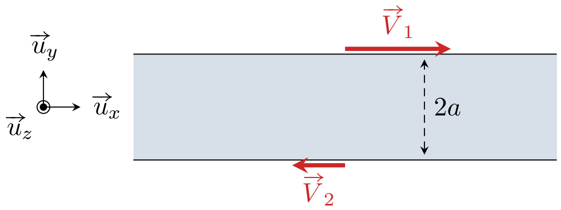
Mécanique des fluides

Exercice 1 : Écoulement de Couette plan



Considérons un fluide confiné entre deux plaques planes infinies situées en $y = \pm a$. La plaque supérieure est tirée à vitesse constante $\vec{V}_1$ dans le sens de $\vec{u}_x$, la plaque inférieure à vitesse constante $\vec{V}_2$ dans le sens opposé.

Le champ de vitesse de l'écoulement est donné par

$$\vec{v} = \left(\frac{V_1 + V_2}{2a} y + \frac{V_1 - V_2}{2} \right) \vec{u}_x \,.$$

1 - Représenter l'allure du champ de vitesse. Indiquer les lignes de courant.

2 - Le fluide considéré est-il un fluide parfait ou visqueux ?

3 - L'écoulement est-il compressible ?

4 - Calculer la vorticité $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v}$ de l'écoulement. Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Lignes de courant : droites selon $\vec{u}_x$. Champ de vitesse dessiné sur la figure 1.

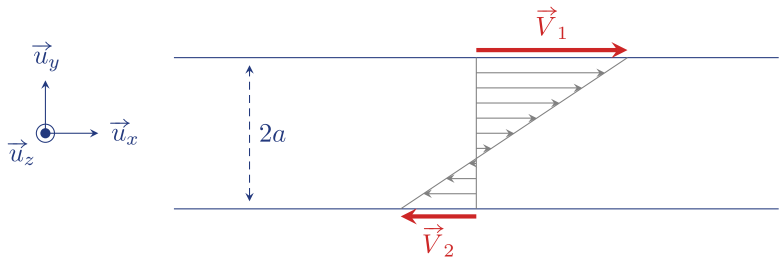


Figure 1 – Champ des vitesses de l'écoulement de Couette plan.

$\boxed{2}$ Visqueux car vitesse du fluide égale à la vitesse de la paroi en $x = \pm a$.

$\boxed{3}$ Calcul :)

$$\mathrm{div}\, \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0$$

Écoulement incompressible.

$\boxed{4}$ Calcul encore :)

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{u}_z = -\frac{V_1 + V_2}{2a} \vec{u}_z$$

Il est donc rotationnel et ça se voit sur le champ de vitesse tracé à la première question.

Exercice 2 : Ballon sonde [oral CCP]

Un ballon-sonde, est assimilé à une sphère incompressible de volume V_b remplie d'hélium, ouverte par le bas. On note m_b la masse du ballon et m_c la masse du matériel qu'il transporte. Le volume du ballon non gonflé est supposé négligeable devant le volume du ballon gonflé, de même que le volume du matériel de mesure. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M_a. La température de l'atmosphère suit la loi $T(z) = T_0(1 - \alpha z)$, et l'accélération de la pesanteur g est supposée indépendante de l'altitude. La vitesse du ballon est très faible, on le suppose donc en permanence en équilibre thermique avec l'atmosphère.

1 - En considérant une tranche d'air de hauteur $\mathrm{d}z$, exprimer le champ de pression sous la forme

$$P(z) = P_0(1-\alpha z)^\beta$$

où P_0 est la pression au sol et β une constante à expliciter en fonction de g, M_a, T_0, α et R la constante des gaz parfaits.

2 - En déduire l'évolution de la masse volumique de l'air avec l'altitude, $\rho_\mathrm{a}(z)$.

L'hélium dans le ballon est à la pression P_He constante et a pour masse molaire M_He.

3 - Expliciter la poussée d'Archimède exercée sur le ballon.

4 - En déduire la masse maximale $m_\mathrm{c,max}(z)$ que peut soulever le ballon à l'altitude z.

5 - Application numérique : calculer $m_\mathrm{c,max}(0)$ au niveau du sol, puis $m_\mathrm{c,max}$ à $h = 10\,\mathrm{km}$ d'altitude.

