Colles semaine 25 – Sujet A — D'Arsonval, PSI* 2017-2018

Ondes électromagnétiques et phénomènes de dispersion

Question de cours

Écrire sous forme réelle et sous forme complexe **les** champs d'une onde électromagnétique plane, progressive, harmonique, polarisée rectilignement dans la direction Oy, se propageant dans le vide dans le sens des z décroissants. Nommer les paramètres et le lien qui peut exister entre eux.

Éléments de correction de l'exercice 0 :

On a $\overrightarrow{k} = -\dfrac{\omega}{c}\overrightarrow{e}_z$ car propagation dans le sens des z décroissants, $B_0 = E_0/c$, et comme le trièdre $(-k\overrightarrow{e}_z, E\overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{B})$ doit être direct alors le champ magnétique est porté par $+\overrightarrow{e}_x$.

$$\overrightarrow{E} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + kz)}\,\overrightarrow{e}_y \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{B} = +B_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + kz)}\,\overrightarrow{e}_x\,.$$

Exercice 1 : Diffusion thermique en régime sinusoïdal, onde thermique [écrit CCP MP 2014]

L'objet de cet exercice est d'étudier l'amortissement dans le sol des variations quotidiennes et annuelles de température, en vue de l'enfouissement d'une canalisation d'une installation géothermique.

On se place en repère cartésien, voir figure 1. La surface du sol, supposée plane et d'extension infinie, coïncide avec le plan (Oxy). La température au niveau de cette surface, notée $T(0,t)$, varie sinusoïdalement en fonction du temps t avec la pulsation ω autour d'une moyenne T_0 : $T(0,t) = T_0 + \alpha\cos(\omega t)$, où α est une constante. Soit un point M dans le sol repéré par ses coordonnées (x,y,z) avec $z \geq 0$. On cherche à déterminer le champ de température en M, noté $T(M,t)$.

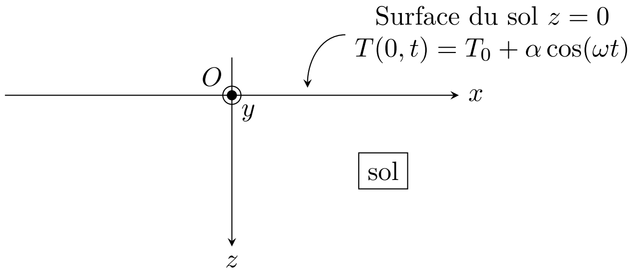

Figure 1 – Diffusion thermique dans le sol.

1 - Justifier que $T(M,t)$ ne dépend ni de x ni de y. On notera dans la suite $T(M,t) = T(z,t)$.

2 - Rappeler l'expression de la loi de Fourier relative à la conduction thermique, en rappelant les grandeurs intervenant dans cette loi. On notera λ la conductivité thermique du sol, supposée constante.

On travaille avec l'écart de température par rapport à T_0 en posant $\theta(z,t) = T(z,t) - T_0$. Tout autre péhnomène que la conduction thermique est négligé. On donne, dans le cadre de notre modèle, l'équation de la chaleur :

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\,,$$

où ρ et c désignent respectivement la masse volumique et la capacité thermique massique du sol. Ces deux paramètres sont supposés constants.

On cherche à résoudre l'équation de la chaleur en régime sinuoïdal permanent. À cet effet, on introduit la variable complexe $\underline{\theta}(z,t) = f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, avec $\mathrm{j}^2 = -1$ et $f(z)$ une fonction de z. L'inconnue $\theta(z,t)$ est alors donnée par $\theta(z,t) = \mathrm{Re}(\underline{\theta}(z,t))$ où Re désigne la partie réelle.

3 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(z)$. On fera intervenir la diffusivité thermique du sol donnée par $D = \lambda/\rho c$.

4 - Exprimer la solution générale de cette équation, en faisant intervenir deux constantes d'intégration notées A et B. Par un argument physique à préciser, montrer que l'une de ces constantes est nulle.

