Hydrostatique et changements d'état

Exercice 1 : Atmosphère isotherme [oral banque PT]

On assimile l'air à un gaz parfait placé dans un champ de pesanteur constant. L'air est composé de 78% de diazote, 21% de dioxygène et 1 % d'argon.

Données :
▷ Masses molaires : $M(\mathrm{Ar}) = 18\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}, M(\mathrm{N_2}) = 28\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ et $M(\mathrm{O_2}) = 32\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$;
▷ Volume molaire de l'air dans les CNTP : $22{,}4\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}$.

1 - À partir des données, retrouver la valeur numérique de la constante des gaz parfaits R.

2 - Calculer la masse molaire de l'air.

3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la pression dans l'atmosphère dans le modèle isotherme.

4 - La résoudre et calculer la pression au sommet de l'Everest (8848 m) en fonction de la pression atmosphérique au niveau de la mer. Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ CNTP = 1 bar et 0 °C. D'après la loi des GP,

$$R = \frac{PV_\mathrm{m}}{T} = 8{,}31\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}.$$

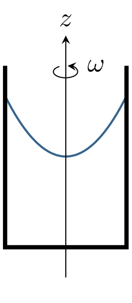
$\boxed{2}$ $M_\mathrm{air} = 0{,}78\,M(\mathrm{N_2}) + 0{,}21\,M(\mathrm{O_2}) + 0{,}01\,M(\mathrm{Ar}) = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

$\boxed{3}$ Loi de l'hydrostatique et des gaz parfaits :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \frac{Mg}{RT_0}P = 0$$

$\boxed{4}$ Solution exponentielle décroissante. $P_\mathrm{Everest} \simeq 0{,}33P_\mathrm{atm}$. Ordre de grandeur correct.

Exercice 2 : Équilibre hydrostatique en rotation



Un verre contenant de l'eau est mis en rotation autour d'un axe Oz vertical à la vitesse angulaire ω constante par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_0$. L'objectif de l'exercice est de déterminer l'équation de l'interface air-eau.

Pour ce faire, on étudie l'équilibre hydrostatique du fluide dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au verre, qui est donc en rotation par rapport au référentiel terrestre, et n'est de ce fait pas galiléen. On admet alors que l'étude de l'équilibre hydrostatique se mène comme en référentiel galiléen, à ceci près qu'il faut ajouter au bilan des actions mécaniques une pseudo-force appelée force d'inertie d'entraînement qui tient compte du caractère non galiléen de $\mathcal{R}$. Dans le cas présent, la densité volumique de force s'écrit en coordonnées cylindriques

$$\vec{f}_\mathrm{ie} = \rho\,\omega^2\,r\,\vec{e}_r\,.$$

1 - Il s'avère que vous avez déjà expérimenté la force d'inertie d'entraînement dans votre vie quotidienne : dans quelles circonstances ?

2 - Pourquoi est-il nécessaire de mener l'étude dans le référentiel tournant $\mathcal{R}$ au lieu du référentiel terrestre $\mathcal{R}_0$?

3 - Écrire la relation fondamentale de la statique des fluides dans le référentiel $\mathcal{R}$.

4 - En déduire l'expression du champ de pression au sein du verre.

5 - Déterminer l'équation de l'interface eau-air. De quel type de surface s'agit-il ?

Éléments de correction de l'exercice 2 :

1 Force centrifuge.

2 Le fluide n'est pas statique dans $\mathcal{R}_0$!

3 C'est du cours ...

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P = \rho \vec{g} + \rho\, \omega^2\, r\, \vec{e}_r$$

4 Projection sur $\vec{e}_\theta$:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$$

donc P ne dépend pas de θ mais seulement de r et z. Projection sur $\vec{e}_z$:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g \qquad \text{d'où} \qquad P(r,\theta,z) = -\rho g z + f(r)$$