Données numériques : $m_\mathrm{b} = 1{,}23\,\mathrm{kg}$, $M_\mathrm{a} = 29{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, $M_\mathrm{He} = 4{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, $T_0 = 15\,°\mathrm{C}$, $P_0 = 1{,}013\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$, $\alpha = 2{,}00\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^{-1}}$.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

$\boxed{1}$ Equation locale de la statique des fluides (z vers le haut) :

$$\mathrm{d}P = -\rho g \mathrm{d}z$$

avec d'après la loi des gaz parfaits

$$PV = \frac{m}{M_\mathrm{a}}RT \qquad \text{d'où} \qquad \rho = \frac{M_\mathrm{a}P}{RT}$$

En combinant

$$\mathrm{d}P = -\frac{M_\mathrm{a}P}{RT}g\mathrm{d}z \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{M_\mathrm{a}g}{RT_0}\frac{\mathrm{d}z}{1-\alpha z} = \frac{M_\mathrm{a}g}{\alpha RT_0}\left(\frac{-\alpha\mathrm{d}z}{1-\alpha z}\right).$$

On intègre ensuite entre l'altitude 0 et l'altitude z, ce qui donne

$$\ln\frac{P(z)}{P_0} = \frac{M_\mathrm{a}g}{\alpha RT_0}\ln\frac{1-\alpha z}{1}$$

et on trouve enfin en prenant l'exponentielle

$$P(z) = P_0(1-\alpha z)^\beta \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{M_\mathrm{a}g}{\alpha RT_0}.$$

$\boxed{2}$ $\rho_\mathrm{a} = \dfrac{M_\mathrm{a}P}{RT} = \dfrac{M_\mathrm{a}P_0}{RT_0}(1-\alpha z)^{\beta-1}$.

$\boxed{3}$ Poussée d'Archimède à l'altitude z :

$$\vec{\Pi}_\mathrm{A}(z) = -\rho_\mathrm{a}(z)V_\mathrm{b}\,\vec{g}\,.$$

$\boxed{4}$ La poussée d'Archimède doit compenser le poids du ballon et du matériel qu'il transporte mais aussi celui de l'hélium. Comme le ballon est ouvert par le bas, de l'hélium s'échappe du ballon au fur et à mesure : la quantité de matière d'hélium contenue dans le ballon vaut

$$n_\mathrm{He} = \frac{P_\mathrm{He}V_\mathrm{b}}{RT(z)} \qquad \text{d'où} \qquad m_\mathrm{He} = \frac{P_\mathrm{He}V_\mathrm{b}}{RT_0(1-\alpha z)M_\mathrm{He}}$$

Pour la masse maximale qu'il peut emporter, le ballon est à l'équilibre à la hauteur h, soit

$$m_\mathrm{b}g + m_\mathrm{c,max}(z)g + \frac{P_\mathrm{He}V_\mathrm{b}}{RT_0(1-\alpha z)M_\mathrm{He}}g = \frac{M_\mathrm{a}P_0}{RT_0}(1-\alpha z)^{\beta-1}V_\mathrm{b}g$$

et ainsi

$$\boxed{m_\mathrm{c,max}(z) = \frac{V_\mathrm{b}}{RT_0}\left[M_\mathrm{a}P_0(1-\alpha z)^{\beta-1} - \frac{P_\mathrm{He}}{(1-\alpha z)M_\mathrm{He}}\right] - m_\mathrm{b}}$$

Pour simplifier les calculs en fin d'exercice, on peut plutôt supposer le ballon fermé et inclure la masse d'hélium (constante) dans celle du ballon.

Mécanique des fluides

Exercice 1 : Houle

La houle peut être modélisée par un champ de vitesse

$$\vec{v}(M) = H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\left[\cos(kx-\omega t)\,\vec{u}_x + \sin(kx-\omega t)\,\vec{u}_z\right]$$

où l'axe x est sa direction de propagation et l'axe z un axe vertical ascendant dont l'origine est choisie au niveau moyen de la mer. Par définition, le nombre d'onde k est relié à la longueur d'onde la houle par $k = 2\pi/\lambda$.

1 - Représenter graphiquement le champ de vitesse à l'instant $t = 0$ en $x = 0$ (qui correspond au sommet d'une vague), $x = \lambda/4$ et $x = \lambda/2$ (creux d'une vague).

2 - L'écoulement est-il compressible ?

