Colles semaine 12 – Sujet A Langevin-Wallon, PT 2017-2018

Théorème de Bernoulli

Question de cours

Établir le premier principe pour un système ouvert.

Exercice 1 : Alimentation en eau d'une maison depuis un château d'eau [banque PT 2015]

On s'intéresse à une alimentation domestique en eau via un château d'eau. Le château d'eau est modélisé par un réservoir ouvert sur l'atmosphère, haut de $H = 20\,\mathrm{m}$ et de section maximale $S_0 = 25\,\mathrm{m}^2$, voir figure 1. Ce réservoir débouche sur une canalisation horizontale de section $s = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$. Cette canalisation alimente une installation domestique qui comporte un robinet ouvrant sur l'air atmosphérique par une ouverture de même section s.

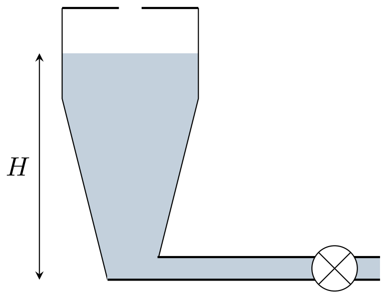


Figure 1

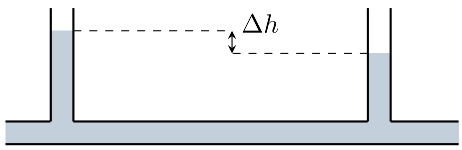


Figure 2

1 - Justifier que la vitesse d'écoulement de l'eau au niveau de la surface libre est négligeable devant la vitesse dans la canalisation.

2 - Calculer numériquement le vitesse de l'eau en sortie du robinet en négligeant les pertes de charge.

3 - Calculer numériquement le débit volumique.

4 - La canalisation horizontale est le lieu d'une perte de charge régulière. Expliquer ce que cela signifie et en donner les causes. Exprimer le théorème de Bernoulli en introduisant un coefficient K caractéristique de cette perte de charge.

5 - Sur la canalisation horizontale on place deux tubes verticaux remplis d'eau séparés de $10\,\mathrm{m}$. On mesure une différence de hauteur d'eau $\Delta h = 2{,}0\,\mathrm{cm}$, voir figure 2. En déduire la perte de charge linéaire due au tuyau d'alimentation.

6 - Quelle est désormais la vitesse de l'eau en sortie du robinet situé à $1{,}0\,\mathrm{km}$ du chateau d'eau ?

7 - On souhaite retrouver la vitesse déterminée au début de l'exercice. On installe pour cela une pompe. Déterminer la puissance qu'elle doit fournir.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Écoulement suppose incompressible donc conservation du débit volumique donc

$$S_0 v_\mathrm{libre} = s v_\mathrm{can} \qquad \text{soit} \qquad \frac{v_\mathrm{libre}}{v_\mathrm{can}} = \frac{s}{S_0} \ll 1$$

$\boxed{2}$ Bernoulli le long d'une ligne de courant qui va du haut du chateau d'eau jusqu'au robinet donne

$$P_0 + 0 + \rho g H = P_0 + \rho \frac{v_\mathrm{sortie}^2}{2} + 0 \qquad \text{d'où} \qquad v_\mathrm{sortie} = \sqrt{2gH} = 20\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$\boxed{3}$ $D_V = v_\mathrm{sortie} s = 20 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}} = 20\,\mathrm{L \cdot s^{-1}}$.

$\boxed{4}$ Dissipation d'énergie mécanique par viscosité. Le théorème de Bernoulli devient

$$P_0 + 0 + \rho g H = P_0 + \rho \frac{v_\mathrm{sortie}^2}{2} + 0 + K$$

Étienne Thibierge, 15 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

(ici K est homogène à une pression, on peut le remplacer par $\rho g K'$ où K' est une hauteur, et on peut aussi introduire une perte de charge linéaire homogène à une pression par unité de longueur)

5 Relation de l'hydrostatique dans les prises de pression reliée à la pression dans la canalisation : $P_{\text{can}} = P_0 + \rho g h$. Conservation du débit volumique indique que la vitesse d'écoulement est la même sous les deux prises de pression. On en déduit

$$(P_0 + \rho g h_1) + \rho \frac{v_{\text{can}}^2}{2} + \rho g z_{\text{can}} = (P_0 + \rho g h_2) + \rho \frac{v_{\text{can}}^2}{2} + \rho g z_{\text{can}} + K$$

d'où

$$K = \rho g \Delta h \qquad \text{soit} \qquad k = \frac{K}{L} = \frac{\rho\, g\, \Delta h}{L} = 20\,\mathrm{Pa \cdot m^{-1}}$$

6 Bernoulli avec perte de charge kL' donne

$$P_0 + 0 + \rho g H = P_0 + \rho \frac{v_{\text{sortie}}^2}{2} + 0 + kL' \qquad \text{soit} \qquad v_{\text{sortie}} = \sqrt{2\left(gH - \frac{kL'}{\rho}\right)} = 13\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

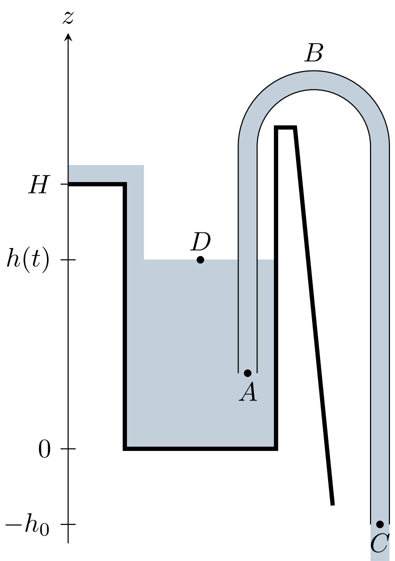
7 kL' est l'énergie volumique perdue par perte de charge, qu'il faut donc compenser par une pompe de puissance $\mathcal{P} = D_V kL'$.

Théorème de Bernoulli

Question de cours

Établir le théorème de Bernoulli.

Exercice 1 : Siphon [adapté oral CCP]



À la fonte des neiges, un bassin de surface $\Sigma = 100\,\mathrm{m}^2$ est alimenté en continu par un débit volumique $D_\mathrm{e} = 20\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Ce réservoir est dominé à l'une de ses extrémités par une butte, par dessus laquelle passe un tuyau cylindrique de section $S \ll \Sigma$ qui sert de siphon pour vider le bassin.

On nomme A le point d'entrée du siphon, B le point le plus haut du siphon, C la sortie du siphon, D un point de la surface libre dans le réservoir. La surface libre dans le réservoir et la sortie du siphon sont à la pression atmosphérique P_0.

1 - Que peut-on dire de la vitesse v_D ?

2 - Déterminer la vitesse du fluide en sortie du siphon. En déduire une condition sur C pour que le fluide s'écoule.

3 - Déterminer la pression P_B dans le fluide au point B. En déduire une condition sur B pour que le fluide s'écoule.

4 - À partir de la question précédente, expliquer pourquoi un siphon a besoin d'être amorcé. Que faut-il faire pour réaliser en pratique cet amorçage ?

5 - Déterminer les valeurs minimale et maximale de S pour que le système fonctionne correctement, c'est-à-dire que l'eau ne déborde pas du réservoir et que le siphon fonctionne sans se désamorcer.

Une fois l'été venu, le débit d'entrée se tarit puis s'annule. On suppose que le réservoir est alors à moitié rempli, $h = H/2$.

6 - Montrer que h est alors solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{S}{\Sigma}\sqrt{2g(h+h_0)} + D_0\,.$$

7 - Résoudre cette équation et déterminer le temps nécessaire pour vidanger complètement le réservoir.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Hypothèse : écoulement incompressible et parfait (sous-entendu par l'énoncé donc à préciser par le candidat !)

$\boxed{1}$ Compte tenu de la taille du bassin, de la valeur du débit d'entrée et de la différence entre S et Σ on peut faire l'hypothèse que $v_D \simeq 0$.

$\boxed{2}$ Théorème de Bernoulli appliqué le long d'une ligne de courant qui va de D à C :

$$P_0 + 0 + \rho g h = P_0 + \rho\frac{v_C^2}{2} + \rho g h_0 \qquad \text{d'où} \qquad v_C = \sqrt{2g(h+h_0)}$$

Il faut donc avoir $z_D > z_C$, c'est-à-dire que la sortie du siphon doit se trouver sous la surface libre du réservoir.

$\boxed{3}$ Bernoulli appliqué entre B et C :

$$P_B + \rho\frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B = P_0 + \rho\frac{v_C^2}{2} + \rho g z_C$$

Conservation du débit volumique : $v_B = v_C$ ce qui permet de simplifier, d'où

$$P_B = P_0 + \rho g(z_C - z_B)$$

Étienne Thibierge, 15 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

Comme P_B doit être positive, alors $z_B < z_C + \dfrac{P_0}{\rho g}$

4 Lorsque le siphon est vide $P_B = P_0 = P_C$. Il faut aspirer pour faire monter le liquide dans le siphon.

5 Débit en sortie du siphon, connaissant v_C :

$$D_\mathrm{s} = S\sqrt{2g(h_0+h)}\,.$$

Bon fonctionnement du siphon :
▷ si $h = H$ alors il faut avoir $D_\mathrm{s} > D_\mathrm{e}$ sinon le réservoir déborde, d'où

$$s > \frac{D_\mathrm{e}}{\sqrt{2g(h_0+H)}} = 4{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

▷ si $h = z_A$ alors il faut avoir $D_\mathrm{s} < D_\mathrm{e}$ sinon le siphon se désamorce

$$s < \frac{D_\mathrm{e}}{\sqrt{2g(h_0+z_A)}} = 5{,}8\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

> *Énoncé pas très clair : si le réservoir déborde, est-ce par dessus la butte ou sur le côté gauche de la figure ? Cependant cela ne change rien à la résolution et c'est très simple à rectifier devant l'examinateur.*

6 Conservation du débit volumique, et attention car $\dot{h}_D = -v_D$

7 Séparation des variables :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2g(h+h_0)}} = -\frac{S}{\Sigma}\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \int_{H/2}^{0}\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2g(h+h_0)}} = -\frac{S}{\Sigma}\int_0^{\tau_\mathrm{vide}}\mathrm{d}t$$

On reconnaît à gauche l'intégrale d'une fonction de la forme $u'/2\sqrt{u}$ en la réécrivant sous la forme

$$\frac{1}{g}\int_{H/2}^{0}\frac{2g}{2\sqrt{2g(h+h_0)}}\mathrm{d}h = -\frac{S}{\Sigma}\int_0^{\tau_\mathrm{vide}}\mathrm{d}t$$

ce qui conduit à

$$\frac{1}{g}\left[\sqrt{2g\,(h+h_0)}\right]_{H/2}^{0} = -\frac{S}{\Sigma}\tau_\mathrm{vide}$$

et enfin

$$\boxed{\tau_\mathrm{vide} = \frac{\Sigma}{S}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{\frac{H}{2}+h_0}-\sqrt{h_0}\right)}$$