Projection sur $\vec{e}_r$:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \omega^2 r \qquad \text{d'où} \qquad P(r,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + g(z)$$

où $f(r)$ et $g(z)$ ne sont des fonctions que d'une seule variable : $f(r)$ est la « constante par rapport à z » et $g(z)$ la « constante par rapport à r ». En identifiant,

$$P(r,z) = -\rho g z + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + A$$

où A est une (vraie) constante. On trouve A à partir de la condition aux limites $P(r=0, z_0) = P_0$, d'où

$$A = P_0 + \rho g z_0$$

5 À l'interface on a $P(r,z) = P_0$, soit

$$-\rho g z + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + P_0 + \rho g z_0 = P_0$$

ce qui s'écrit sous la forme

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

C'est un paraboloïde de révolution. Il est remarquable que la masse volumique du fluide d'intervienne pas du tout ici : de l'eau ou de l'huile donnerait la même surface.

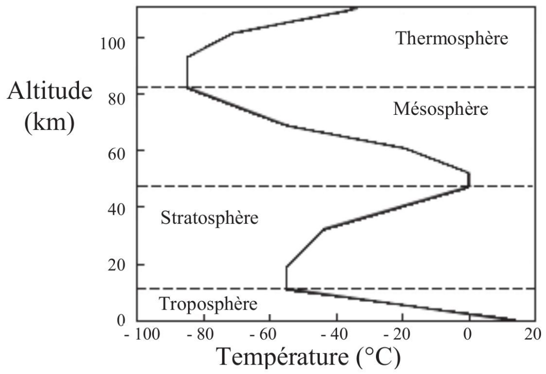
6 **Question bonus :** peut-on voir le fond du verre avant qu'il ne déborde ? Il faut utiliser la conservation du volume. Bien sûr, tout dépend du niveau d'eau initial.

Hydrostatique et changements d'état

Question de cours

Définir l'entahlpie et l'entropie massique de changement d'état. Établir le lien entre ces deux grandeurs.

Exercice 1 : Atmosphère adiabatique et polytropique



Cet exercice propose d'envisager d'autres modèles d'atmosphère que celui de l'atmosphère isotherme, qui ne permet évidemment pas d'expliquer les variations de températures observées, récapitulées sur la courbe ci-contre. On se limitera à la troposphère, c'est-à-dire la couche occupant les douze premiers kilomètres de l'atmosphère en partant de la surface de la Terre. On rappelle que le coefficient isentropique γ de l'air modélisé comme un gaz parfait diatomique est égal à $7/5$. Sa masse molaire vaut $29{,}0\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$.

On appelle gradient de température $\delta = \mathrm{d}T/\mathrm{d}z$.

1 - Supposons adiabatiques les transformations de l'air dans l'atmosphère. Déterminer deux exposants x et y tels que le produit $T^x P^y$ soit constant.

2 - En déduire la relation donnant $\mathrm{d}T/T$ en fonction de $\mathrm{d}P/P$ et γ.

3 - Établir l'expression du gradient de température adiabatique δ_{adiab} en fonction de γ, M_{air}, g et R. Donner sa valeur pour l'air.

4 - À partir de la figure, donner la valeur de la température au sommet de la troposphère à $12\,\mathrm{km}$ d'altitude ainsi que celle du gradient de température réel $\delta_{\text{réel}}$. Commenter la qualité du modèle, à comparer notamment au modèle d'atmosphère isotherme.

5 - Les transformations réelles au sein de l'atmosphère ne sont en fait ni isothermes ni adiabatiques, mais entre les deux. On les appelle polytropiques et elles vérifient $PV^q = \text{cte}$ où le coefficient polytropique q est supérieur à 1. Déterminer sa valeur à partir de la figure.

6 - En déduire le profil de température $T(z)$.

7 - Même question pour le profil de pression $P(z)$.

8 - Calculer numériquement T et P à $10\,\mathrm{km}$ d'altitude.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ $P^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{cte}$.

