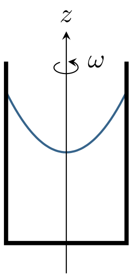
Statique des fluides

Question de cours

Établir l'équation locale de la statique des fluides.

Exercice 1 : Équilibre hydrostatique en rotation



Un verre contenant de l'eau est mis en rotation autour d'un axe Oz vertical à la vitesse angulaire ω constante par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_0$. L'objectif de l'exercice est de déterminer l'équation de l'interface air-eau.

Pour ce faire, on étudie l'équilibre hydrostatique du fluide dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au verre, qui est donc en rotation par rapport au référentiel terrestre, et n'est de ce fait pas galiléen. On admet alors que l'étude de l'équilibre hydrostatique se mène comme en référentiel galiléen, à ceci près qu'il faut ajouter au bilan des actions mécaniques une pseudo-force appelée force d'inertie d'entraînement qui tient compte du caractère non galiléen de $\mathcal{R}$. Dans le cas présent, la densité volumique de force s'écrit en coordonnées cylindriques

$$\vec{f}_{\text{ie}} = \rho\,\omega^2\,r\,\vec{e}_r\,.$$

1 - Il s'avère que vous avez déjà expérimenté la force d'inertie d'entraînement dans votre vie quotidienne : dans quelles circonstances ?

2 - Pourquoi est-il nécessaire de mener l'étude dans le référentiel tournant $\mathcal{R}$ au lieu du référentiel terrestre $\mathcal{R}_0$?

3 - Écrire la relation fondamentale de la statique des fluides dans le référentiel $\mathcal{R}$.

4 - En déduire l'expression du champ de pression au sein du verre.

5 - Déterminer l'équation de l'interface eau-air. De quel type de surface s'agit-il ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Force centrifuge.

$\boxed{2}$ Le fluide n'est pas statique dans $\mathcal{R}_0$!

$\boxed{3}$ C'est du cours ...

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \rho\vec{g} + \rho\,\omega^2\,r\,\vec{e}_r$$

$\boxed{4}$ Projection sur $\vec{e}_\theta$:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$$

donc P ne dépend pas de θ mais seulement de r et z. Projection sur $\vec{e}_z$:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g \qquad \text{d'où} \qquad P(r,\theta,z) = -\rho g z + f(r)$$

Projection sur $\vec{e}_r$:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho\omega^2 r \qquad \text{d'où} \qquad P(r,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + g(z)$$

où $f(r)$ et $g(z)$ ne sont des fonctions que d'une seule variable : $f(r)$ est la « constante par rapport à z » et $g(z)$ la « constante par rapport à r ». En identifiant,

$$P(r,z) = -\rho g z + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + A$$

où A est une (vraie) constante. On trouve A à partir de la condition aux limites $P(r=0, z_0) = P_0$, d'où

$$A = P_0 + \rho g z_0$$

5 À l'interface on a $P(r,z) = P_0$, soit

$$-\rho g z + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + P_0 + \rho g z_0 = P_0$$

ce qui s'écrit sous la forme

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

C'est un paraboloïde de révolution. Il est remarquable que la masse volumique du fluide d'intervienne pas du tout ici : de l'eau ou de l'huile donnerait la même surface.

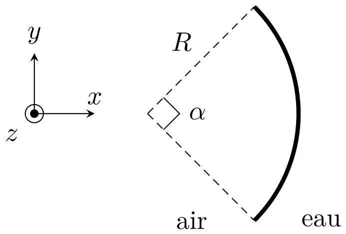
6 **Question bonus :** peut-on voir le fond du verre avant qu'il ne déborde ? Il faut utiliser la conservation du volume. Bien sûr, tout dépend du niveau d'eau initial.

Statique des fluides

Question de cours

Établir la loi d'évolution $P(z)$ de la pression dans un liquide incompressible en fonction de la profondeur.

Exercice 1 : Barrage voûte



Un barrage voûte est un type de barrage dénommé ainsi en raison de sa forme arquée caractéristique. La forme courbe de ces barrages permet de reporter les efforts dus à la poussée de l'eau sur chaque côté des rives. Un tel barrage fonctionne sur le même principe que les voûtes des cathédrales : pour ces dernières, la charge se concentre sur les piliers des voûtes, alors que pour les barrages, l'effort se concentre aux points d'appuis sur les rives. Ce type de barrage est donc adapté aux vallées étroites disposant de versant très rigides.