5 - Montrer que $\underline{\theta}(z,t)$ se met sous la forme

$$\underline{\theta}(z,t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - z/\delta)}\,,$$

où δ est une grandeur à exprimer en fonction de ω et D.

6 - Exprimer $T(z,t)$ à l'aide des paramètres T_0, δ, α, ω et des variables z et t. Interpréter physiquement l'expression obtenue. Interpréter physiquement le paramètre δ.

7 - Exprimer la profondeur L_{10} pour laquelle l'amplitude des variations de température dans le sol est atténuée d'un facteur 10 par rapport à celle de la surface du sol.

8 - On donne pour un sol humide $D = 0{,}25 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Calculer numériquement L_{10} dans le cas de la variation quotidienne de température, puis dans celui de la variation annuelle de température. À quelle profondeur préconiseriez-vous d'enfouir la canalisation de l'installation géothermique ?

9 - Calculer littéralement puis numériquement le décalage temporel Δt entre $T(z = L_{10}, t)$ et $T(0,t)$ dans les deux cas de la question précédente.

10 - Le modèle développé vous paraît-il pertinent ? Quels phénomènes non pris en compte dans le modèle peuvent intervenir ? Répondre succinctement.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Le sol et la température de surface sont invariantes par translation selon les axes (Ox) et (Oy), donc $T(M,t)$ également : **elle ne dépend que de z**.

$\boxed{2}$ La loi de Fourier relie le vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_{\mathrm{th}}$ au gradient de température T par

$$\boxed{\vec{j}_{\mathrm{th}} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T\,.}$$

$\boxed{3}$ En remplaçant dans l'équation de la chaleur,

$$\rho c\,\mathrm{j}\omega f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \lambda\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\rho c}{\lambda}\mathrm{j}\omega f(z) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{j}\omega}{D}f(z) = 0\,.}$$

$\boxed{4}$ Le polynôme caractéristique associé à cette équation différentielle s'écrit

$$r^2 - \frac{\mathrm{j}\omega}{D} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad r^2 = \mathrm{j}\frac{\omega}{D} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}\frac{\omega}{D} \qquad \text{soit} \qquad r = \pm\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}\sqrt{\frac{\omega}{D}} = \pm\frac{1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{D}}\,.$$

La solution générale s'écrit donc sous la forme

$$\boxed{f(z) = A\exp\left[(1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z\right] + B\exp\left[-(1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z\right]\,.}$$

Lorsque $z \to \infty$, le premier terme de cette solution diverge alors que la température reste finie. On en déduit que **la constante A est forcément nulle.**

$\boxed{5}$ La solution sur $\underline{\theta}$ s'écrit

$$\underline{\theta}(z,t) = B\exp\left[-z\sqrt{\frac{\omega}{2D}}\right]\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}z\right)\right]$$

Par identification avec la forme de l'énoncé, on pose

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}\,.}$$

En outre, à la surface du sol,

$$\underline{\theta}(0,t) \underbrace{=}_{\text{sol}} B\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \underbrace{=}_{\text{CL}} \alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \text{d'où} \qquad B = \alpha\,.$$

Ainsi,

$$\boxed{\underline{\theta}(z,t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - z/\delta)}\,.}$$

6 En prenant la partie réelle,

$$\theta(z,t) = \mathrm{Re}\,\underline{\theta}(z,t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - z/\delta\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{T(z,t) = T_0 + \alpha\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - z/\delta\right)\,.}$$

La température varie sinusoïdalement à la même pulsation que la température de surface, mais l'amplitude de ses variations est d'autant plus faible que l'on s'enfonce dans le sol. Le paramètre δ est la distance caractéristique sur laquelle l'amplitude diminue, c'est l'analogue d'une profondeur de peau en électromagnétisme.

