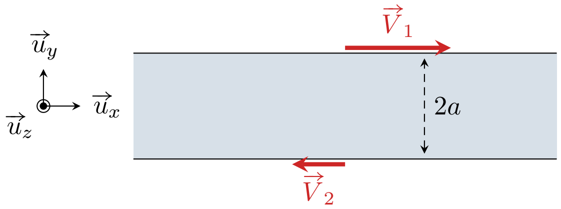
Colles semaine 10 – Sujet A Langevin-Wallon, PT 2017-2018

Mécanique des fluides

Exercice 1 : Écoulement de Couette plan



Considérons un fluide confiné entre deux plaques planes infinies situées en $y = \pm a$. La plaque supérieure est tirée à vitesse constante $\vec{V}_1$ dans le sens de $\vec{u}_x$, la plaque inférieure à vitesse constante $\vec{V}_2$ dans le sens opposé.

Le champ de vitesse de l'écoulement est donné par

$$\vec{v} = \left(\frac{V_1 + V_2}{2a} y + \frac{V_1 - V_2}{2} \right) \vec{u}_x \,.$$

1 - Représenter l'allure du champ de vitesse. Indiquer les lignes de courant.

2 - Le fluide considéré est-il un fluide parfait ou visqueux ?

3 - L'écoulement est-il compressible ?

4 - Calculer la vorticité $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v}$ de l'écoulement. Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{\mathbf{1}}$ Lignes de courant : droites selon $\vec{u}_x$. Champ de vitesse dessiné sur la figure 1.

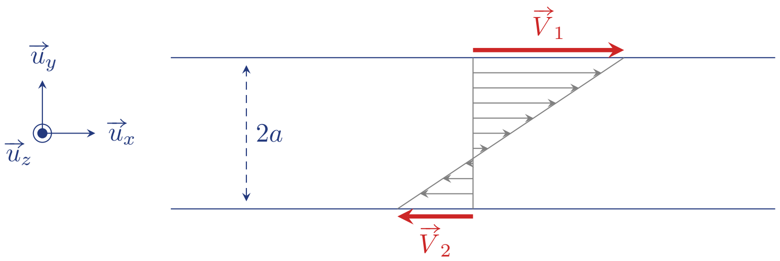


Figure 1 – Champ des vitesses de l'écoulement de Couette plan.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Visqueux car vitesse du fluide égale à la vitesse de la paroi en $x = \pm a$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Calcul :)

$$\mathrm{div}\, \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0$$

Écoulement incompressible.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Calcul encore :)

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{u}_z = -\frac{V_1 + V_2}{2a} \vec{u}_z$$

Il est donc rotationnel et ça se voit sur le champ de vitesse tracé à la première question.

Exercice 2 : Ballon sonde [oral CCP]

Un ballon-sonde, est assimilé à une sphère incompressible de volume V_b remplie d'hélium, ouverte par le bas. On note m_b la masse du ballon et m_c la masse du matériel qu'il transporte. Le volume du ballon non gonflé est supposé négligeable devant le volume du ballon gonflé, de même que le volume du matériel de mesure. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M_a. La température de l'atmosphère suit la loi $T(z) = T_0(1 - \alpha z)$, et l'accélération de la pesanteur g est supposée indépendante de l'altitude. La vitesse du ballon est très faible, on le suppose donc en permanence en équilibre thermique avec l'atmosphère.

1 - En considérant une tranche d'air de hauteur $\mathrm{d}z$, exprimer le champ de pression sous la forme

$$P(z) = P_0(1-\alpha z)^\beta$$

où P_0 est la pression au sol et β une constante à expliciter en fonction de g, M_a, T_0, α et R la constante des gaz parfaits.

2 - En déduire l'évolution de la masse volumique de l'air avec l'altitude, $\rho_\mathrm{a}(z)$.

L'hélium dans le ballon est à la pression P_He constante et a pour masse molaire M_He.

3 - Expliciter la poussée d'Archimède exercée sur le ballon.

