Diffusion thermique

Question de cours

Établir l'équation de la diffusion thermique à une dimension cartésienne.

Exercice 1 : Température du corps humain en plongée

L'objectif de l'exercice est de modéliser les processus de transfert thermique entre le corps d'un plongeur et l'eau. On note $T(t)$ la température interne du plongeur à l'instant t, supposée uniforme, et $T_0 = 12\,°\mathrm{C}$ la température de l'eau, supposée constante. On note $S \sim 2\,\mathrm{m}^2$ l'aire totale du plongeur en contact avec l'eau.

- ▹ L'ensemble de la peau est modélisée par une unique résistance thermique $R_{\text{peau}} = 8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}$.
- ▹ Le plongeur est équipé d'une combinaison en néoprène d'épaisseur $e = 5\,\mathrm{mm}$. Le contact thermique entre la peau du plongeur et l'intérieur de la combinaison est supposé parfait. Le néoprène est une mousse remplie de bulles de diazote. Lorsque la combinaison est gorgée d'eau, sa conductivité thermique est de l'ordre de $\lambda_{\text{combi}} = 5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$. On note R_{combi} la résistance thermique associée.
- ▹ Les transferts thermiques entre la paroi externe de la combinaison et l'eau sont modélisés par la loi de Newton donnant le courant thermique conducto-convectif sortant,

$$\vec{j}_{\text{cc}} = h(T_{\text{paroi}} - T_0)\vec{n}\,,$$

  où $\vec{n}$ est la normale unitaire sortante et $h = 2 \cdot 10^2\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$ un paramètre phénoménologique. On note R_{cc} la résistance thermique conducto-convective.

1 - Exprimer R_{cc} en fonction de h et S.

2 - Proposer le schéma électrique équivalent permettant de déterminer la résistance thermique totale R_{tot} entre l'intérieur du corps du plongeur et l'eau. En déduire l'expression du flux thermique total Φ_{tot} en fonction de T, T_0 et R_{tot}.

3 - Estimer les valeurs numériques de R_{combi} et R_{cc}. Conclure sur une expression approchée de R_{tot}.

Le corps humain se réchauffe grâce à la dégradation des molécules d'ATP. On note $\mathcal{P}_{\text{ATP}}$ la puissance associée à cette production interne et C la capacité thermique du plongeur.

4 - Montrer que la température T du plongeur au cours du temps est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau}(T_0 + R_{\text{tot}}\mathcal{P}_{\text{ATP}}) \qquad \text{avec} \qquad \tau = CR_{\text{tot}}\,.$$

5 - Résoudre cette équation en supposant constante $\mathcal{P}_{\text{ATP}} = 1{,}5 \cdot 10^2\,\mathrm{W}$. On introduira $T_c = 37\,°\mathrm{C}$ la température du corps humain hors de l'eau.

6 - Le plongeur est en hypothermie lorsque sa température devient inférieure à 35 °C. Déterminer le temps maximal que peut durer une plongée sans danger pour un plongeur de 75 kg de capacité thermique massique $c = 4 \cdot 10^3\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 $\Phi_{\text{cc}} = hS(T_{\text{paroi}} - T_0)$ donc $R_{\text{cc}} = 1/hS$.

2 Association série des trois : $R_{\text{tot}} = R_{\text{peau}} + R_{\text{combi}} + R_{\text{cc}}$ donc $\Phi_{\text{tot}} = (T - T_0)/R_{\text{tot}}$.

3 $R_{\text{combi}} = \dfrac{e}{\lambda S} \sim 5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}$ et $R_{\text{cc}} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}$ donc $R_{\text{tot}} \simeq R_{\text{peau}} + R_{\text{combi}}$

4 On se place dans l'ARQS (rappel : les résistances thermiques ne sont valables qu'en régime continu). Premier principe pendant $\mathrm{d}t$ appliqué au plongeur :

$$\mathrm{d}H = -\Phi_{\text{tot}}\mathrm{d}t + \mathcal{P}_{\text{ATP}}\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{T - T_0}{R_{\text{tot}}} + \mathcal{P}_{\text{ATP}}$$

Étienne Thibierge, 8 octobre 2017, www.etienne-thibierge.fr

Or $\mathrm{d}H = C\,[T(t+\mathrm{d}t) - T(t)]$ d'où on arrive au résultat

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau}(T_0 + R_{\mathrm{tot}}\mathcal{P}_{\mathrm{ATP}}) \qquad \text{avec} \qquad \tau = C R_{\mathrm{tot}}\,.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Solution particulière $T_\infty = T_0 + R_{\mathrm{tot}}\mathcal{P}_{\mathrm{ATP}}$, solution homogène $A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, et $T(0) = T_{\mathrm{c}}$ d'où on trouve

$$T(t) = T_\infty + [T_{\mathrm{c}} - T_\infty]\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Durée maximale Δt_{max} telle que $T(\Delta t_{\mathrm{max}}) = T_{\mathrm{hypo}}$, qui vaut

$$\Delta t_{\mathrm{max}} = \tau \ln \frac{T_{\mathrm{c}} - T_\infty}{T_{\mathrm{hypo}} - T_\infty} = 1 \cdot 10^4\,\mathrm{s} = 3\,\mathrm{h}$$

Diffusion thermique

Question de cours

Incluse dans l'exercice.

Exercice 1 : Double vitrage

Le but de cet exercice est de comparer l'efficacité isolante d'un simple et d'un double vitrage. On considère une fenêtre de surface S séparant l'intérieur d'une pièce de température T_{int} de l'extérieure de température T_{ext}. On suppose la situation unidimensionnelle et en régime permanent.

Les conductivités thermiques du verre et de l'air valent $\lambda_{\text{v}} = 1{,}6\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ et $\lambda_{\text{a}} = 2{,}4\cdot 10^{-2}\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Les échanges thermiques à une interface air-verre sont pris en compte par une loi de transfert conducto-convectif de la forme

$$\vec{j}_{\text{th}} = h(T_1 - T_2)\vec{n}_{12}$$

où $\vec{j}_{\text{th}}$ est le vecteur densité de courant thermique, T_1 et T_2 les températures de part et d'autre de l'interface et $\vec{n}_{12}$ le vecteur unitaire orienté de 1 vers 2. Une documentation technique d'un constructeur indique

- $h = h_{\text{int}} = 9{,}1\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ pour le contact entre le verre et l'air d'un local fermé ;
- $h = h_{\text{ext}} = 16{,}6\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ pour un contact entre le verre et l'air extérieur.

1 - Rappeler sans démonstration l'équation de diffusion. En déduire l'expression de la résistance thermique d'une vitre d'épaisseur e.

2 - Expliquer rapidement la signification physique de h et pourquoi $h_{\text{int}} < h_{\text{ext}}$.

3 - Montrer que la loi de transfert conducto-convectif exprimée pour la fenêtre d'aire S prend la forme d'une résistance thermique à exprimer en fonction de h et S, appelée *résistance de contact*.

4 - En déduire la résistance thermique d'un vitrage simple, constitué d'une vitre d'épaisseur $e = 4{,}0\,\mathrm{mm}$ et d'aire $S = 1{,}0\,\mathrm{m^2}$. Comparer à la valeur donnée par la documentation technique, $0{,}17\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$.

5 - Exprimer la résistance thermique d'un double vitrage constitué de deux vitres parallèles d'épaisseur $e = 4{,}0\,\mathrm{mm}$ séparées d'une couche d'air d'épaisseur $e' = 6{,}0\,\mathrm{mm}$. Calculer numériquement cette résistance et la comparer avec la valeur donnée par la documentation technique, $0{,}28\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$.

6 - Identifier l'incohérence du modèle et proposer une amélioration.

> *L'effet des transferts conducto-convectifs est tel que le double vitrage est finalement assez loin de doubler la résistance thermique du simple vitrage.*

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 cf. cours. On en déduit le profil de température en RP :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{e} x + T_1\,,$$

puis le flux

$$\Phi = jS = \lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} S = \frac{\lambda S}{e}(T_2 - T_1) \qquad \text{d'où} \qquad R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}\,.$$

2 h décrit l'importance des mouvements de l'air, qui sont plus forts à l'extérieur qu'à l'intérieur.

3 Calcul du flux de 1 vers 2,

$$\phi = \iint \vec{j}_{\text{th}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint h(T_1 - T_2)\vec{n}_{12} \cdot \mathrm{d}S\vec{n}_{12} = hS(T_1 - T_2)$$

Par analogie, $R_{\text{c}} = 1/hS$.

4 Mise en série de trois résistances :

$$R = \frac{1}{h_{\text{ext}}S} + \frac{e}{\lambda_{\text{v}}S} + \frac{1}{h_{\text{int}}S} = 0{,}17\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}\,.$$

5 Mise en série de plusieurs résistances :

$$R = \frac{1}{h_{\text{ext}}S} + \frac{2e}{\lambda_{\text{v}}S} + \frac{3}{h_{\text{int}}S} + \frac{e'}{\lambda_{\text{a}}S} = 0{,}64\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}\,.$$

Ici je compte la couche d'air entre les vitres comme de l'air intérieur, avec la même résistance de contact, mais il n'est pas choquant non plus de dire que l'air à l'intérieur n'est quasiment pas en mouvement et qu'il n'y a donc pas de transfert convectif. Cela change un peu le résultat, mais la discussion qui suit reste la même. Dans cette question et la suivante, l'argumentation physique compte plus que le résultat.

6 Le rôle de la couche d'air est mal pris en compte : il est décrit comme une tranche d'air « solide », dans laquelle on prend pourtant en compte des mouvements de convection. Une première piste consiste à supposer que ces mouvements de convection rendent la couche d'air parfaitement conductrice thermiquement en raison de sa faible épaisseur, mais on peut voir que cela n'est toujours pas en accord avec la valeur constructeur. Comme les mouvements d'air sont globalement lents dans la vitre, on peut aussi considérer la couche d'air comme une seule couche limite, impliquant donc une seule réistance de contact, entre les deux vitres. Cette fois, l'accord quantitatif est meilleur

Diffusion thermique

Question de cours

Incluse dans l'exercice.

Exercice 1 : Géothermie

La croûte continentale terrestre a une épaisseur moyenne $\ell = 30\,\mathrm{km}$, limitée par la discontinuité de Moho. Sa conductivité thermique moyenne vaut $\lambda = 20\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Au niveau du sol, la température vaut $T_2 = 300\,\mathrm{K}$ alors qu'elle vaut $T_1 = 900\,\mathrm{K}$ sur la discontinuité de Moho.

On néglige localement la courbure de la Terre et on se place en régime permanent : la température ne dépend que de la profondeur z, mesurée le long d'un axe vertical ascendant dont l'origine se trouve à la profondeur ℓ.

1 - Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $T(z)$.

2 - En déduire le flux thermique surfacique issu de la croûte continentale et récupérable par géothermie.

Les éléments radioactifs de la croûte terrestre libèrent, en se désintégrant, une puissance volumique $p = 10\,\mathrm{\mu W\cdot m^{-3}}$.

3 - Reprendre le raisonnement précédent pour établir la nouvelle équation différentielle régissant le champ de température. La résoudre.

4 - En déduire le flux géothermique au niveau du sol. Commenter l'influence des éléments radioactifs.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Bilan d'enthalpie sur une tranche mésoscopique de hauteur $\mathrm{d}z$ et de section transverse S pendant $\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}H = \rho c_P \mathrm{d}T = +j(z)S\mathrm{d}t - j(z+\mathrm{d}z)S\mathrm{d}t = 0$$

car régime permanent. Avec la loi de Fourier, on en déduit

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}z} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}z^2} = 0}$$

ce qui se résout en

$$T(z) = Az + B$$

et en tenant compte des conditions aux limites

$$\boxed{T(z) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ell} z\,.}$$

$\boxed{2}$ Le flux thermique surfacique est un gros mot pour dire que l'on cherche j :

$$j(\ell) = -\lambda\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda(T_1 - T_2)}{\ell} = 0{,}4\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}\,.$$

On peut aussi utiliser la résistance thermique.

$\boxed{3}$ Même démarche que précédemment avec un terme source

$$\mathrm{d}H = \rho c_P \mathrm{d}T = +j(z)S\mathrm{d}t - j(z+\mathrm{d}z)S\mathrm{d}t + pS\mathrm{d}z\mathrm{d}t = 0$$

car régime permanent. Cela donne

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}z} = -\lambda\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}z^2} = p\,.$$

Forme générale de la solution :

$$T(z) = -\frac{p}{2\lambda}z^2 + A'z + B'$$

Avec les conditions aux limites :

$$B' = T_1 \qquad \text{et} \qquad A' = \frac{T_2 - T_1}{\ell} + \frac{p\ell}{2\lambda}$$

4 Flux thermique à la surface :

$$\boxed{j(\ell) = p\ell + \frac{\lambda(T_1 - T_2)}{\ell} = 0{,}55\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}\,.}$$

Rôle important de la radioactivité !

Étienne Thibierge, 8 octobre 2017, www.etienne-thibierge.fr