> *Cette analogie n'est pas surprenante : l'équation de propagation des champs électromagnétiques dans un conducteur ohmique est une équation de diffusion, cf. cours sur les ondes électromagnétiques.*

7 La distance L_{10} est telle que

$$\mathrm{e}^{-L_{10}/\delta} = \frac{1}{10} \qquad \text{soit} \qquad -\frac{L_{10}}{\delta} = -\ln 10 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{L_{10} = \delta \ln 10\,.}$$

8 Les deux pulsations à considérer valent respectivement

$$\omega_{\text{jour}} = \frac{2\pi}{24\,\text{heures}} = 7{,}3\cdot 10^{-5}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \omega_{\text{an}} = \frac{2\pi}{365\,\text{jours}} = 2{,}0\cdot 10^{-7}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\,.$$

Les profondeurs caractéristiques associées valent respectivement

$$\boxed{L_{10,\text{jour}} = 20\,\text{cm} \qquad \text{et} \qquad L_{10,\text{an}} = 3{,}7\,\text{m}\,.}$$

Il faut donc enfouir la canalisation à quelques mètres sous terre pour s'affranchir des variations journalières de température.

> *En pratique, la géothermie de surface utilise des canalisaitons enfouies à environ 1 m sous le sol, ce qui est un compromis entre stabilité de la température et profondeur, donc coût, du forage.*

9 D'après la question 6, on peut écrire

$$T(z,t) = T_0 + \alpha\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\cos\left[\omega(t-\tau)\right] \qquad \text{avec} \qquad \tau(z) = \frac{z}{\delta\omega}\,.$$

Le retard pour $z = L_{10} = \delta\ln 10$ s'écrit donc

$$\Delta t = \tau(L_{10}) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta t = \frac{\ln 10}{\omega}\,.}$$

Numériquement,

$$\boxed{\Delta t_{\text{jour}} = 8 \text{ heures } 48 \text{ minutes} \qquad \text{et} \qquad \Delta t_{\text{an}} = 47 \text{ jours } 17 \text{ heures.}}$$

10 Le modèle développé est pertinent pour estimer des ordres de grandeur. En revanche, il ne prend pas en compte les variations saisonnières de la conductivité thermique du sol, qui dépend manifestement du taux d'humidité et donc de la pluviométrie.

Ondes électromagnétiques et phénomènes de dispersion

Question de cours

Établir l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide. Comment s'appelle-t-elle ? Montrer qu'une onde de la forme $\vec{E}(x,t) = f(x-ct)\vec{e}_x$ en est solution.

Exercice 1 : Guide d'ondes [d'après oral banque PT]

Un guide d'onde est constitué deux plans parfaitement conducteurs situés en $y=0$ et $y=a$ entre lesquels est confinée une onde électromagnétique de la forme

$$\vec{E} = \left[A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 y} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 y}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 x)}\vec{e}_z\,.$$

Donnée : On rappelle la relation de passage pour le champ électrique à l'interface entre deux milieux 1 et 2,

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}\,,$$

avec $\vec{n}_{1\to 2}$ le vecteur normal dirigé de 1 vers 2.

1 - Montrer que cette onde est une superposition de deux ondes planes progressives sinusoïdales (OPPS) dont on exprimera les vecteurs d'onde notés $\vec{k}_\pm$.

2 - Que valent les champs dans un conducteur parfait ? Établir une relation entre A et B et une condition sur k_2.

3 - Déterminer l'inclinaison $\theta_\pm$ des deux OPPS avec l'axe du guide en fonction de leur longueur d'onde λ et a.

4 - En déduire que toutes les ondes ne peuvent pas se propager dans le guide.

5 - Exprimer l'onde totale. Commenter sa structure dans les directions x et y.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ En développant les exponentielles complexes,

$$\vec{E} = A\,\mathrm{e}^{i(\omega t - k_1 x + k_2 y)}\vec{e}_z + B\,\mathrm{e}^{i(\omega t - k_1 x - k_2 y)}\,.$$

Il s'agit bien d'une superposition de deux OPPH, de vecteurs d'ondes respectifs $k_1\vec{e}_x \pm k_2\vec{e}_y$.

