Révisions de thermodynamique

Question de cours

Énoncer le premier principe de la thermodynamique sous forme différentielle.

Exercice 1 : Pompe à chaleur suivant un cycle de Joule

Une pompe à chaleur fonctionnant avec une quantité de matière n d'air effectue le cycle de Joule inversé suivant :

- ▷ l'air pris dans l'état A de température $T_0 = 283\,\mathrm{K}$ et de pression P_0 est comprimé suivant une adiabatique quasi-statique jusqu'au point B où il atteint la pression $P_1 = 5P_0$;
- ▷ il est ensuite refroidi à pression constante et atteint la température finale de la source chaude $T_1 = 298\,\mathrm{K}$ correspondant à l'état C ;
- ▷ l'air est encore refroidi dans une turbine suivant une détente adiabatique quasi-statique pour atteindre l'état D où il retrouve la pression P_0 ;
- ▷ il se réchauffe enfin au contact de la source froide et retrouve son état initial.

L'air est modélisé par un gaz parfait de rapport isentropique $\gamma = 1{,}4$, indépendant de la température. On pose $\beta = 1 - 1/\gamma$ et $a = P_1/P_0 = 5$. On rappelle la constante des gaz parfaits $R = 8{,}31\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$.

1 - Représenter le cycle parcouru par le gaz dans un diagramme de Watt (P, V).

2 - Exprimer les températures T_B et T_D en fonction de T_0, T_1, a et β. Calculer leurs valeurs numériques.

3 - Exprimer l'efficacité de la pompe à chaleur en fonction de a et β. Calculer sa valeur numérique et comparer à l'efficacité d'une pompe à chaleur de Carnot fonctionnant avec les mêmes sources. Commenter.

4 - Établir l'expression de l'entropie crée au cours d'un cycle en fonction de R, β et $x = a^\beta T_0/T_1$. Quel est son signe ?

5 - Sachant qu'en régime permanent les fuites thermiques de la maison s'élèvent à $20\,\mathrm{kW}$, calculer la puissance à fournir au moteur de la pompe à chaleur pour maintenir la température de la maison constante.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 Deux isobares horizontales, et deux adiabatiques en $1/V^\gamma$.

2 Transformations adiabatiques quasi-statiques donc réversibles : on peut appliquer la loi de Laplace sous la forme $P^{1-\gamma}T^\gamma = \mathrm{cte}$, soit

$$T_B = T_0 a^\beta = 448\,\mathrm{K} \qquad \text{et} \qquad T_D = T_1 a^{-\beta} = 188\,\mathrm{K}\,.$$

3 Efficacité

$$e = -\frac{Q_{BC}}{W} = \frac{Q_{BC}}{Q_{BC} + Q_{DA}}$$

Transformations BC et DA isobares, donc d'après le premier principe

$$\Delta H = C_P \Delta T = Q$$

En appliquant cette relation aux deux formules, en reportant dans l'efficacité, et avec la quesiton précédente, on en déduit

$$e = \frac{1}{1 - a^{-\beta}} = 2{,}71\,.$$

à comparer avec $e_{\text{Carnot}} = T_1/(T_1 - T_0) = 19{,}9$. Irréversibilité thermique dans les transformations BC et CD.

4 Comme le fonctionnement est cyclique,

$$S_{\text{cr}} = -S_{\text{éch}} = -\frac{Q_{BC}}{T_1} - \frac{Q_{DA}}{T_0} = \frac{nR}{\beta}\left(x + \frac{1}{x} - 2\right) = \frac{nR}{\beta}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$$

comme attendu strictement positive pour toute valeur de x.

