p/9$ .



# Ondes acoustiques et électromagnétiques

## Question de cours

Établir l'équation de propagation de la surpression acoustique dans un tuyau sonore à une dimension cartésienne.

## Exercice 1 : Modélisation d'une oreille

[adapté Centrale PC 2015]

Commençons en préambule par rappeler deux résultats utiles relatifs à l'impédance et à l'intensité acoustique.

**1** - Rappeler la définition de l'impédance acoustique en fonction du champ de surpression acoustique  $p(x - ct)$  et du champ de vitesse  $v(x - ct)$  d'une onde acoustique plane progressive se propageant vers les  $x$  croissants.

On peut alors montrer que l'impédance acoustique d'un milieu de masse volumique au repos  $\rho_0$  dans lequel les ondes acoustiques se propagent à la célérité  $c$  vaut  $Z = \rho_0 c$ . Numériquement, on trouve  $Z_{\text{air}} = 4 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $Z_{\text{eau}} = 2 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Considérons maintenant une onde plane progressive harmonique de pulsation  $\omega$  :  $p(x, t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$ . On définit l'intensité d'une onde acoustique par la valeur moyenne de la norme du vecteur  $p\vec{v}$ .

**2** - Exprimer l'intensité  $I$  de cette onde en fonction de  $p_0$ ,  $\rho_0$  et  $c$ .

Passons au cœur du sujet. L'oreille se compose de trois parties, voir document 3 en fin d'énoncé : l'oreille externe, l'oreille moyenne et l'oreille interne. Les deux premières assurent le transfert des ondes sonores à l'oreille interne. L'oreille interne, ou cochlée, transforme ensuite ce stimulus mécanique en influx nerveux.

**3** - Le pavillon de l'oreille concentre l'énergie sonore. Pourquoi ?

Les ondes sonores captées par l'oreille externe font vibrer le tympan, qui mobilise la chaîne d'osselets de l'oreille moyenne. L'oreille moyenne transfère ainsi le son du milieu aérien (oreille externe) au milieu liquide de la cochlée (oreille interne). Nous allons en comprendre l'utilité.

Une onde acoustique incidente plane progressive harmonique se propage dans la direction de l'axe  $Ox$  d'un tuyau cylindrique. Une surface plane de masse négligeable sépare l'espace en deux régions occupées par deux fluides parfaits. Le fluide 1 occupe l'espace s'étendant de  $-\infty$  à  $x = 0$  et le fluide 2 l'espace s'étendant de  $x = 0$  à  $+\infty$ . Les impédances acoustiques seront notées  $Z_1$  et  $Z_2$  et la célérité des ondes acoustiques s'y propageant,  $c_1$  et  $c_2$ . Une partie de l'onde acoustique incidente est réfléchiée à l'interface entre les deux milieux alors qu'une autre est transmise.

**4** - Quelles relations les grandeurs liées aux ondes acoustiques présentes dans les deux milieux doivent-elles vérifier à la traversée de l'interface ?

**5** - Déterminer les coefficients de réflexion  $r$  et de transmission  $t$  pour la surpression de l'onde acoustique incidente en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$ .

**6** - Déterminer  $R$  et  $T$ , coefficients de réflexion et de transmission relatifs à l'intensité  $I$  en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$ .

**7** - Calculer  $R$  et  $T$  au passage de l'air à l'eau. Quelle est la chute de niveau d'intensité acoustique correspondant au passage de l'air à l'eau ? Conclure sur l'utilité de la chaîne d'osselets.

L'oreille moyenne est un amplificateur de pression qui est schématisé figure 1 : les articulations des osselets sont modélisées par des bras de levier, autour d'une liaison pivot (correspondant à l'ancrage de l'enclume). Les longueurs  $d_1$  et  $d_2$  des bras de levier diffèrent du fait des longueurs inégales des osselets et sont telles que  $d_1/d_2 \simeq 1,3$ .