3 - Calculer la vorticité $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$ de l'écoulement. Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ À l'instant $t = 0$ et en $x = 0$: $\vec{v} = H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\,\vec{u}_x$.
▷ En $x = \lambda/4$ on a $kx = \pi/2$: $\vec{v} = H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\,\vec{u}_z$.
▷ En $x = \lambda/2$ on a $kx = \pi$: $\vec{v} = -H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\,\vec{u}_x$.
Champ de vitesse exponentiel dont on vient de déterminer les directions.

$\boxed{2}$ Calcul

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\sin(kx-\omega t) + 0 + Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\sin(kx-\omega t) = 0$$

donc incompressible.

$\boxed{3}$ Re-calcul :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y = \big(Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\cos(kx-\omega t) - Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\cos(kx-\omega t)\big)\,\vec{u}_y = \vec{0}\,.$$

Écoulement irrotationnel.

Exercice 2 : Alimentation en eau d'une maison depuis un château d'eau [banque PT 2015]

On s'intéresse à une alimentation domestique en eau via un château d'eau. Le château d'eau est modélisé par un réservoir ouvert sur l'atmosphère, haut de $H = 20\,\mathrm{m}$ et de section maximale $S_0 = 25\,\mathrm{m}^2$, voir figure 1. Ce réservoir débouche sur une canalisation horizontale de section $s = 1{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$. Cette canalisation alimente une installation domestique qui comporte un robinet ouvrant sur l'air atmosphérique par une ouverture de même section s.

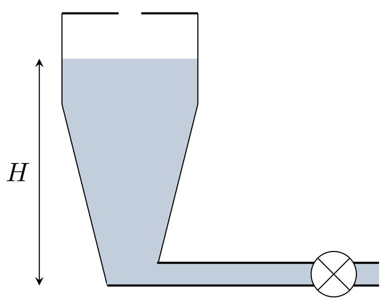


Figure 1

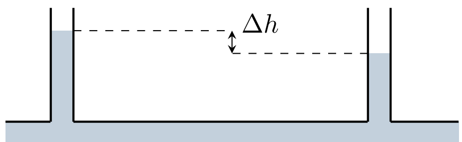


Figure 2

1 - Justifier que la vitesse d'écoulement de l'eau au niveau de la surface libre est négligeable devant la vitesse dans la canalisation.

2 - Calculer numériquement le vitesse de l'eau en sortie du robinet en négligeant les pertes de charge.

3 - Calculer numériquement le débit volumique.

4 - La canalisation horizontale est le lieu d'une perte de charge régulière. Expliquer ce que cela signifie et en donner les causes. Exprimer le théorème de Bernoulli en introduisant un coefficient K caractéristique de cette perte de charge.

5 - Sur la canalisation horizontale on place deux tubes verticaux remplis d'eau séparés de $10\,\mathrm{m}$. On mesure une différence de hauteur d'eau $\Delta h = 2{,}0\,\mathrm{cm}$, voir figure 2. En déduire la perte de charge linéaire due au tuyau d'alimentation.

6 - Quelle est désormais la vitesse de l'eau en sortie du robinet situé à $1{,}0\,\mathrm{km}$ du chateau d'eau ?

7 - On souhaite retrouver la vitesse déterminée au début de l'exercice. On installe pour cela une pompe. Déterminer la puissance qu'elle doit fournir.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

$\boxed{1}$ Écoulement suppose incompressible donc conservation du débit volumique donc

$$S_0 v_{\text{libre}} = s v_{\text{can}} \qquad \text{soit} \qquad \frac{v_{\text{libre}}}{v_{\text{can}}} = \frac{s}{S_0} \ll 1$$

$\boxed{2}$ Bernoulli le long d'une ligne de courant qui va du haut du chateau d'eau jusqu'au robinet donne

$$P_0 + 0 + \rho g H = P_0 + \rho \frac{v_{\text{sortie}}^2}{2} + 0 \qquad \text{d'où} \qquad v_{\text{sortie}} = \sqrt{2gH} = 20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$\boxed{3}$ $D_V = v_{\text{sortie}} s = 20 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}} = 20\,\mathrm{L\cdot s^{-1}}$.