$\boxed{2}$ Les champs sont **nuls** dans un conducteur parfait. Considérons le plan $y=0$. Ce plan est de normale $\vec{e}_y$ et le champ polarisé selon $\vec{e}_z$: il est donc continu à l'interface. Ainsi, pour tout x et tout t,

$$\vec{E}(y=0) = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad (A+B)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 x)} = 0$$

d'où la relation

$$\boxed{A + B = 0\,.}$$

De même, la condition limite en $y=a$ s'écrit

$$\vec{E}(y=0) = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 a} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 a} = 0$$

et comme $A = -B$ alors

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 a} = 2\mathrm{i}\sin(k_2 a) = 0\,.$$

En introduisant un entier n positif, on en déduit

$$k_2 a = n\pi \qquad \text{soit} \qquad \boxed{k_2 = \frac{n\pi}{a}\,.}$$

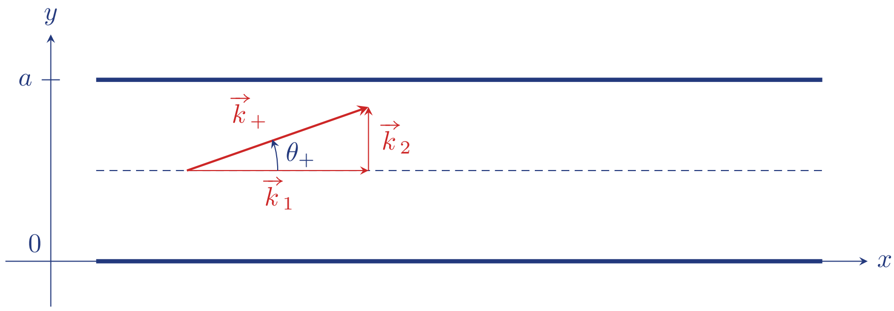

Figure 1 – Vecteur d'onde dans un guide d'onde. Le vecteur d'onde d'une seule des deux OPPH est représenté.

$\boxed{3}$ Raisonnons sur la figure 1. L'inclinaison de l'onde est donnée par celle de son vecteur d'onde $\overrightarrow{k}_\pm$. Géométriquement, on constate

$$\sin\theta_+ = \frac{k_2}{k_+}$$

On peut alors remplacer k_2 par son expression, et utiliser la relation de dispersion $k_+ = \omega/c$ car il s'agit du vecteur d'onde d'une OPPH. Ainsi,

$$\sin\theta_+ = \frac{n\pi/a}{\omega/c} = \frac{n\pi c}{a\omega} = \frac{2\pi c}{\omega}\frac{n}{2a}$$

et finalement

$$\boxed{\sin\theta_+ = \frac{n\lambda}{2a}\,.}$$

L'expression est la même pour l'onde $\ominus$ en changeant simplement le signe.

$\boxed{4}$ De la question précédente, on déduit

$$\sin\theta_+ = \frac{n\lambda}{2a} < 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lambda < \frac{2a}{n}\,.}$$

La plus petite valeur de n étant 1, on en déduit que seules les ondes de longueur d'onde

$$\lambda < \lambda_{\max} = 2a$$

peuvent se propager dans le guide.

$\boxed{5}$ Comme $A = -B$, alors

$$\overrightarrow{E} = A\left[e^{ik_2y} - e^{-ik_2y}\right]e^{i(\omega t - k_1x)}\overrightarrow{e}_z \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{E} = 2iA\sin(k_2y)\,e^{i(\omega t-k_1x)}\overrightarrow{e}_z\,.}$$

L'onde est donc de type **progressive** dans la direction x le long du guide, et **stationnaire** dans la direction y perpendiculaire.

Ondes électromagnétiques et phénomènes de dispersion

Question de cours

Établir la relation de structure (équation entre $\vec{k}, \vec{E}$ et $\vec{B}$) des OPPH électromagnétiques dans le vide.