4 - En déduire la masse maximale $m_\mathrm{c,max}(z)$ que peut soulever le ballon à l'altitude z.

5 - Application numérique : calculer $m_\mathrm{c,max}(0)$ au niveau du sol, puis $m_\mathrm{c,max}$ à $h = 10\,\mathrm{km}$ d'altitude.

Données numériques : $m_\mathrm{b} = 1{,}23\,\mathrm{kg}$, $M_\mathrm{a} = 29{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, $M_\mathrm{He} = 4{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, $T_0 = 15\,°\mathrm{C}$, $P_0 = 1{,}013\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$, $\alpha = 2{,}00\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^{-1}}$.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

$\boxed{1}$ Equation locale de la statique des fluides (z vers le haut) :

$$\mathrm{d}P = -\rho g \mathrm{d}z$$

avec d'après la loi des gaz parfaits

$$PV = \frac{m}{M_\mathrm{a}}RT \qquad \text{d'où} \qquad \rho = \frac{M_\mathrm{a}P}{RT}$$

En combinant

$$\mathrm{d}P = -\frac{M_\mathrm{a}P}{RT}g\mathrm{d}z \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{M_\mathrm{a}g}{RT_0}\frac{\mathrm{d}z}{1-\alpha z} = \frac{M_\mathrm{a}g}{\alpha RT_0}\left(\frac{-\alpha\mathrm{d}z}{1-\alpha z}\right).$$

On intègre ensuite entre l'altitude 0 et l'altitude z, ce qui donne

$$\ln\frac{P(z)}{P_0} = \frac{M_\mathrm{a}g}{\alpha RT_0}\ln\frac{1-\alpha z}{1}$$

et on trouve enfin en prenant l'exponentielle

$$P(z) = P_0(1-\alpha z)^\beta \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{M_\mathrm{a}g}{\alpha RT_0}.$$

$\boxed{2}$ $\rho_\mathrm{a} = \dfrac{M_\mathrm{a}P}{RT} = \dfrac{M_\mathrm{a}P_0}{RT_0}(1-\alpha z)^{\beta-1}$.

$\boxed{3}$ Poussée d'Archimède à l'altitude z :

$$\vec{\Pi}_\mathrm{A}(z) = -\rho_\mathrm{a}(z)V_\mathrm{b}\vec{g}\,.$$

$\boxed{4}$ La poussée d'Archimède doit compenser le poids du ballon et du matériel qu'il transporte mais aussi celui de l'hélium. Comme le ballon est ouvert par le bas, de l'hélium s'échappe du ballon au fur et à mesure : la quantité de matière d'hélium contenue dans le ballon vaut

$$n_\mathrm{He} = \frac{P_\mathrm{He}V_\mathrm{b}}{RT(z)} \qquad \text{d'où} \qquad m_\mathrm{He} = \frac{P_\mathrm{He}V_\mathrm{b}}{RT_0(1-\alpha z)M_\mathrm{He}}$$

Pour la masse maximale qu'il peut emporter, le ballon est à l'équilibre à la hauteur h, soit

$$m_\mathrm{b}g + m_\mathrm{c,max}(z)g + \frac{P_\mathrm{He}V_\mathrm{b}}{RT_0(1-\alpha z)M_\mathrm{He}}g = \frac{M_\mathrm{a}P_0}{RT_0}(1-\alpha z)^{\beta-1}V_\mathrm{b}g$$

et ainsi

$$\boxed{m_\mathrm{c,max}(z) = \frac{V_\mathrm{b}}{RT_0}\left[M_\mathrm{a}P_0(1-\alpha z)^{\beta-1} - \frac{P_\mathrm{He}}{(1-\alpha z)M_\mathrm{He}}\right] - m_\mathrm{b}}$$

Pour simplifier les calculs en fin d'exercice, on peut plutôt supposer le ballon fermé et inclure la masse d'hélium (constante) dans celle du ballon.