$\boxed{2}$ On prend le logarithme et on différencie : $\dfrac{\mathrm{d}T}{T} = \dfrac{\gamma-1}{\gamma}\dfrac{\mathrm{d}P}{P}$

$\boxed{3}$ On identifie la relation de la statique des fluides :

$$\mathrm{d}P = -\rho g \mathrm{d}z = -\frac{MP}{RT}\mathrm{d}z \equiv \frac{P}{T}\frac{\gamma}{\gamma-1}\mathrm{d}T \qquad \text{d'où} \qquad \delta_{\text{ad}} = \frac{Mg(1-\gamma)}{R\gamma} = -10\cdot10^{-3}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{m}^{-1}\,.$$

$\boxed{4}$ $T = -55\,°\mathrm{C}$ soit $\delta_{\text{réel}} = -6\cdot10^{-3}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Le modèle adiabatique est pas génial non plus.

$\boxed{5}$ q joue le rôle de γ dans les calculs, donc

$$\delta_{\text{réel}} = \frac{Mg(1-q)}{Rq} \qquad \text{d'où} \qquad q = \frac{Mg}{Mg + R\delta_{\text{réel}}} \simeq 1{,}2\,.$$

Étienne Thibierge, 9 novembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

6 $\delta = \text{cte}$ donc tout simplement $T = T_0 - \delta z$.

7 Même analogie $q \leftrightarrow \gamma$, d'où

$$P(z) = P_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{q/(q-1)} = P_0 \left(1 - \frac{\delta z}{T_0}\right)^{q/(q-1)}$$

8 En prenant $T_0 = 288\,\mathrm{K}$ on trouve $T = 231\,\mathrm{K} = -42\,°\mathrm{C}$ et $P = 0{,}27\,\mathrm{bar}$.

Hydrostatique et changements d'état

Exercice 1 : Deux liquides dans un tube en U

Considérons un tube en U de section $1\,\mathrm{cm}^2$ rempli d'eau jusqu'à $10\,\mathrm{cm}$ du fond. On ajoute $3\,\mathrm{mL}$ d'huile d'olive de densité 0,92 dans une des branches du tube. Calculer la hauteur à laquelle se trouvent les deux surfaces libres et l'interface entre l'huile d'olive et l'eau.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Il y a trois inconnues, les hauteurs z_e (surface libre côté eau), z_h (côté huile) et z_i (interface), donc trois relations à trouver.

(1) Le volume d'huile V est connu donc la hauteur d'huile h aussi. Ainsi, $h = z_\mathrm{h} - z_\mathrm{i} = V/S = 3\,\mathrm{cm}$.

(2) La relation d'hydrostatique de chaque côté et la continuité de la pression à l'interface donnent en $z = z_\mathrm{i}$: $P_\mathrm{atm} + \rho_\mathrm{h}\, g\,(z_\mathrm{h} - z_\mathrm{i}) = P_\mathrm{atm} + \rho_\mathrm{e}\, g\,(z_\mathrm{e} - z_\mathrm{i})$ d'où $z_\mathrm{e} - z_\mathrm{i} = \frac{\rho_\mathrm{h}}{\rho_\mathrm{e}}(z_\mathrm{h} - z_\mathrm{i})$.

(3) La conservation du volume d'eau indique que si le niveau descend de x d'un côté il monte d'autant de l'autre : $z_\mathrm{i} = z_0 - x$ et $z_\mathrm{e} = z_0 + x$. Attention, c'est bien z_i qui intervient.

On utilise ensuite l'équation d'hydrostatique en remplaçant systématiquement z_e, z_i et z_h par ce qui convient en termes de z_0, h et x. Cela conduit à

$$x = \frac{h}{2}\,\frac{\rho_\mathrm{h}}{\rho_\mathrm{e}} = 1{,}4\,\mathrm{cm}$$

et donc à

$$\boxed{z_\mathrm{e} = 11{,}4\,\mathrm{cm} \qquad z_\mathrm{i} = 8{,}6\,\mathrm{cm} \qquad z_\mathrm{h} = 11{,}6\,\mathrm{cm}}$$