**8** - Sachant que la surface de la platine de l'étrier est environ 20 fois inférieure à celle du tympan, déterminer l'amplification de pression théorique correspondant.

**9** - À quel gain cela correspond-t-il pour le niveau d'intensité acoustique ?

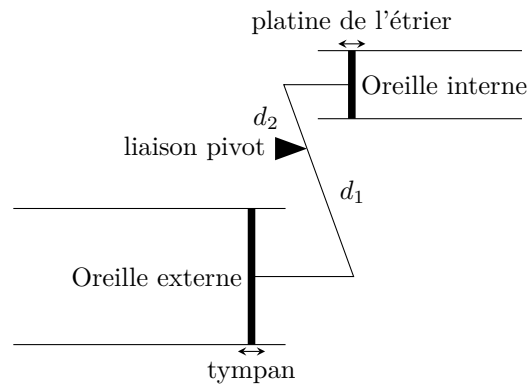


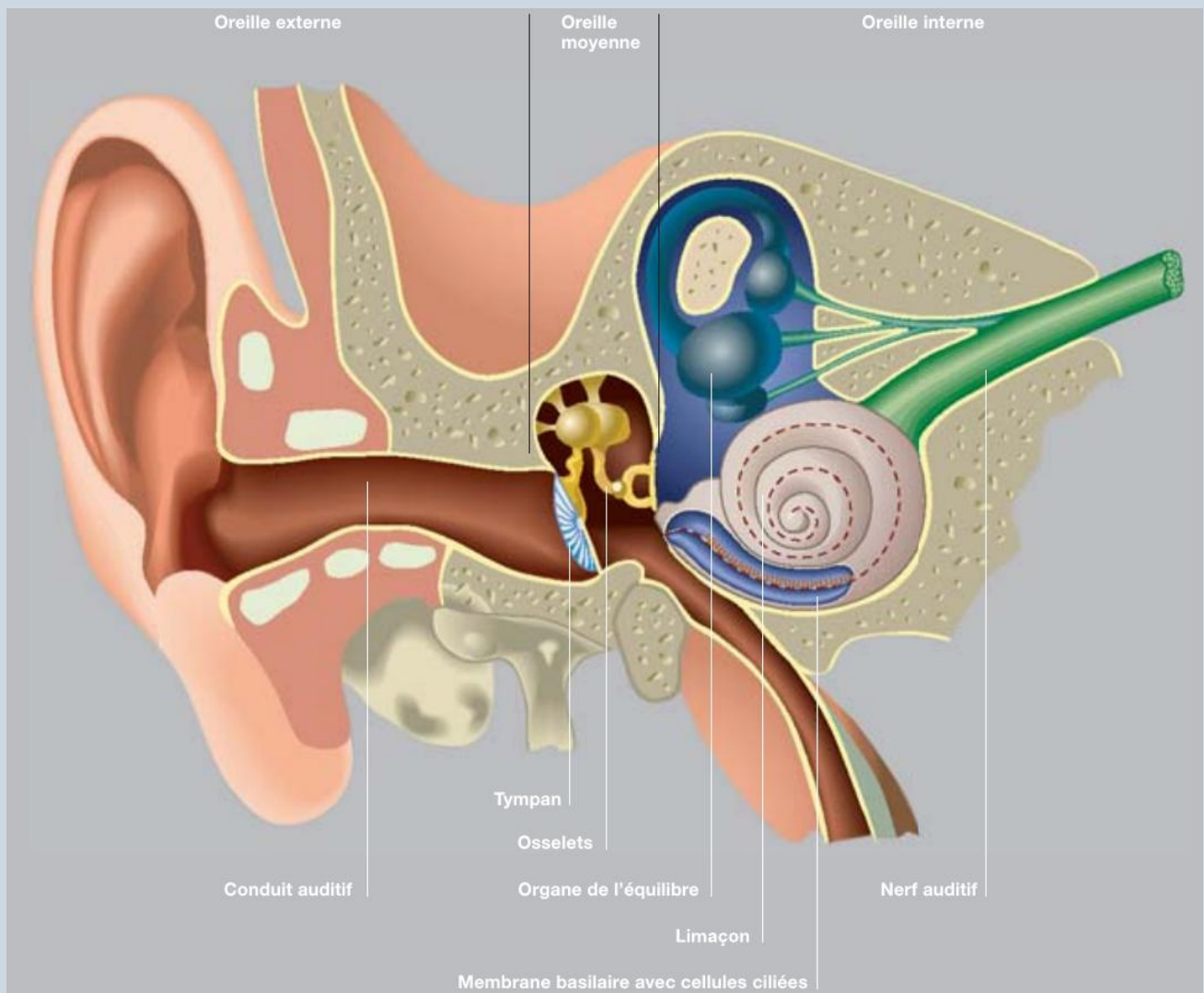
Figure 1 – Schéma de l'oreille moyenne.