On modélise un tel barrage par un quart de cylindre de hauteur $H = 135\,\mathrm{m}$, rayon R et d'ouverture $\alpha = \pi/2$. Le couronnement, c'est-à-dire l'arc de cercle au sommet du barrage, a pour longueur $L = 230\,\mathrm{m}$.

1 - Déterminer le rayon R du quart de cylindre.

2 - Déterminer sans calcul la direction et le sens des force exercées par l'air sur le barrage, par l'eau sur le barrage, puis de la résultante.

3 - Calculer $\vec{F}_{\text{air}}$ exercée par l'air sur le barrage.

4 - Calculer $\vec{F}_{\text{eau}}$ exercée par l'air sur le barrage.

5 - En déduire la résultante.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ $L = R\alpha$ soit $R = \dfrac{2L}{\pi} = 146\,\mathrm{m}$.

$\boxed{2}$ Analyse des symétries. Air : exercée selon $+\vec{e}_x$, eau : exercée selon $-\vec{e}_x$, et il en est a priori de même pour la résultante.

$\boxed{3}$ Coordonnées cylindriques de centre O et d'axe z. On prend l'origine $z = 0$ à la surface du barrage, le fond se trouve donc en $z = -H$.

$\boxed{4}$ Pression de l'air uniforme.

$$\vec{F}_{\text{air}} = \iint P_0\,\mathrm{d}S\,\vec{n} = \int_{z=-H}^{0} \int_{\theta=-\alpha/2}^{+\alpha/2} P_0 \times R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \times (\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)$$

Par parité (ou par symétrie) on constate que le terme sur $\vec{e}_y$ s'annule. Ne reste à calculer que la composante sur $\vec{e}_x$. L'intégrale sur z se factorise directement.

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{air}} &= P_0\,R\,H \int_{\theta=-\alpha/2}^{+\alpha/2} \cos\theta\mathrm{d}\theta\;\vec{e}_x \\ &= P_0\,R\,H\,[\sin\theta]_{-\alpha/2}^{+\alpha/2}\;\vec{e}_x \\ &= P_0 RH \times 2\sin\frac{\alpha}{2}\,\vec{e}_x\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{air}} = \sqrt{2}\,P_0\,RH\,\vec{e}_x}$$

$\boxed{5}$ Exactement la même chose sauf que $P(z) = P_0 - \rho_0 g z$ car on est dans l'eau, et le vecteur normal change de sens.

$$\vec{F}_{\text{eau}} = \iint P(z)\,\mathrm{d}S\,\vec{n} = \int_{z=-H}^{0} \int_{\theta=-\alpha/2}^{+\alpha/2} [P_0 - \rho_0 g z] \times R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \times (-\cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\theta\,\vec{e}_y)$$

Par parité (ou par symétrie) on constate que le terme sur $\overrightarrow{e}_y$ s'annule. Ne reste à calculer que la composante sur $\overrightarrow{e}_x$. Les intégrales se factorisent facilement.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_{\text{eau}} &= -R\left(\int_{z=-H}^{0} [P_0 - \rho_0 g z]\,\mathrm{d}z\right) \times \left(\int_{\theta=-\alpha/2}^{+\alpha/2} \cos\theta \mathrm{d}\theta\right) \overrightarrow{e}_x \\
&= -R\left[P_0 z - \rho_0 g \frac{z^2}{2}\right]_{-H}^{0} [\sin\theta]_{-\alpha/2}^{+\alpha/2}\ \overrightarrow{e}_x \\
&= -R\left(P_0 H + \rho_0 g \frac{H^2}{2}\right) \times 2\sin\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{e}_x
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{eau}} = -\sqrt{2}R\left(P_0 H + \rho_0 g \frac{H^2}{2}\right)\overrightarrow{e}_x\,.}$$

6 Résultante : il suffit de sommer

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\sqrt{2}R\rho_0 g \frac{H^2}{2}\overrightarrow{e}_x}$$

Statique des fluides

Exercice 1 : Atmosphère isotherme [oral banque PT]

On assimile l'air à un gaz parfait placé dans un champ de pesanteur constant. L'air est composé de 78% de diazote, 21% de dioxygène et 1 % d'argon.

Données :
- ▷ Masses molaires : $M(\mathrm{Ar}) = 18\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, $M(\mathrm{N_2}) = 28\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ et $M(\mathrm{O_2}) = 32\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$;
- ▷ Volume molaire de l'air dans les CNTP : $22{,}4\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}$.

1 - À partir des données, retrouver la valeur numérique de la constante des gaz parfaits R.

2 - Calculer la masse molaire de l'air.

3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la pression dans l'atmosphère dans le modèle isotherme.

4 - La résoudre et calculer la pression au sommet de l'Everest (8848 m) en fonction de la pression atmosphérique au niveau de la mer. Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 CNTP = 1 bar et 0 °C. D'après la loi des GP,

$$R = \frac{PV_\mathrm{m}}{T} = 8{,}31\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}.$$

2 $M_\mathrm{air} = 0{,}78\,M(\mathrm{N_2}) + 0{,}21\,M(\mathrm{O_2}) + 0{,}01\,M(\mathrm{Ar}) = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

3 Loi de l'hydrostatique et des gaz parfaits :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \frac{Mg}{RT_0}P = 0$$

4 Solution exponentielle décroissante. $P_\mathrm{Everest} \simeq 0{,}33 P_\mathrm{atm}$. Ordre de grandeur correct.

Exercice 2 : Expérience de Jean Perrin [oral CCP]

Une des premières mesures du nombre d'Avogadro est due à Jean Perrin au début du XXe siècle. L'expérience consiste à réaliser une « atmosphère » isotherme à l'aide d'une suspension de sphérules (toutes petites sphères) de gomme-gutte (caoutchouc végétal) dans de l'eau. La masse des grains utilisés est telle que la hauteur caractéristique est de l'ordre du centième de millimètre. Une goutte de la suspension est donc placée dans une cuve plate profonde d'un dixième de millimètre. Après une phase transitoire, on constate que le mélange atteint un état stationnaire où les couches inférieures deviennent plus riches en grains que les couches supérieures. Jean Perrin observe le mélange au microscope et prend des photos des différentes couches de fluide où il peut compter les sphérules.

On note $n(z)$ la densité volumique de sphérules à l'altitude z : $n(z)\,\mathrm{d}\tau$ est le nombre de sphérules contenues dans le volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ situé à l'altitude z. On modélise la suspension réalisée par Jean Perrin par un gaz parfait de sphérules en équilibre dans le champ de pesanteur à $T_0 = 293\,\mathrm{K}$.

Données :
- ▷ Rayon d'une sphérule : $a = 0{,}212\,\mathrm{\mu m}$;
- ▷ Masse volumique de la gomme-gutte : $\mu = 1{,}194\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ à 293 K ;
- ▷ Masse volumique de l'eau : $\mu_\mathrm{e} = 1{,}003\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ à 293 K ;
- ▷ Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$.

1 - Évoquer sans développer les différents paramètres liés au microscope et appareil photo utilisés : ouverture du diaphragme, grandissement, temps de pose, focale. Quels réglages adopter ?

2 - Montrer que la répartition des sphérules suit une loi de la forme $n(z) = n_0\,\mathrm{e}^{-z/z_\mathrm{c}}$, où la hauteur caractéristique z_c s'exprime notamment en fonction de la température T_0 et du poids mg d'une sphérule.

3 - Les sphérules sont en réalité à la fois soumises à leur poids et à la poussée d'Archimède : le poids mg est à remplacer par le poids apparent $m'g$ de la sphérule. Exprimer la masse apparente m' d'une sphérule et faire l'application numérique.

4 - Dans son ouvrage *Les atomes* où il relate son expérience, Jean Perrin écrit que « en modifiant les paramètres expérimentaux tels que le rayon des sphérules et la masse volumique du liquide se créent des conditions semblables à une inversion de gravité ». Expliquer.

5 - Expliquer comment l'expérience de Jean Perrin permet de déterminer le nombre d'Avogadro.

6 - À une hauteur choisie comme origine $z = 0$, Jean Perrin compte 100 sphérules dans la tranche qu'il observe au microscope. À la hauteur $h = 90\,\mu\text{m}$ il n'en compte que 17. En déduire une valeur expérimentale du nombre d'Avogadro.

7 - Comment améliorer ce résultat et estimer l'incertitude sur la mesure réalisée ?

Éléments de correction de l'exercice 2 :

1 Cf. dossier documentaire de PTSI sur l'appareil photo. On veut photographier une couche très fine pendant très peu de temps pour voir les sphérules nettement. Il faut donc une grande ouverture (faible profondeur de champ), un fort grandissement, un court temps de pose et une petite focale.

2 Loi des GP pour le volume $\mathrm{d}\tau$: $P \times \mathrm{d}\tau = \dfrac{n(z)\,\mathrm{d}\tau}{\mathcal{N}_\mathrm{A}} \times R \times T_0$, donc

$$P = \frac{n(z)}{\mathcal{N}_\mathrm{A}}\,R\,T_0\,.$$

Relation fondamentale de l'hydrostatique : (axe z vers le haut)

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -n(z)\,m\,g$$

soit en combinant les deux

$$\frac{RT_0}{\mathcal{N}_\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} = -n\,mg$$

ce qu'on peut mettre sous forme canonique et résoudre sous forme d'une exponentielle décroissante,

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathcal{N}_\mathrm{A}mg}{RT_0}n = 0 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{z_\mathrm{c} = \frac{RT_0}{\mathcal{N}_\mathrm{A}mg}\,.}$$

3 Poids apparent = somme vectorielle du poids (vers le bas) et de la poussée d'Archimède (vers le haut).

$$\vec{P}_\mathrm{app} = -mg\,\vec{e}_z + \frac{4}{3}\pi a^3\,\mu_\mathrm{e}\,g\,\vec{e}_z \qquad \text{soit} \qquad \vec{P}_\mathrm{app} = -\frac{4}{3}\pi a^3\,(\mu - \mu_\mathrm{e})\,g\,\vec{e}_z$$

et on peut alors identifier $m' = \dfrac{4}{3}\pi a^3\,(\mu - \mu_\mathrm{e}) = 7 \cdot 10^{-18}\,\text{kg}$.

4 m' peut être négative, ce qui donne un poids apparent vers le haut. Ceci dit le rayon des sphérules n'a rien à voir là dedans.

5 On peut mesurer z_c où tout est connu à part $\mathcal{N}_\mathrm{A}$.

6 Observation d'une tranche d'épaisseur $e \ll z_\mathrm{c}$ et de section S, qui contient donc $N(z) = n(z)\,Se$ sphérules. Ici,

$$N_1 = n_0 Se = 100 \qquad \text{et} \qquad N_2 = n_0\,\mathrm{e}^{-h/z_\mathrm{c}}Se = 17$$

Ainsi

$$\frac{N_2}{N_1} = \mathrm{e}^{-h/z_\mathrm{c}} \qquad \text{soit} \qquad \frac{h}{z_\mathrm{c}} = \ln\frac{N_1}{N_2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{N}_\mathrm{A} = \frac{RT_0}{m'gh}\ln\frac{N_1}{N_2} \simeq 6{,}4 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}}$$

7 Type A.

Statique des fluides

Exercice 1 : Deux liquides dans un tube en U

Considérons un tube en U de section $1\,\mathrm{cm}^2$ rempli d'eau jusqu'à $10\,\mathrm{cm}$ du fond. On ajoute $3\,\mathrm{mL}$ d'huile d'olive de densité 0,92 dans une des branches du tube. Calculer la hauteur à laquelle se trouvent les deux surfaces libres et l'interface entre l'huile d'olive et l'eau.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Il y a trois inconnues, les hauteurs z_e (surface libre côté eau), z_h (côté huile) et z_i (interface), donc trois relations à trouver.

(1) Le volume d'huile V est connu donc la hauteur d'huile h aussi. Ainsi, $h = z_\mathrm{h} - z_\mathrm{i} = V/S = 3\,\mathrm{cm}$.

(2) La relation d'hydrostatique de chaque côté et la continuité de la pression à l'interface donnent en $z = z_\mathrm{i}$: $P_\mathrm{atm} + \rho_\mathrm{h}\, g\,(z_\mathrm{h} - z_\mathrm{i}) = P_\mathrm{atm} + \rho_\mathrm{e}\, g\,(z_\mathrm{e} - z_\mathrm{i})$ d'où $z_\mathrm{e} - z_\mathrm{i} = \frac{\rho_\mathrm{h}}{\rho_\mathrm{e}}(z_\mathrm{h} - z_\mathrm{i})$.

(3) La conservation du volume d'eau indique que si le niveau descend de x d'un côté il monte d'autant de l'autre : $z_\mathrm{i} = z_0 - x$ et $z_\mathrm{e} = z_0 + x$. Attention, c'est bien z_i qui intervient.

On utilise ensuite l'équation d'hydrostatique en remplaçant systématiquement z_e, z_i et z_h par ce qui convient en termes de z_0, h et x. Cela conduit à

$$x = \frac{h}{2}\,\frac{\rho_\mathrm{h}}{\rho_\mathrm{e}} = 1{,}4\,\mathrm{cm}$$

et donc à

$$\boxed{z_\mathrm{e} = 11{,}4\,\mathrm{cm} \qquad z_\mathrm{i} = 8{,}6\,\mathrm{cm} \qquad z_\mathrm{h} = 11{,}6\,\mathrm{cm}}$$