5 Régime permanent, donc il faut fournir exactement ce qui est perdu, d'où

$$\mathcal{P}_{\text{méca}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{fuites}}}{e} = 7{,}4\,\mathrm{kW}.$$

Étienne Thibierge, 5 octobre 2017, www.etienne-thibierge.fr

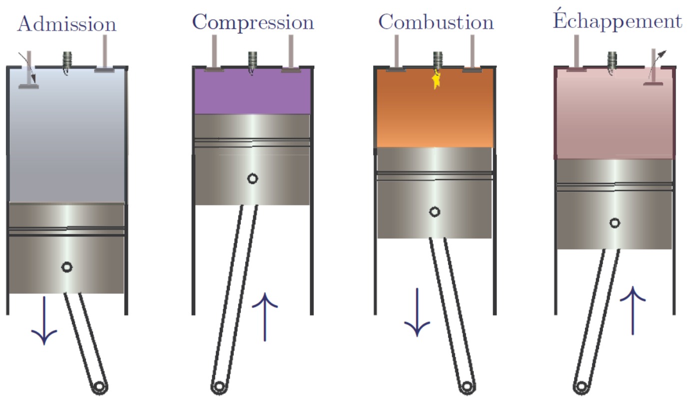
Révisions de thermodynamique

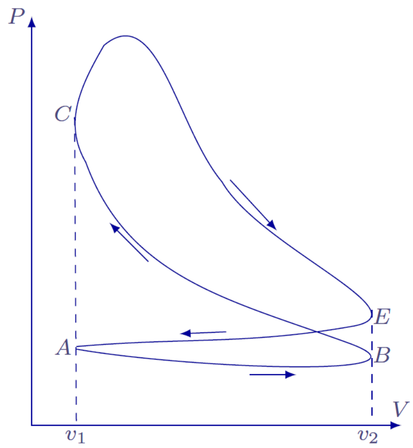
Question de cours

Énoncer le second principe de la thermodynamique sous forme différentielle.

Exercice 1 : Moteur à quatre temps [oral CCP]

On étudie le fonctionnement d'un moteur à quatre temps dont le schéma représentatif est donné ci-dessous, de même que la représentation du cycle dans un diagramme de Watt $P - V$.





Le mélange de gaz subissant le cycle sera assimilé à un gaz parfait d'indice adiabatique $\gamma = c_P/c_V$.

1 - Identifier les différentes transformations du cycle réel sur le diagramme $P - V$.

2 - Modéliser le cycle réel par un cycle théorique comprenant six transformations, en utilisant des transformations réversibles isochores, isobares et adiabatiques. Déterminer les équations correspondant à chaque transformation.

3 - Comparer le cycle réel et le cycle modèle, segment par segment, en explicitant les phénomènes négligés dans le cycle modèle.

4 - A quoi l'aire du cycle correspond-elle ?

5 - Définir le rendement thermodynamique du moteur. L'exprimer, pour le cycle théorique établi question précédemment, en fonction des chaleurs reçues aux cours des phases isochores.

6 - Calculer le rendement du cycle théorique, en fonction des volumes minimal et maximal V_1 et V_2, et de γ.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ A-B : admission, B-C : compression, C-E : combustion, E-A : échappement. Se trouve facilement à partir des variations de volume, et on vérifie que c'est raisonnablement compatible avec les variations de pression.

$\boxed{2}$ Voir figure 1. A-B : isobare ; B-C : adiabatique ; C-D avec D sommet : isochore ; D-E : adiabatique ; E-B : isochore (chute de pression dès que la soupape d'échappement s'ouvre) ; B-A : isobare. Équations des branches : $P =$ cte ou $V =$ cte ou $PV^\gamma =$ cte pour les adiabatiques.

$\boxed{3}$ A-B : on néglige la dépression due à l'entrée de l'air. B-C : on néglige les pertes thermiques par conduction dans le cyclindre. C-D : on néglige le fait que le volume augmente légèrement pendant l'explosion. D-E : idem B-C. E-A : on néglige la surpression.

$\boxed{4}$ Travail.

$\boxed{5}$ $\eta = -\dfrac{W_{BC} + W_{DE}}{Q_{CD}}$ car Q_{EB} se fait avec l'extérieur et n'est donc pas coûteux. D'après le premier principe appliqué au gaz sur le cycle,

$$W_{BC} + W_{DE} + Q_{CD} + Q_{EB} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \eta = \frac{Q_{CD} + Q_{EB}}{Q_{CD}} = 1 + \frac{Q_{EB}}{Q_{CD}}$$

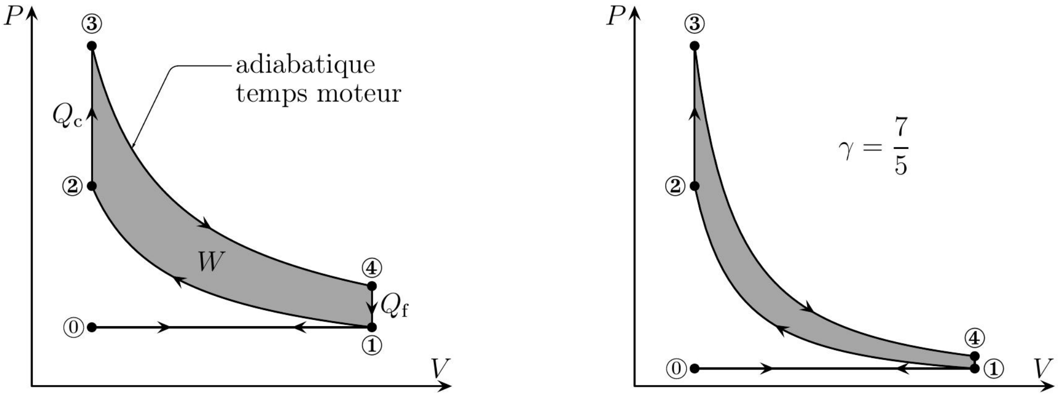


Figure 1 – Représentation du cycle de Beau de Rochas dans le diagramme de Watt. Le diagramme de gauche est déformé pour mieux visualiser le cycle, mais le diagramme de droite correspond au cycle d'un gaz parfait diatomique représenté à l'échelle. Figure extraite du cours en ligne de Matthieu Rigaut.

Comme $Q_{EB} < 0$ on a bien $\eta < 1$.

6 Au cours de l'isochore C-D :

$$\Delta U_{CD} = Q_{CD} + 0 = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_D - T_C)$$

Au cours de l'isochore E-B : idem, donc $Q_{EB} = \dfrac{nR}{\gamma - 1} (T_E - T_B)$.

Pour passer aux volumes, il faut utiliser la loi de Laplace sous la forme $TV^{\gamma-1} =$ cte sur les adiabatiques et ensuite simplifier. On arrive à

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}}\right)^{1-\gamma}$$

Révisions de thermodynamique

Question de cours

Indiquer le sens réel des échanges d'énergie pour une pompe à chaleur. Définir son efficacité. Établir le théorème de Carnot.

Exercice 1 : Formation de la neige artificielle [adapté oral CCP]

La neige artificielle est obtenue en pulvérisant de fines gouttes d'eau liquide à $T_1 = 10\,°\mathrm{C}$ dans l'air ambiant à $T_\mathrm{a} = -15\,°\mathrm{C}$. On suppose que cette goutte reçoit de la part de l'air extérieur, pendant la durée $\mathrm{d}t$, un transfert thermique $\delta Q = h\,[T_\mathrm{a} - T(t)]\,S\,\mathrm{d}t$ où $h = 65\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ est un coefficient phénoménologique dit conducto-convectif, et S est la surface de la goutte.

Données :
- ▷ masse volumique de l'eau liquide $\rho = 1{,}00 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$;
- ▷ capacité thermique massique à pression constante $c_P = 4{,}18 \cdot 10^3\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$;
- ▷ enthalpie massique de fusion de la glace $\ell_\mathrm{fus} = 335\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.

1 - Dans un premier temps la goutte d'eau supposée sphérique de rayon $R = 0{,}20\,\mathrm{mm}$ se refroidit en restant liquide. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$.

2 - En déduire la durée t_1 au bout de laquelle $T(t)$ est égale à $T_0 = -5{,}0\,°\mathrm{C}$.

3 - Lorsque la goutte atteint la température $T_0 = -5{,}0\,°\mathrm{C}$, la surfusion cesse : la goutte est partiellement solidifiée et sa température devient égale à $0{,}0\,°\mathrm{C}$. Calculer la fraction x de liquide restant à solidifier en supposant la transformation très rapide et adiabatique.

4 - Au bout de combien de temps t_2 la goutte est-elle complètement solidifiée ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

En oral, seule était rappelée la loi de Newton : flux conduto-convectif $\Phi = h\,[T_\mathrm{a} - T]$.

$\boxed{1}$ Premier principe appliqué à la goutte pendant $\mathrm{d}t$ (transfo monobare) :

$$\mathrm{d}H \underbrace{=}_{\text{échanges}} h\,[T_\mathrm{a} - T(t)]\,4\pi R^2\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{\text{liquide}} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho\, c_P\,\mathrm{d}T$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{3h}{\rho R c_P} T = \frac{3h}{\rho R c_P} T_\mathrm{a}$$

et évidemment on pose $\tau = \rho R c_P / 3h$.

$\boxed{2}$ ▷ Solution particulière : $T_\mathrm{part} = T_\mathrm{a}$;
▷ Solution homogène : $T_\mathrm{hom} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$;
▷ Détermination de la constante sur la solution **complète** :

$$T(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} T_\mathrm{a} + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \underbrace{=}_{\text{CI}} T_1$$

d'où

$$T(t) = T_\mathrm{a} + (T_1 - T_\mathrm{a})\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

On résout ensuite $T(t_1) = T_0$, d'où

$$t_1 = \tau \ln \frac{T_1 - T_\mathrm{a}}{T_0 - T_\mathrm{a}} = 3{,}9\,\mathrm{s}\,.$$

$\boxed{3}$ On sait qu'à la fin l'eau est diphasée, donc à $T_\mathrm{fus} = 0\,°\mathrm{C}$. Raisonnement sur une transformation auxilliaire : d'abord toute l'eau liquide chauffe de T_0 à T_fus, puis ensuite une fraction $(1 - x)$ solidifie.

$$\Delta H \underbrace{=}_{\text{1er ppe}} 0 \underbrace{=}_{\text{transf.aux.}} m c_P (T_\mathrm{fus} - T_0) + m(1 - x)(-\ell_\mathrm{fus})$$

d'où on isole

$$x = 1 - \frac{c_P(T_{\text{fus}} - T_0)}{\ell_{\text{fus}}} = 0{,}94\,.$$

Attention ! $\ell_{\text{sol}} = -\ell_{\text{fus}}$.

$\boxed{4}$ La transformation est un changement d'état isobare à T_{fus}. Premier principe pendant dt en supposant le rayon de la goutte constant et qu'une masse dm solidifie :

$$\mathrm{d}H \underbrace{=}_{\text{échanges}} h\,[T_{\text{a}} - T_{\text{fus}}]\,4\pi R^2\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{\text{solidif.}} -\mathrm{d}m\,\ell_{\text{fus}}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{4\pi R^2 h(T_{\text{fus}} - T_{\text{a}})}{\ell_{\text{fus}}}$$

Sachant que $m(t_1) = (1-x)m_0$, la masse de solide évolue donc selon

$$m(t) = \frac{4\pi R^2 h(T_{\text{fus}} - T_{\text{a}})}{\ell_{\text{fus}}}(t - t_1) + (1-x)m_0$$

avec pour simplifier $m_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ la masse totale de la goutte. La goutte est complètement solidifée lorsque $m(t_2) = m_0$, d'où

$$t_2 = t_1 + \frac{xR\ell_{\text{fus}}\rho}{3h(T_{\text{fus}} - T_{\text{a}})} = 25\,\mathrm{s}\,.$$