Exercice 1 : Onde électromagnétique entre deux conducteurs [oral Mines-Ponts]

On considère un champ électrique dans le vide de la forme $\vec{E}_\mathrm{i} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)}\,\vec{e}_x$.

1 - Montrer que $\omega = kc$.

On admet que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans un conducteur parfait. On donne les relations de passage entre deux milieux 1 et 2 :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2} \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_\mathrm{s} \wedge \vec{n}_{1\to 2} \qquad \mu_0 \vec{j}_\mathrm{s} = \vec{n}_{1\to 2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\,,$$

où σ et $\vec{j}_\mathrm{s}$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

2 - On place un conducteur parfait en $z = 0$. Montrer que les relations de passage pour $\vec{E}$ impliquent l'existence d'une onde réfléchie et donner son expression. Donner la nature de l'onde totale.

3 - Qu'en est-il pour $\vec{B}$?

On ajoute un deuxième conducteur parfait en $z = -L$.

4 - Déterminer quels types d'onde peuvent exister et leurs caractéristiques. On introduira un entier n.

5 - Qu'impliquent les relations de passage pour $\vec{B}$? Interpréter.

6 - Quelle est la puissance moyenne traversant une surface $z = \mathrm{cte}$?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ D'après l'équation de d'Alembert,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad -k^2\vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \omega^2 = k^2c^2$$

et avec ω et k positifs

$$\boxed{\omega = kc\,.}$$

$\boxed{2}$ Appelons ① le vide ($z < 0$) et ② le conducteur ($z > 0$), soit $\vec{n}_{1\to 2} = \vec{e}_z$. En ne tenant compte que de l'onde incidente, d'après la relation de passage en $z = 0$,

$$-E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\vec{e}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z\,.$$

Comme $E_0 \neq 0$, **il y a contradiction** : il existe une onde réfléchie de la forme

$$\vec{E}_\mathrm{r} = E_0'\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}\vec{e}_x\,.$$

La relation de passage permet de montrer que $E_0' = -E_0$, l'onde réfléchie est en opposition de phase avec l'onde incidente. L'onde totale s'écrit

$$\vec{E} = \vec{E}_\mathrm{i} + \vec{E}_\mathrm{r} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\right)\vec{e}_x$$

soit

$$\boxed{\vec{E} = -2\mathrm{j}E_0\sin(kz)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\vec{e}_x = 2E_0\sin(kz)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}\vec{e}_x\,.}$$

Il s'agit d'une **onde stationnaire** : les variables de temps et d'espace sont découplées.

$\boxed{3}$ • **Méthode 1 :** D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = +\frac{\partial E_x}{\partial z}\,\vec{e}_y$$

compte tenu des termes nuls. Ainsi,

$$-\mathrm{j}\omega\vec{B} = -2\mathrm{j}E_0 k\cos(kz)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{B} = \frac{2E_0}{c}\cos(kz)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\vec{e}_y\,,}$$

en simplifiant $k/\omega = 1/c$.

• **Méthode 2 :** L'onde incidente et l'onde réfléchie sont deux OPPH, qui vérifient donc chacune la relation de structure. Ainsi,

$$\vec{B}_\mathrm{i} = \frac{k\,\vec{e}_z \wedge \vec{E}_\mathrm{i}}{\omega} = \frac{E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)}\vec{e}_y$$
$$\vec{B}_\mathrm{r} = \frac{-k\,\vec{e}_z \wedge \vec{E}_\mathrm{r}}{\omega} = \frac{E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}\vec{e}_y$$

et pour l'onde résultante, par superposition,

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\right)\vec{e}_y \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{B} = \frac{2E_0}{c}\cos(kz)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\vec{e}_y\,.}$$

> ***Attention !*** *La relation de structure ne s'applique qu'à des OPPH. L'appliquer à une onde stationnaire est faux, le vecteur d'onde n'est même pas défini.*

4 Comme précédemment, la relation de passage en $z = -L$ impose que le champ total $\vec{E}$ soit nul en $z = -L$, d'où on déduit

$$\sin(kL) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad kL = n\pi, \quad n \text{ entier}, \qquad \text{soit} \qquad k = \frac{n\pi}{L}$$

Ces ondes sont les modes propres de la cavité formée des deux conducteurs. La relation précédente peut s'écrire en termes de longueurs d'onde ou de fréquence,

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{L}{2n} \qquad \text{et} \qquad f = \frac{kc}{2\pi} = \frac{nc}{2L}\,.}$$

> *On retrouve une claire analogie avec les modes propres d'une corde de Melde.*

5 On s'intéresse au conducteur placé en $z = 0$. D'après la relation de passage,

$$\mu_0\,\vec{j}_\mathrm{s} = \vec{e}_z \wedge \left(\vec{0} - \frac{2E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\vec{e}_y\right) \qquad \text{soit} \qquad \mu_0\,\vec{j}_\mathrm{s} = \frac{2E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\vec{e}_x\,.$$

Ainsi, il existe un courant surfacique à la surface du conducteur parfait valant

$$\boxed{\vec{j}_\mathrm{s} = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\vec{e}_x\,.}$$

Interprétons cette expression. Le champ électrique incident met en mouvement les électrons en surface du conducteur, d'où la direction $\vec{e}_x$ du courant de surface. En retour, ce courant de surface créé également un champ électrique : le champ réfléchi. Ce champ existe non seulement dans le vide, mais aussi dans le conducteur, à ceci près qu'il se déplace selon $+\vec{e}_z$. Comme il est de même amplitude mais en opposition de phase avec le champ incident, cela permet d'interpréter la nullité du champ total dans le conducteur.

6 La puissance surfacique est reliée au vecteur de Poynting. En moyenne,

$$\langle\vec{Pi}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}^\star}{\mu_0}\right) = \frac{1}{2\mu_0} \times 2E_0\sin(kz) \times \frac{2E_0}{c}\cos(kz) \times \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right)\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z$$

ce qui donne

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \vec{0}}$$

car $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} = -\mathrm{j}$, c'est-à-dire un imaginaire pur. En moyenne, l'énergie ne se propage pas dans la cavité.

Ondes électromagnétiques et phénomènes de dispersion

Exercice 1 : Champs d'un laser [oral banque PT]

1 - Écrire le vecteur champ électrique d'une onde de pulsation ω se déplaçant selon Oz polarisée rectilignement.

2 - Comment caractériser expérimentalement le caractère polarisé d'une onde ?

3 - On dispose d'un laser d'une puissance de 1 mW. Déterminer les amplitudes des champs électrique et magnétique.

Donnée : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Cf. cours : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x$ avec $k = \omega/c$ et $\vec{u}_x$ la direction de polarisation.

$\boxed{2}$ Cf. cours : l'intensité lumineuse en sortie d'un polariseur est nulle pour une certaine position, dans laquelle l'axe passant du polariseur est orthogonal à la direction de polarisation.

$\boxed{3}$ On assimile l'air au vide. D'après la relation de structure,

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}}{c} \qquad \text{soit} \qquad \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz)\vec{u}_y\,.$$

Le vecteur de Poynting s'écrit

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{{E_0}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz)\vec{u}_z\,.$$

En modélisant le faisceau laser par un faisceau cylindrique de rayon $a = 2\,\mathrm{mm}$ (diffraction négligeable), la puissance moyenne portée par le faisceau vaut donc

$$\mathcal{P} = \left\langle ||\vec{\Pi}|| \right\rangle \times \pi a^2 = \frac{{E_0}^2 \pi a^2}{\mu_0 c}\,.$$

On en déduit

$$\boxed{E_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{P}\,\mu_0\,c}{\pi a^2}} = 1{,}7 \cdot 10^2\,\mathrm{V \cdot m^{-1}} \qquad \text{et} \qquad B_0 = \frac{E_0}{c} = 5{,}8 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}\,.}$$