Mécanique des fluides

Exercice 1 : Houle

La houle peut être modélisée par un champ de vitesse

$$\vec{v}(M) = H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\left[\cos(kx-\omega t)\vec{u}_x + \sin(kx-\omega t)\vec{u}_z\right]$$

où l'axe x est sa direction de propagation et l'axe z un axe vertical ascendant dont l'origine est choisie au niveau moyen de la mer. Par définition, le nombre d'onde k est relié à la longueur d'onde la houle par $k = 2\pi/\lambda$.

1 - Représenter graphiquement le champ de vitesse à l'instant $t = 0$ en $x = 0$ (qui correspond au sommet d'une vague), $x = \lambda/4$ et $x = \lambda/2$ (creux d'une vague).

2 - L'écoulement est-il compressible ?

3 - Calculer la vorticité $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$ de l'écoulement. Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ À l'instant $t = 0$ et en $x = 0$: $\vec{v} = H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\vec{u}_x$.
▷ En $x = \lambda/4$ on a $kx = \pi/2$: $\vec{v} = H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\vec{u}_z$.
▷ En $x = \lambda/2$ on a $kx = \pi$: $\vec{v} = -H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\vec{u}_x$.
Champ de vitesse exponentiel dont on vient de déterminer les directions.

$\boxed{2}$ Calcul

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\sin(kx-\omega t) + 0 + Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\sin(kx-\omega t) = 0$$

donc incompressible.

$\boxed{3}$ Re-calcul :

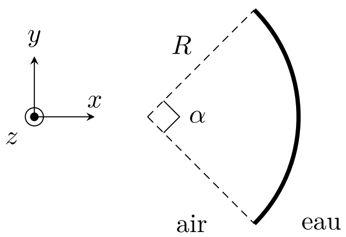
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y = \left(Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\cos(kx-\omega t) - Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\cos(kx-\omega t)\right)\vec{u}_y = \vec{0}\,.$$

Écoulement irrotationnel.

Exercice 2 : Barrage voûte

Un barrage voûte est un type de barrage dénommé ainsi en raison de sa forme arquée caractéristique. La forme courbe de ces barrages permet de reporter les efforts dus à la poussée de l'eau sur chaque côté des rives. Un tel barrage fonctionne sur le même principe que les voûtes des cathédrales : pour ces dernières, la charge se concentre sur les piliers des voûtes, alors que pour les barrages, l'effort se concentre aux points d'appuis sur les rives. Ce type de barrage est donc adapté aux vallées étroites disposant de versant très rigides.

On modélise un tel barrage par un quart de cylindre de hauteur $H = 135\,\mathrm{m}$, rayon R et d'ouverture $\alpha = \pi/2$. Le couronnement, c'est-à-dire l'arc de cercle au sommet du barrage, a pour longueur $L = 230\,\mathrm{m}$.



1 - Déterminer le rayon R du quart de cylindre.

2 - Déterminer sans calcul la direction et le sens des force exercées par l'air sur le barrage, par l'eau sur le barrage, puis de la résultante.

3 - Calculer $\vec{F}_{\mathrm{air}}$ exercée par l'air sur le barrage.

4 - Calculer $\vec{F}_{\mathrm{eau}}$ exercée par l'air sur le barrage.

5 - En déduire la résultante.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

$\boxed{1}$ $L = R\alpha$ soit $R = \dfrac{2L}{\pi} = 146\,\mathrm{m}$.

$\boxed{2}$ Analyse des symétries. Air : exercée selon $+\vec{e}_x$, eau : exercée selon $-\vec{e}_x$, et il en est a priori de même pour la résultante.

$\boxed{3}$ Coordonnées cylindriques de centre O et d'axe z. On prend l'origine $z = 0$ à la surface du barrage, le fond se trouve donc en $z = -H$.

$\boxed{4}$ Pression de l'air uniforme.

$$\vec{F}_{\text{air}} = \iint P_0\,\mathrm{d}S\,\vec{n} = \int_{z=-H}^{0}\int_{\theta=-\alpha/2}^{+\alpha/2} P_0 \times R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \times (\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)$$

Par parité (ou par symétrie) on constate que le terme sur $\vec{e}_y$ s'annule. Ne reste à calculer que la composante sur $\vec{e}_x$. L'intégrale sur z se factorise directement.

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{air}} &= P_0\,R\,H\int_{\theta=-\alpha/2}^{+\alpha/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_x\\
&= P_0\,R\,H\,[\sin\theta]_{-\alpha/2}^{+\alpha/2}\,\vec{e}_x\\
&= P_0 RH \times 2\sin\frac{\alpha}{2}\,\vec{e}_x\\
&\boxed{\vec{F}_{\text{air}} = \sqrt{2}\,P_0\,RH\,\vec{e}_x}
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Exactement la même chose sauf que $P(z) = P_0 - \rho_0 g z$ car on est dans l'eau, et le vecteur normal change de sens.

$$\vec{F}_{\text{eau}} = \iint P(z)\,\mathrm{d}S\,\vec{n} = \int_{z=-H}^{0}\int_{\theta=-\alpha/2}^{+\alpha/2}[P_0 - \rho_0 g z] \times R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \times (-\cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\theta\,\vec{e}_y)$$

Par parité (ou par symétrie) on constate que le terme sur $\vec{e}_y$ s'annule. Ne reste à calculer que la composante sur $\vec{e}_x$. Les intégrales se factorisent facilement.

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{eau}} &= -R\left(\int_{z=-H}^{0}[P_0 - \rho_0 g z]\,\mathrm{d}z\right) \times \left(\int_{\theta=-\alpha/2}^{+\alpha/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)\vec{e}_x\\
&= -R\left[P_0 z - \rho_0 g\frac{z^2}{2}\right]_{-H}^{0}[\sin\theta]_{-\alpha/2}^{+\alpha/2}\,\vec{e}_x\\
&= -R\left(P_0 H + \rho_0 g\frac{H^2}{2}\right) \times 2\sin\frac{\alpha}{2}\,\vec{e}_x\\
&\boxed{\vec{F}_{\text{eau}} = -\sqrt{2}R\left(P_0 H + \rho_0 g\frac{H^2}{2}\right)\vec{e}_x\,.}
\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Résultante : il suffit de sommer

$$\boxed{\vec{F} = -\sqrt{2}R\rho_0 g\frac{H^2}{2}\,\vec{e}_x}$$

Mécanique des fluides

Exercice 1 : Écoulement de Poiseuille plan

Considérons un fluide confiné entre deux plaques planes situées en $y = \pm a$, immobiles dans le référentiel d'étude. Une surpression est imposée côté gauche, ce qui entraîne un écoulement de fluide.

Pour x suffisamment loin de l'entrée de la canalisation, le champ de vitesse de l'écoulement est donné par

$$\vec{v} = V_{\max}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)\vec{u}_x \,.$$

1 - Représenter l'allure du champ de vitesse. Indiquer les lignes de courant.

2 - Le fluide considéré est-il un fluide parfait ou visqueux ?

3 - L'écoulement est-il compressible ?

4 - Calculer la vorticité $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$ de l'écoulement. Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Lignes de courant : droites selon $\vec{u}_x$. Champ de vitesse parabolique, nul sur les parois et maximal au centre.

$\boxed{2}$ Visqueux car vitesse du fluide égale à la vitesse de la paroi en $x = \pm a$.

$\boxed{3}$ Calcul :)

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0$$

Écoulement incompressible.

$\boxed{4}$ Calcul encore :)

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}\vec{u}_z = -\frac{2V_{\max}y}{a^2}\vec{u}_z$$

Il est donc rotationnel et ça se voit sur le champ de vitesse tracé à la première question.

Exercice 2 : Expérience de Jean Perrin [oral CCP]

Une des premières mesures du nombre d'Avogadro est due à Jean Perrin au début du XX$^{\text{e}}$ siècle. L'expérience consiste à réaliser une « atmosphère » isotherme à l'aide d'une suspension de sphérules (toutes petites sphères) de gomme-gutte (caoutchouc végétal) dans de l'eau. La masse des grains utilisés est telle que la hauteur caractéristique est de l'ordre du centième de millimètre. Une goutte de la suspension est donc placée dans une cuve plate profonde d'un dixième de millimètre. Après une phase transitoire, on constate que le mélange atteint un état stationnaire où les couches inférieures deviennent plus riches en grains que les couches supérieures. Jean Perrin observe le mélange au microscope et prend des photos des différentes couches de fluide où il peut compter les sphérules.

On note $n(z)$ la densité volumique de sphérules à l'altitude z : $n(z)\,\mathrm{d}\tau$ est le nombre de sphérules contenues dans le volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ situé à l'altitude z. On modélise la suspension réalisée par Jean Perrin par un gaz parfait de sphérules en équilibre dans le champ de pesanteur à $T_0 = 293\,\mathrm{K}$.

Données :
- ▷ Rayon d'une sphérule : $a = 0{,}212\,\mu\mathrm{m}$;
- ▷ Masse volumique de la gomme-gutte : $\mu = 1{,}194\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ à $293\,\mathrm{K}$;
- ▷ Masse volumique de l'eau : $\mu_{\mathrm{e}} = 1{,}003\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ à $293\,\mathrm{K}$;
- ▷ Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$.

1 - Évoquer sans développer les différents paramètres liés au microscope et appareil photo utilisés : ouverture du diaphragme, grandissement, temps de pose, focale. Quels réglages adopter ?

2 - Montrer que la répartition des sphérules suit une loi de la forme $n(z) = n_0\,\mathrm{e}^{-z/z_c}$, où la hauteur caractéristique z_c s'exprime notamment en fonction de la température T_0 et du poids mg d'une sphérule.

3 - Les sphérules sont en réalité à la fois soumises à leur poids et à la poussée d'Archimède : le poids mg est à remplacer par le poids apparent $m'g$ de la sphérule. Exprimer la masse apparente m' d'une sphérule et faire l'application numérique.

4 - Dans son ouvrage *Les atomes* où il relate son expérience, Jean Perrin écrit que « en modifiant les paramètres expérimentaux tels que le rayon des sphérules et la masse volumique du liquide se créent des conditions semblables à une inversion de gravité ». Expliquer.

5 - Expliquer comment l'expérience de Jean Perrin permet de déterminer le nombre d'Avogadro.

6 - À une hauteur choisie comme origine $z = 0$, Jean Perrin compte 100 sphérules dans la tranche qu'il observe au microscope. À la hauteur $h = 90\,\mu\mathrm{m}$ il n'en compte que 17. En déduire une valeur expérimentale du nombre d'Avogadro.

7 - Comment améliorer ce résultat et estimer l'incertitude sur la mesure réalisée ?

Éléments de correction de l'exercice 2 :

$\boxed{1}$ Cf. dossier documentaire de PTSI sur l'appareil photo. On veut photographier une couche très fine pendant très peu de temps pour voir les sphérules nettement. Il faut donc une grande ouverture (faible profondeur de champ), un fort grandissement, un court temps de pose et une petite focale.

$\boxed{2}$ Loi des GP pour le volume $\mathrm{d}\tau$: $P \times \mathrm{d}\tau = \dfrac{n(z)\,\mathrm{d}\tau}{\mathcal{N}_A} \times R \times T_0$, donc

$$P = \frac{n(z)}{\mathcal{N}_A}\,R\,T_0\,.$$

Relation fondamentale de l'hydrostatique : (axe z vers le haut)

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -n(z)\,m\,g$$

soit en combinant les deux

$$\frac{RT_0}{\mathcal{N}_A}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} = -n\,mg$$

ce qu'on peut mettre sous forme canonique et résoudre sous forme d'une exponentielle décroissante,

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathcal{N}_A mg}{RT_0} n = 0 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{z_c = \frac{RT_0}{\mathcal{N}_A mg}\,.}$$

$\boxed{3}$ Poids apparent = somme vectorielle du poids (vers le bas) et de la poussée d'Archimède (vers le haut).

$$\overrightarrow{P}_{\text{app}} = -mg\,\overrightarrow{e}_z + \frac{4}{3}\pi a^3\,\mu_e\,g\,\overrightarrow{e}_z \qquad \text{soit} \qquad \overrightarrow{P}_{\text{app}} = -\frac{4}{3}\pi a^3\,(\mu - \mu_e)\,g\,\overrightarrow{e}_z$$

et on peut alors identifier $m' = \dfrac{4}{3}\pi a^3\,(\mu - \mu_e) = 7 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{kg}$.

$\boxed{4}$ m' peut être négative, ce qui donne un poids apparent vers le haut. Ceci dit le rayon des sphérules n'a rien à voir là dedans.

$\boxed{5}$ On peut mesurer z_c où tout est connu à part $\mathcal{N}_A$.

$\boxed{6}$ Observation d'une tranche d'épaisseur $e \ll z_c$ et de section S, qui contient donc $N(z) = n(z)\,Se$ sphérules. Ici,

$$N_1 = n_0 Se = 100 \qquad \text{et} \qquad N_2 = n_0\,\mathrm{e}^{-h/z_c} Se = 17$$

Ainsi

$$\frac{N_2}{N_1} = \mathrm{e}^{-h/z_c} \qquad \text{soit} \qquad \frac{h}{z_c} = \ln\frac{N_1}{N_2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{N}_A = \frac{RT_0}{m'gh}\ln\frac{N_1}{N_2} \simeq 6{,}4 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}}$$

$\boxed{7}$ Type A.

Mécanique des fluides

Exercice 1 : Deux liquides dans un tube en U

Considérons un tube en U de section $1\,\mathrm{cm}^2$ rempli d'eau jusqu'à $10\,\mathrm{cm}$ du fond. On ajoute $3\,\mathrm{mL}$ d'huile d'olive de densité 0,92 dans une des branches du tube. Calculer la hauteur à laquelle se trouvent les deux surfaces libres et l'interface entre l'huile d'olive et l'eau.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Il y a trois inconnues, les hauteurs z_e (surface libre côté eau), z_h (côté huile) et z_i (interface), donc trois relations à trouver.

(1) Le volume d'huile V est connu donc la hauteur d'huile h aussi. Ainsi, $h = z_\mathrm{h} - z_\mathrm{i} = V/S = 3\,\mathrm{cm}$.

(2) La relation d'hydrostatique de chaque côté et la continuité de la pression à l'interface donnent en $z = z_\mathrm{i}$: $P_\mathrm{atm} + \rho_\mathrm{h}\, g\,(z_\mathrm{h} - z_\mathrm{i}) = P_\mathrm{atm} + \rho_\mathrm{e}\, g\,(z_\mathrm{e} - z_\mathrm{i})$ d'où $z_\mathrm{e} - z_\mathrm{i} = \frac{\rho_\mathrm{h}}{\rho_\mathrm{e}}(z_\mathrm{h} - z_\mathrm{i})$.

(3) La conservation du volume d'eau indique que si le niveau descend de x d'un côté il monte d'autant de l'autre : $z_\mathrm{i} = z_0 - x$ et $z_\mathrm{e} = z_0 + x$. Attention, c'est bien z_i qui intervient.

On utilise ensuite l'équation d'hydrostatique en remplaçant systématiquement z_e, z_i et z_h par ce qui convient en termes de z_0, h et x. Cela conduit à

$$x = \frac{h}{2}\,\frac{\rho_\mathrm{h}}{\rho_\mathrm{e}} = 1{,}4\,\mathrm{cm}$$

et donc à

$$\boxed{z_\mathrm{e} = 11{,}4\,\mathrm{cm} \qquad z_\mathrm{i} = 8{,}6\,\mathrm{cm} \qquad z_\mathrm{h} = 11{,}6\,\mathrm{cm}}$$