$\boxed{4}$ Dissipation d'énergie mécanique par viscosité. Le théorème de Bernoulli devient

$$P_0 + 0 + \rho g H = P_0 + \rho \frac{v_{\text{sortie}}^2}{2} + 0 + K$$

(ici K est homogène à une pression, on peut le remplacer par $\rho g K'$ où K' est une hauteur, et on peut aussi introduire une perte de charge linéaire homogène à une pression par unité de longueur)

$\boxed{5}$ Relation de l'hydrostatique dans les prises de pression reliée à la pression dans la canalisation : $P_{\text{can}} = P_0 + \rho g h$. Conservation du débit volumique indique que la vitesse d'écoulement est la même sous les deux prises de pression. On en déduit

$$(P_0 + \rho g h_1) + \rho \frac{v_{\text{can}}^2}{2} + \rho g z_{\text{can}} = (P_0 + \rho g h_2) + \rho \frac{v_{\text{can}}^2}{2} + \rho g z_{\text{can}} + K$$

d'où

$$K = \rho g \Delta h \qquad \text{soit} \qquad k = \frac{K}{L} = \frac{\rho\, g\, \Delta h}{L} = 20\,\mathrm{Pa\cdot m^{-1}}$$

$\boxed{6}$ Bernoulli avec perte de charge kL' donne

$$P_0 + 0 + \rho g H = P_0 + \rho \frac{v_{\text{sortie}}^2}{2} + 0 + kL' \qquad \text{soit} \qquad v_{\text{sortie}} = \sqrt{2\left(gH - \frac{kL'}{\rho}\right)} = 13\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$\boxed{7}$ kL' est l'énergie volumique perdue par perte de charge, qu'il faut donc compenser par une pompe de puissance $\mathcal{P} = D_V k L'$.

Étienne Thibierge, 15 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

Mécanique des fluides

Exercice 1 : Écoulement de Poiseuille plan

Considérons un fluide confiné entre deux plaques planes situées en $y = \pm a$, immobiles dans le référentiel d'étude. Une surpression est imposée côté gauche, ce qui entraîne un écoulement de fluide.

Pour x suffisamment loin de l'entrée de la canalisation, le champ de vitesse de l'écoulement est donné par

$$\vec{v} = V_{\text{max}} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \vec{u}_x \,.$$

1 - Représenter l'allure du champ de vitesse. Indiquer les lignes de courant.

2 - Le fluide considéré est-il un fluide parfait ou visqueux ?

3 - L'écoulement est-il compressible ?

4 - Calculer la vorticité $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}$ de l'écoulement. Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Lignes de courant : droites selon $\vec{u}_x$. Champ de vitesse parabolique, nul sur les parois et maximal au centre.

$\boxed{2}$ Visqueux car vitesse du fluide égale à la vitesse de la paroi en $x = \pm a$.

$\boxed{3}$ Calcul :)

$$\text{div}\, \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0$$

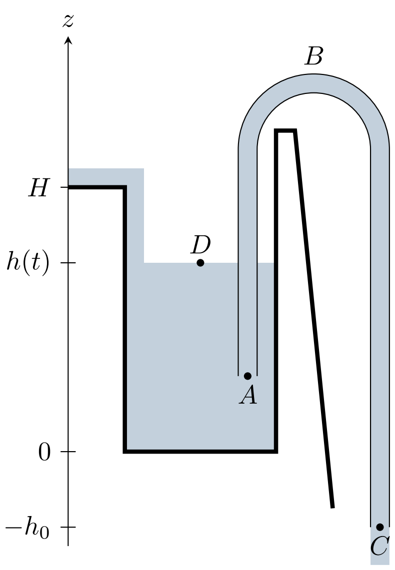
Écoulement incompressible.

$\boxed{4}$ Calcul encore :)

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{u}_z = -\frac{2 V_{\text{max}} y}{a^2} \vec{u}_z$$

Il est donc rotationnel et ça se voit sur le champ de vitesse tracé à la première question.

Exercice 2 : Siphon **[adapté oral CCP]**



À la fonte des neiges, un bassin de surface $\Sigma = 100\,\text{m}^2$ est alimenté en continu par un débit volumique $D_\text{e} = 20\,\text{L} \cdot \text{s}^{-1}$. Ce réservoir est dominé à l'une de ses extrémités par une butte, par dessus laquelle passe un tuyau cylindrique de section $S \ll \Sigma$ qui sert de siphon pour vider le bassin.

On nomme A le point d'entrée du siphon, B le point le plus haut du siphon, C la sortie du siphon, D un point de la surface libre dans le réservoir. La surface libre dans le réservoir et la sortie du siphon sont à la pression atmosphérique P_0.

1 - Que peut-on dire de la vitesse v_D ?

2 - Déterminer la vitesse du fluide en sortie du siphon. En déduire une condition sur C pour que le fluide s'écoule.