### Document 3 : L'oreille : un organe fragile et complexe

**Oreille externe :** Elle se compose du pavillon de l'oreille (qui aide à localiser les sources sonores) et du conduit auditif. Ce dernier se termine par le tympan, qui réagit aux variations de pression comme la membrane d'un microphone.

**Oreille moyenne :** Les vibrations du tympan sont amplifiées dans l'oreille moyenne, puis transmises à l'oreille interne par trois osselets (le marteau, l'enclume et l'étrier), les plus petits du squelette humain. Le marteau est relié au tympan et l'étrier à la platine de l'étrier qui transmet la vibration au liquide de la cochlée.

**Oreille interne :** L'oreille interne abrite le limaçon (cochlée), de la taille d'un petit pois. Rempli d'un liquide, celui-ci est partagé en deux dans le sens de la longueur par la membrane basilaire.



**Éléments de correction de l'exercice 1 :**

1 Par définition  $p = Zv$ .

2 Comme  $v = p/Z$  alors

$$I = \langle \|p\vec{v}\| \rangle = \langle p^2/Z \rangle = \frac{p_0^2}{Z} \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle \quad \text{d'où} \quad \boxed{I = \frac{p_0^2}{2Z}}$$

3 La section externe du pavillon est supérieure à la section interne du conduit auditif. Si les réflexions ne sont pas trop importantes, la puissance transférée est à peu près conservée au travers de toute section du pavillon. Cela indique que le pavillon agit comme un grand capteur qui tend à concentrer l'énergie acoustique sur une section plus petite correspondant typiquement à celle du canal auditif.

4 Notons respectivement  $p_1, p_2, v_1$  et  $v_2$  les pressions et vitesses d'écoulement associées à l'onde acoustique dans les fluides 1 et 2. Comme il ne peut se créer d'espace vide dans le fluide, la vitesse d'écoulement doit être continue à l'interface,

$$\boxed{\forall t, \quad v_1(x = 0^-, t) = v_2(x = 0^+, t)}$$

Appliquons maintenant le principe fondamental de la dynamique à l'interface, dont la masse est négligée. L'interface de section  $S$  n'est soumise qu'aux forces de pression, d'où

$$\vec{0} = p_1(x = 0^-, t) S \vec{e}_x + p_2(x = 0^+, t) S (-\vec{e}_x)$$

En effet, la force appliquée par le fluide 2 sur l'interface est orientée du fluide 2 vers le fluide 1, donc selon  $-\vec{e}_x$ . Ainsi, la pression acoustique est également continue à l'interface :

$$\boxed{\forall t, \quad p_1(x = 0^-, t) = p_2(x = 0^+, t)}$$

5 Notons  $p_i, p_r$  et  $p_t$  les surpressions associées aux ondes incidente, réfléchie et transmise à l'interface et  $v_i, v_r$  et  $v_t$  la composante selon  $x$  des vitesses. Les coefficients de réflexion et de transmission pour la surpression sont définis par

$$r = \frac{p_r}{p_i} \quad \text{et} \quad t = \frac{p_t}{p_i}$$

Les continuités de la pression et de la vitesse se traduisent par

$$\begin{cases} p_i + p_r = p_t \\ v_i + v_r = v_t \end{cases}$$

Les ondes étant progressives, utilisons les impédances acoustiques pour exprimer les vitesses en fonction des surpressions. L'équation de continuité de la vitesse devient

$$\frac{1}{Z_1}(p_i - p_r) = \frac{1}{Z_2}p_t$$

En effet, l'onde réfléchie se propageant dans le sens des  $x$  décroissants, la relation entre surpression et vitesse acoustique s'écrit avec un signe  $-$ ,  $p_r = -Z_1 v_r$ . Diviser cette dernière relation et celle de continuité de la pression par  $p_i$  conduit à un système d'équations portant sur  $r$  et  $t$ ,

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ 1 - r = \frac{Z_1}{Z_2}t \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\begin{cases} r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \\ t = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \end{cases}}$$

Remarquons que  $r + t \neq 1$ . L'énergie doit être conservée à une interface, mais la surpression n'a pas de raison de l'être.

6 L'intensité sonore est définie par l'énoncé à la question I.B.2 comme étant la moyenne de la norme du vecteur  $p\vec{v}$ . Ainsi, en calculant les surpressions et vitesses en  $x = 0$  à tout instant  $t$ , le coefficient de réflexion en intensité sonore vaut

$$R = \frac{\langle p_r v_r \rangle}{\langle p_i v_i \rangle} = \frac{\langle p_r^2 \rangle / Z_1}{\langle p_i^2 \rangle / Z_1} = r^2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{T = \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2}$$

De même, le coefficient de transmission en intensité sonore vaut

$$R = \frac{\langle p_t v_t \rangle}{\langle p_i v_i \rangle} = \frac{\langle p_t^2 \rangle / Z_2}{\langle p_i^2 \rangle / Z_1} = \frac{Z_1}{Z_2} t^2 \quad \text{d'où} \quad T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}.$$

*L'intensité sonore est reliée à l'énergie, dont la conservation impose  $R + T = 1$ , ce qui est le cas ici et permet de vérifier les calculs.*

7 Les valeurs numériques de l'impédance acoustique conduisent à

$$R = 0,999 \quad \text{et} \quad T = 0,001.$$

L'intensité acoustique transmise chute donc d'un facteur 1000 au passage de l'air à l'eau, ce qui correspond à une atténuation de 30 dB.

Le document 3 indique que la cochlée est remplie de liquide alors que le tympan est dans l'air. Le rôle de la chaîne d'osselets est d'**améliorer la transmission d'énergie acoustique du tympan à la cochlée**, qui serait très peu efficace en son absence en raison des pertes par réflexion au changement de milieu. En termes de physicien, la chaîne d'osselets assure une adaptation mécanique d'impédance entre le tympan et la cochlée.

8 Supposons l'étrier en équilibre mécanique. Le moment exercé par le tympan doit donc être égal au moment exercé par la platine de l'étrier. Ces moments sont ceux de forces de pression. Notons d'une part  $P_{\text{tym}}$  la pression exercée par l'air sur le tympan, s'appliquant sur la surface du tympan  $S_{\text{tym}}$  et d'autre part  $P_{\text{coch}}$  la pression exercée par le liquide de la cochlée sur la platine de l'étrier de surface  $S_{\text{plat}}$ . L'égalité des moments se traduit alors par

$$P_{\text{tym}} S_{\text{tym}} d_1 = P_{\text{coch}} S_{\text{plat}} d_2 \quad \text{d'où} \quad \frac{P_{\text{coch}}}{P_{\text{tym}}} = \frac{S_{\text{tym}} d_1}{S_{\text{plat}} d_2} = 26.$$

9 La question 2 a permis de montrer que l'intensité sonore était proportionnelle au carré de la surpression acoustique. Par conséquent, l'amplification en pression se traduit par une **amplification de l'intensité sonore par un facteur environ 680**, soit environ 28 dB.



# Ondes acoustiques et électromagnétiques

## Question de cours

Établir l'expression des longueurs d'onde  $\lambda_n$  et des fréquences  $f_n$  d'une corde de longueur  $L$  fixée à ses deux extrémités.

## Exercice 1 : Onde électromagnétique entre deux conducteurs

[oral Mines-Ponts]

On considère un champ électrique dans le vide de la forme  $\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$ .

1 - Montrer que  $\omega = kc$ .

On admet que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont nuls dans un conducteur parfait. On donne les relations de passage entre deux milieux 1 et 2 :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \mu_0 \vec{j}_s = \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1),$$

où  $\sigma$  et  $\vec{j}_s$  sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

2 - On place un conducteur parfait en  $z = 0$ . Montrer que les relations de passage pour  $\vec{E}$  impliquent l'existence d'une onde réfléchie et donner son expression. Donner la nature de l'onde totale.

3 - Qu'en est-il pour  $\vec{B}$ ?

On ajoute un deuxième conducteur parfait en  $z = -L$ .

4 - Déterminer quels types d'onde peuvent exister et leurs caractéristiques. On introduira un entier  $n$ .

5 - Qu'impliquent les relations de passage pour  $\vec{B}$ ? Interpréter.

6 - Quelle est la puissance moyenne traversant une surface  $z = \text{cte}$ ?

### Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 D'après l'équation de d'Alembert,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad -k^2 \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \omega^2 = k^2 c^2$$

et avec  $\omega$  et  $k$  positifs

$$\boxed{\omega = kc.}$$

2 Appellons ① le vide ( $z < 0$ ) et ② le conducteur ( $z > 0$ ), soit  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{e}_z$ . En ne tenant compte que de l'onde incidente, d'après la relation de passage en  $z = 0$ ,

$$-E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z.$$

Comme  $E_0 \neq 0$ , il y a **contradiction** : il existe une onde réfléchie de la forme

$$\vec{E}_r = E'_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x.$$

La relation de passage permet de montrer que  $E'_0 = -E_0$ , l'onde réfléchie est en opposition de phase avec l'onde incidente. L'onde totale s'écrit

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 e^{i\omega t} (e^{-jkz} - e^{jkz}) \vec{e}_x$$

soit

$$\boxed{\vec{E} = -2jE_0 \sin(kz) e^{i\omega t} \vec{e}_x = 2E_0 \sin(kz) e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \vec{e}_x.}$$

Il s'agit d'une **onde stationnaire** : les variables de temps et d'espace sont découplées.

3 • **Méthode 1** : D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E} = +\frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{e}_y$$

compte tenu des termes nuls. Ainsi,

$$-j\omega \vec{B} = -2jE_0 k \cos(kz) e^{j\omega t} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) e^{j\omega t} \vec{e}_y},$$

en simplifiant  $k/\omega = 1/c$ .

• **Méthode 2 :** L'onde incidente et l'onde réfléchie sont deux OPPH, qui vérifient donc chacune la relation de structure. Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= \frac{k \vec{e}_z \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y \\ \vec{B}_r &= \frac{-k \vec{e}_z \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kz)} \vec{e}_y \end{aligned}$$

et pour l'onde résultante, par superposition,

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{j\omega t} (e^{-jkz} + e^{jkz}) \vec{e}_y \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) e^{j\omega t} \vec{e}_y}.$$

🔴🔴🔴 **Attention !** La relation de structure ne s'applique qu'à des OPPH. L'appliquer à une onde stationnaire est faux, le vecteur d'onde n'est même pas défini.

4 Comme précédemment, la relation de passage en  $z = -L$  impose que le champ total  $\vec{E}$  soit nul en  $z = -L$ , d'où on déduit

$$\sin(kL) = 0 \quad \text{d'où} \quad kL = n\pi, \quad n \text{ entier}, \quad \text{soit} \quad k = \frac{n\pi}{L}$$

Ces ondes sont les modes propres de la cavité formée des deux conducteurs. La relation précédente peut s'écrire en termes de longueurs d'onde ou de fréquence,

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{L}{2n} \quad \text{et} \quad f = \frac{kc}{2\pi} = \frac{nc}{2L}}.$$

On retrouve une claire analogie avec les modes propres d'une corde de Melde.

5 On s'intéresse au conducteur placé en  $z = 0$ . D'après la relation de passage,

$$\mu_0 \vec{j}_s = \vec{e}_z \wedge \left( \vec{0} - \frac{2E_0}{c} e^{j\omega t} \vec{e}_y \right) \quad \text{soit} \quad \mu_0 \vec{j}_s = \frac{2E_0}{c} e^{j\omega t} \vec{e}_x.$$

Ainsi, il existe un courant surfacique à la surface du conducteur parfait valant

$$\boxed{\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} e^{j\omega t} \vec{e}_x}.$$

Interprétons cette expression. Le champ électrique incident met en mouvement les électrons en surface du conducteur, d'où la direction  $\vec{e}_x$  du courant de surface. En retour, ce courant de surface crée également un champ électrique : le champ réfléchi. Ce champ existe non seulement dans le vide, mais aussi dans le conducteur, à ceci près qu'il se déplace selon  $+\vec{e}_z$ . Comme il est de même amplitude mais en opposition de phase avec le champ incident, cela permet d'interpréter la nullité du champ total dans le conducteur.

6 La puissance surfacique est reliée au vecteur de Poynting. En moyenne,

$$\langle \vec{P}_i \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \times 2E_0 \sin(kz) \times \frac{2E_0}{c} \cos(kz) \times \text{Re} \left( e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} e^{-j\omega t} \right) \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z$$

ce qui donne

$$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}}$$

car  $e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} e^{-j\omega t} = e^{-j\pi/2} = -j$ , c'est-à-dire un imaginaire pur. En moyenne, l'énergie ne se propage pas dans la cavité.

# Ondes acoustiques et électromagnétiques

## Exercice 1 : Champs d'un laser

[oral banque PT]

- 1 - Écrire le vecteur champ électrique d'une onde de pulsation  $\omega$  se déplaçant selon  $Oz$  polarisée rectilignement.
  - 2 - Comment caractériser expérimentalement le caractère polarisé d'une onde ?
  - 3 - On dispose d'un laser d'une puissance de 1 mW. Déterminer les amplitudes des champs électrique et magnétique.
- Donnée :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### Éléments de correction de l'exercice 1 :

- 1 Cf. cours :  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$  avec  $k = \omega/c$  et  $\vec{u}_x$  la direction de polarisation.
- 2 Cf. cours : l'intensité lumineuse en sortie d'un polariseur est nulle pour une certaine position, dans laquelle l'axe passant du polariseur est orthogonal à la direction de polarisation.
- 3 On assimile l'air au vide. D'après la relation de structure,

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}}{c} \quad \text{soit} \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y.$$

Le vecteur de Poynting s'écrit

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z.$$

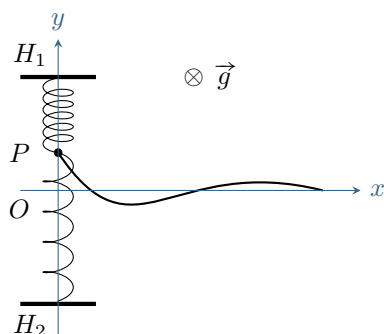
En modélisant le faisceau laser par un faisceau cylindrique de rayon  $a = 2 \text{ mm}$  (diffraction négligeable), la puissance moyenne portée par le faisceau vaut donc

$$\mathcal{P} = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \times \pi a^2 = \frac{E_0^2 \pi a^2}{\mu_0 c}.$$

On en déduit

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{P} \mu_0 c}{\pi a^2}} = 1,7 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad B_0 = \frac{E_0}{c} = 5,8 \cdot 10^{-7} \text{ T}.$$

## Exercice 2 : Corde vibrante attachée à deux ressorts



Une corde de masse linéique  $\mu$  et supposée infinie est attachée en  $P$  à un petit anneau de masse  $m$ , assimilé à un point matériel. Cet anneau se déplace horizontalement et sans frottement le long de l'axe  $(Oy)$  et on note  $Y(t)$  sa coordonnée. Il est fixé à deux ressorts identiques, de raideur  $k$  et longueur naturelle  $\ell_0$ , tels que  $OH_1 = OH_2 = \ell_0$ .

À l'instant initial, la corde est horizontale, tendue avec la tension  $T_0$ . L'anneau se trouve en  $O$  et on lui donne une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$ . On note  $c$  la célérité des ondes le long de la corde, et on pose

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{m} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{T_0}{2m\omega_0 c}.$$

- 1 - Exprimer la position  $y(x, t)$  d'un point de la corde situé à l'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  en fonction de  $Y$ .
- 2 - Établir l'équation du mouvement de l'anneau.
- 3 - Quels sont les comportements possibles de l'anneau ? Plusieurs cas sont à distinguer en fonction de la valeur de  $\alpha$ .
- 4 - Pour chacun de ces cas, représenter l'allure de la corde à un instant significatif.
- 5 - L'amortissement d'oscillations est en général imputé à une dissipation d'énergie. Qu'en est-il ici ?
- 6 - Question bonus : résoudre l'équation différentielle déterminée précédemment.

**Éléments de correction de l'exercice 2 :**

**1** L'onde sur la corde est progressive et comme la corde est infinie, il n'y a pas d'onde réfléchie. Le point  $P$  se trouve en  $x = 0$ , donc

$$y(x, t) = y\left(0, t - \frac{x}{c}\right) = Y\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

**2** L'anneau est soumis à la force exercée par le ressort du haut,

$$\vec{F}_{\text{haut}} = -k[(\ell_0 - Y) - \ell_0](-\vec{e}_y) = -kY,$$

à celle exercée par le ressort du bas

$$\vec{F}_{\text{bas}} = -k[(\ell_0 + Y) - \ell_0]\vec{e}_y = -kY$$

et à la force exercée par la corde

$$\vec{F}_{\text{corde}} = T_0 \sin \alpha(0, t) = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(0, t).$$

Ainsi, d'après le PFD,

$$m \frac{d^2 Y}{dt^2} = -2kY + T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(0, t)$$

soit en utilisant la question précédente

$$m \frac{d^2 Y}{dt^2} = -2kY + T_0 \times \left(-\frac{1}{c} \frac{dY}{dt}\right)$$

ce qui conduit à

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{dY}{dt} + \omega_0^2 Y = 0$$

**3** Équation différentielle de type OH amorti. Type de comportement dépend des valeurs de  $\alpha$ , via le signe du discriminant de l'équation caractéristique.

$$\Delta = 4\alpha^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\alpha^2 - 1)$$

Si  $\alpha < 1$  régime pseudo-périodique, donc plusieurs oscillations amorties. Si  $\alpha \geq 1$ , régime apériodique, donc pas d'oscillations du tout.

**4** Le chronogramme de  $P$  est facile à déterminer. L'allure de la corde est alors la même, mais en « inversée » : la partie de plus forte amplitude est celle émise par  $P$  pour les temps les plus courts, et c'est celle qui est donc visible en  $x$  les plus grands à un instant fixé.

**5** Pas de dissipation, mais il y a bien perte d'énergie sous forme d'une onde.