3 - Déterminer la pression P_B dans le fluide au point B. En déduire une condition sur B pour que le fluide s'écoule.

4 - À partir de la question précédente, expliquer pourquoi un siphon a besoin d'être amorcé. Que faut-il faire pour réaliser en pratique cet amorçage ?

5 - Déterminer les valeurs minimale et maximale de S pour que le système fonctionne correctement, c'est-à-dire que l'eau ne déborde pas du réservoir et que le siphon fonctionne sans se désamorcer.

Étienne Thibierge, 15 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

Une fois l'été venu, le débit d'entrée se tarit puis s'annule. On suppose que le réservoir est alors à moitié rempli, $h = H/2$.

6 - Montrer que h est alors solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{S}{\Sigma}\sqrt{2g(h+h_0)} + D_0\,.$$

7 - Résoudre cette équation et déterminer le temps nécessaire pour vidanger complètement le réservoir.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

Hypothèse : écoulement incompressible et parfait (sous-entendu par l'énoncé donc à préciser par le candidat !)

$\boxed{1}$ Compte tenu de la taille du bassin, de la valeur du débit d'entrée et de la différence entre S et Σ on peut faire l'hypothèse que $v_D \simeq 0$.

$\boxed{2}$ Théorème de Bernoulli appliqué le long d'une ligne de courant qui va de D à C :

$$P_0 + 0 + \rho g h = P_0 + \rho\frac{v_C^2}{2} + \rho g h_0 \qquad \text{d'où} \qquad v_C = \sqrt{2g(h+h_0)}$$

Il faut donc avoir $z_D > z_C$, c'est-à-dire que la sortie du siphon doit se trouver sous la surface libre du réservoir.

$\boxed{3}$ Bernoulli appliqué entre B et C :

$$P_B + \rho\frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B = P_0 + \rho\frac{v_C^2}{2} + \rho g z_C$$

Conservation du débit volumique : $v_B = v_C$ ce qui permet de simplifier, d'où

$$P_B = P_0 + \rho g(z_C - z_B)$$

Comme P_B doit être positive, alors $z_B < z_C + \dfrac{P_0}{\rho g}$

$\boxed{4}$ Lorsque le siphon est vide $P_B = P_0 = P_C$. Il faut aspirer pour faire monter le liquide dans le siphon.

$\boxed{5}$ Débit en sortie du siphon, connaissant v_C :

$$D_\mathrm{s} = S\sqrt{2g(h_0+h)}\,.$$

Bon fonctionnement du siphon :
▷ si $h = H$ alors il faut avoir $D_\mathrm{s} > D_\mathrm{e}$ sinon le réservoir déborde, d'où

$$s > \frac{D_\mathrm{e}}{\sqrt{2g(h_0+H)}} = 4{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

▷ si $h = z_A$ alors il faut avoir $D_\mathrm{s} < D_\mathrm{e}$ sinon le siphon se désamorce

$$s < \frac{D_\mathrm{e}}{\sqrt{2g(h_0+z_A)}} = 5{,}8\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

> *Énoncé pas très clair : si le réservoir déborde, est-ce par dessus la butte ou sur le côté gauche de la figure ? Cependant cela ne change rien à la résolution et c'est très simple à rectifier devant l'examinateur.*

$\boxed{6}$ Conservation du débit volumique, et attention car $\dot{h}_D = -v_D$

$\boxed{7}$ Séparation des variables :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2g(h+h_0)}} = -\frac{S}{\Sigma}\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \int_{H/2}^{0}\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2g(h+h_0)}} = -\frac{S}{\Sigma}\int_0^{\tau_\text{vide}}\mathrm{d}t$$

On reconnaît à gauche l'intégrale d'une fonction de la forme $u'/2\sqrt{u}$ en la réécrivant sous la forme

$$\frac{1}{g}\int_{H/2}^{0}\frac{2g}{2\sqrt{2g(h+h_0)}}\mathrm{d}h = -\frac{S}{\Sigma}\int_0^{\tau_\text{vide}}\mathrm{d}t$$

ce qui conduit à

$$\frac{1}{g}\left[\sqrt{2g\,(h+h_0)}\right]_{H/2}^{0} = -\frac{S}{\Sigma}\tau_{\text{vide}}$$

et enfin

$$\boxed{\tau_{\text{vide}} = \frac{\Sigma}{S}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{\frac{H}{2}+h_0}-\sqrt{h_0}\right)}$$

Étienne Thibierge, 15 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr