Thermodynamique des systèmes ouverts et filtres

Question de cours

Établir le premier principe pour un système ouvert.

Exercice 1 : Filtre RLC [oral banque PT]

1 - Identifier sans calcul la nature du filtre du montage figure 1.

2 - Déterminer la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H} = \frac{\dfrac{\mathrm{j}x}{Q} - x^2}{1 + \dfrac{\mathrm{j}x}{Q} - x^2} \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Identifier la fréquence de résonance ω_0 et le facteur de qualité Q.

3 - On donne le diagramme de Bode du filtre figure 1. Expliquer les valeurs prises par la pente en haute et basse fréquence. Déterminer la valeur de Q.

4 - On met un signal triangulaire en entrée. Pour le même signal d'entrée mais pour deux valeurs différentes de R, on obtient un signal carré très atténué puis un signal formé d'une succession d'impulsions. Expliquer.

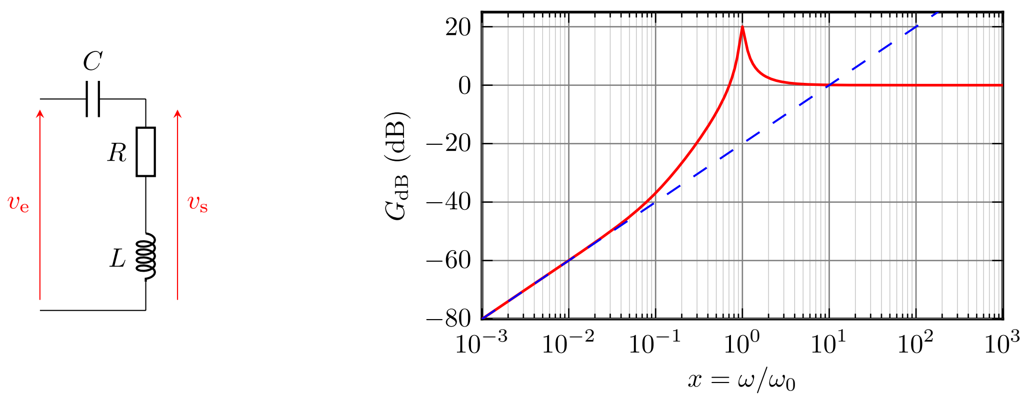


Figure 1 – Schéma et diagramme de Bode asymptotique d'un filtre RLC.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ TBF : L est un fil et C un interrupteur ouvert, donc $i = 0$, et ainsi $v_s = u_R + u_L = 0 + 0$.

THF : C est un fil donc on a directement $v_s = v_e$.

$\rightsquigarrow$ c'est un passe-haut.

$\boxed{2}$ Diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_{RL}}}{\underline{Z_{RL}} + \underline{Z_C}} = \frac{R + \mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}\,.$$

Pour passer à la forme canonique, on multiplie en haut et en bas par $\mathrm{j}C\omega$,

$$\underline{H} = \frac{\mathrm{j}RC\omega - LC\omega^2}{1 + \mathrm{j}RC\omega - LC\omega^2}$$

et comme c'est un circuit RLC série on identifie $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, d'où

$$\underline{H} = \frac{\dfrac{\mathrm{j}x}{Q} - x^2}{1 + \dfrac{\mathrm{j}x}{Q} - x^2}$$

Étienne Thibierge, 15 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

$\boxed{3}$ TBF : $\underline{H} \sim \dfrac{\mathrm{j}x}{Q}$ d'où $G_{\mathrm{dB}} \sim 20 \log x - 20 \log Q$ d'où la pente de -20 dB/déc.

THF : $\underline{H} \sim 1$ d'où la droite horizontale.

Avec l'ordonnée à l'origine de l'asymptote TBF ($x = 10^0 = 1$), on déduit $Q = 10$. On peut aussi utiliser le fait que $G_{\mathrm{TBF}} = 0$ lorsque $x = Q$.

$\boxed{4}$ Question pas simple. Changer R modifie la valeur de Q, mais cela a un impact énorme sur le diagramme de Bode. On peut s'en rendre compte avec l'ordonnée à l'origine de l'asymptote.

Le signal carré est la dérivée du signal triangulaire. On est donc à fréquence suffisamment basse pour que tout le spectre du signal soit dans le domaine TBF du filtre, et comme la pente est de $+20$ dB/déc il se comporte en dérivateur.

Si l'on observe des impulsions, cela signifie que les variations brusques du signal sont sensiblement mieux transmises que les variations lentes. On est donc dans un domaine de fréquences intermédiaires.

Exercice 2 : Tuyère calorifugée [oral banque PT]

Une tuyère est une simple conduite de section variable, dans laquelle un gaz se détend tout en étant accéléré. On étudie l'écoulement d'un gaz parfait dans une tuyère calorifugée. On suppose négligeable la vitesse d'entrée du fluide par rapport à sa vitesse de sortie. Les grandeurs d'entrée de la tuyère sont indicées 0.

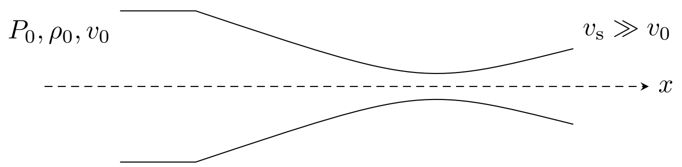


Figure 2 – Tuyère calorifugée.

1 - Montrer que $h(x) + \dfrac{1}{2} v(x)^2 = \text{cte}$, avec h l'enthalpie massique du gaz et v la vitesse d'écoulement dans la tuyère.

2 - En déduire que

$$v(x) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P(x)}{\rho(x)}\right)}$$

avec γ le coefficient isentropique du gaz.

3 - Dans l'hypothèse d'un écoulement réversible, établir alors la loi de Barré de Saint Venant,

$$v(x) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{P_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{P(x)}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}\,.$$

Éléments de correction de l'exercice 2 :

$\boxed{1}$ PPTSO appliqué au système compris entre le tranche d'abscisse $x = 0$ et celle d'abscisse x pour un fluide en écoulement. Pas de travail autre que celui des forces de pression ni de transfert thermique. Ainsi,

$$h(x) + \frac{1}{2} v(x)^2 = h_0 + \frac{1}{2} {v_0}^2 = \text{cte}\,.$$

$\boxed{2}$ On suppose $v_0 = 0$, et comme il s'agit d'un gaz parfait alors

$$h(x) - h_0 = c_P\,[T(x) - T_0] \qquad \text{donc} \qquad v(x)^2 = 2c_P\,[T_0 - T(x)]$$

Or d'une part

$$c_P = \frac{1}{m} \times \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)}$$

et d'autre part l'équation d'état s'écrit

$$\frac{PV}{m} = \frac{nRT}{m} \qquad \text{soit} \qquad \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} \qquad \text{d'où} \qquad T = \frac{MP}{R\rho}$$

d'où finalement

$$v(x)^2 = \frac{2\gamma R}{M(\gamma-1)} \times \frac{M}{R}\left[\frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P(x)}{\rho(x)}\right]$$

et

$$\boxed{v(x) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P(x)}{\rho(x)}\right)}}$$

3 Réécrivons

$$v(x) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{P_0}{\rho_0}\left(1 - \frac{P(x)\rho_0}{\rho(x)P_0}\right)}$$

Adiabatique réversible d'un gaz parfait donc loi de Laplace : $PV^\gamma = \text{cte}$ donne en fonction de ρ

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cte}' \qquad \text{soit} \qquad \frac{P^{1/\gamma}}{\rho} = \text{cte}'' \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\rho_0}{\rho(x)} = \left(\frac{P_0}{P(x)}\right)^{1/\gamma}$$

Finalement, on arrive au résultat cherché :

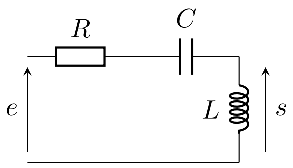
$$\boxed{v(x) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{P_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{P(x)}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}\,.}$$

Thermodynamique des systèmes ouverts et filtres

Question de cours

Établir le premier principe pour un système ouvert.

Exercice 1 : Filtre passe-haut d'ordre 2



1 - Justifier que ce filtre est un filtre passe-haut. Définir sa pulsation caractéristique ω_0 et son facteur de qualité Q.

2 - Déterminer sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme

$$\underline{H} = \frac{\mathrm{j}Qx}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\frac{1}{x}\right)} \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}\,.$$

3 - Déterminer la pente des asymptotes du diagramme de Bode en gain. Tracer qualitativement son allure en supposant que le facteur de qualité est tel que le circuit n'est pas résonant.

4 - Ce filtre peut-il avoir un comportement dérivateur ? intégrateur ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Analysons qualitativement les régimes asymptotiques.

- à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil donc $\underline{S}=0$;
- à très haute fréquence la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, ce qui empêche tout courant de parcourir le circuit. Comme par le condensateur est équivalent à un fil, on déduit de la loi des mailles $\underline{S}=\underline{E}$.

Conclusion : il s'agit bien d'un **filtre passe-haut**.

$\boxed{2}$ D'après la relation du pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}+\mathrm{j}L\omega} = \frac{\mathrm{j}\dfrac{L}{R}\omega}{1+\dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega}+\mathrm{j}\dfrac{L}{R}\omega}$$

Pour faire apparaître la forme souhaitée, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $1=\omega_0/\omega_0$, ce qui permet d'écrire

$$\underline{H} = \frac{\mathrm{j}\dfrac{L\omega_0}{R}x}{1+\dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega_0 x}+\mathrm{j}\dfrac{L\omega_0}{R}x}$$

Comme pour ce circuit RLC série $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, on en identifie

$$\frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = Q \qquad \text{et} \qquad RC\omega_0 = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}\,.$$

ce qui permet enfin de faire apparaître la forme souhaitée,

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\mathrm{j}Qx}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\frac{1}{x}\right)}}$$

$\boxed{3}$ Simplifions la fonction de transfert dans les deux limites asymptotiques. À très basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$ ou $x \ll 1$),

$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}Qx}{-\mathrm{j}Q/x} \sim -x^2 \qquad \text{donc} \qquad G_{\mathrm{dB}} \sim 20\log x^2 = 40 \log x$$

La pente de l'asymptote très basse fréquence est donc de +40 dB/décade. De même, dans la limite très haute fréquence $x \gg 1$,

$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}Qx}{\mathrm{j}Qx} \sim 1 \qquad \text{donc} \qquad G_{\mathrm{dB}} \sim 0$$

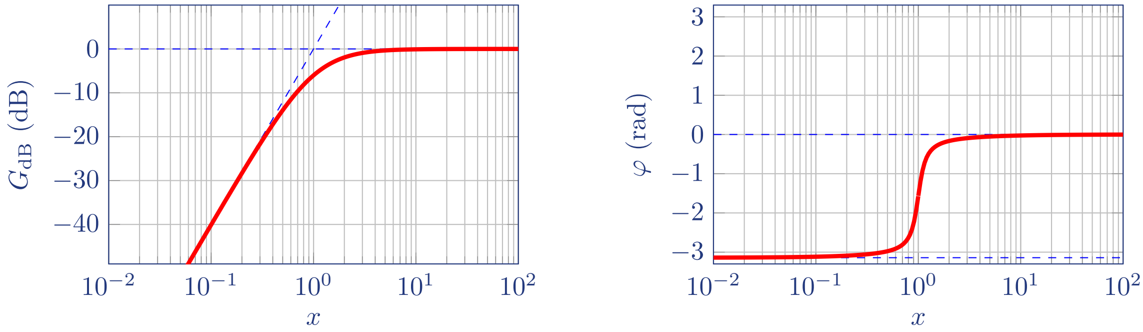


Figure 1 – Diagramme de Bode du filtre RLC passe-haut d'ordre 2. Tracé pour $Q = 1/2$, diagramme de Bode en phase ajouté pour information.

L'asymptote très haute fréquence est donc horizontale. Le diagramme de Bode asymptotique et le diagramme de Bode réel (tracé pour $Q = 1/2 < 1/\sqrt{2}$) sont représentés figure 1.

$\boxed{4}$ Le comportement intégrateur ou dérivateur d'un filtre se traduit en termes de diagramme de Bode par une asymptote de pente ±20 dB/décade, ce qui n'est pas le cas ici : **il n'existe aucun domaine de fréquence dans lequel ce filtre a un comportement d'intégrateur ou de dérivateur**.

Exercice 2 : Mélangeur de douche

On s'intéresse à un mélangeur de douche supposé parfaitement calorifugé. L'écoulement d'eau chaude, de débit volumique D_1, provient d'un chauffe-eau à température $T_1 = 65\,°\text{C}$. Celui d'eau froide, de débit D_2, est à la température $T_2 = 12\,°\text{C}$. La pression est identique dans les deux canalisations et vaut $P = 3\,\text{bar}$.

Déterminer les débits d'eau chaude et d'eau froide pour que l'eau sorte du pommeau de douche à la température $T = 40\,°\text{C}$ et avec un débit total $D = 0{,}20\,\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$.

Donnée : capacité thermique massique de l'eau liquide $c = 4{,}2\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

Conservation du débit : $D = D_1 + D_2$.

Premier principe des systèmes ouverts appliqué au mélangeur, en négligeant les variations d'énergie cinétique et potentielle de l'eau, et avec $\mathcal{P}_{\text{méca}} = \mathcal{P}_{\text{th}} = 0$ donne

$$Dh - (D_1 h_1 + D_2 h_2) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{D_1}{D_2} = \frac{h - h_2}{h_1 - h}$$

et comme $\Delta h = c\Delta T$ alors

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{T - T_2}{T_1 - T}$$

et en retournant les équations

$$D_1 = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} D = 0{,}11\,\text{L}\cdot\text{s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad D_2 = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} D = 0{,}09\,\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$$

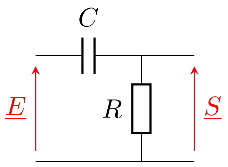
Étienne Thibierge, 15 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

Thermodynamique des systèmes ouverts et filtres

Question de cours

Établir le premier principe pour un système ouvert.

Exercice 1 : Filtre CR



1 - Déterminer sans calcul la nature du filtre ci-contre.

2 - Établir sa fonction de transfert et identifier une pulsation caractéristique ω_c.

3 - Représenter son diagramme de Bode asymptotique.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Passe-haut.

$\boxed{2}$ $\underline{H} = \dfrac{R}{1/\mathrm{j}c\omega + R} = \dfrac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega}$ donc $\omega_c = 1/RC$.

$\boxed{3}$ Pente +20 dB/décade pour $\omega < \omega_c$ et nulle ensuite.

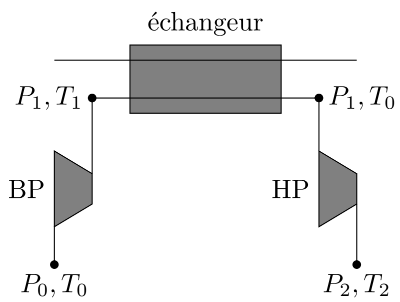
Exercice 2 : Compresseurs étagés

Les compresseurs mono-étagés présentent deux inconvénients majeurs : d'une part, si l'on souhaite obtenir des rapports de compression β élevés, la température du fluide en fin de compression est très élevée et peut dépasser la température maximale (de l'ordre de 200 °C) au delà de laquelle certains éléments du compresseur risquent de se déteriorer, en particulier les soupapes d'ouverture et de fermeture ; d'autre part, ils manquent de rentabilité. Le but de cet exercice est de montrer que le travail de transvasement qui permet de faire fonctionner un compresseur étagé est, pour le même rapport de compression β, plus faible que celui d'un compresseur mono-étagé.

On considère un fluide gazeux, modélisé par un gaz parfait, dont les capacités thermiques massiques à pression et volume constants sont respectivement

$$c_P = \frac{\gamma\, r}{\gamma - 1} = 1{,}0\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}} \qquad \text{et} \qquad c_V = \frac{r}{\gamma-1} = 0{,}714\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}\,.$$

où $r = R/M$, M étant la masse molaire du gaz. Partant de conditions initiales ($P_0 = 1\,\mathrm{bar}$, $T_0 = 273\,\mathrm{K}$), le fluide est comprimé jusqu'à la pression $P_2 = 25\,\mathrm{bar}$ en utilisant un compresseur à deux étages.



- ▷ Dans l'étage basse pression (BP), le fluide est comprimé de façon isentropique jusqu'à la pression P_1. On note $\beta_1 = P_1/P_0$ le taux de compression correspondant.
- ▷ Dans l'étage haute pression (HP), le fluide est comprimé de façon isentropique jusqu'à la pression P_2. On note $\beta_2 = P_2/P_1$ le taux de compression correspondant.
- ▷ Entre les deux étages, le fluide subit un refroidissament isobare dans un échangeur thermique jusqu'à retrouver sa température initiale T_0.

1 - Par définition, le travail de transvasement représente le travail indiqué réversible réalisé en l'absence de variations d'énergie cinétique et potentielle du fluide. Montrer que le travail de transvasement du gaz considéré dans un des compresseurs, par exemple celui de l'étage BP, vaut

$$w_{\mathrm{t,BP}} = r\frac{\gamma}{\gamma-1}(T_1 - T_0)\,.$$

2 - En déduire que le travail de transvasement total w_{t} que doit exercer un opérateur pour « transvaser » le fluide depuis son état thermodynamique initial ET_0 jusqu'à son état thermodynamique final ET_2 vaut

$$w_{\mathrm{t}} = r\frac{\gamma}{\gamma-1}(T_1 + T_2 - 2T_0)\,.$$

3 - Exprimer ce travail en fonction de T_0, β_1 et β_2.

4 - Montrer que le travail de transvasement est minimal si la pression de l'étage intermédiaire vérifie

$$P_1 = \sqrt{P_0\,P_2}\,.$$

Comparer alors β_1 et β_2 lorsque cette condition est satisfaite.

5 - Calculer numériquement T_1 et T_2 dans le cas du compresseur optimisé. Comparer à la température finale obtenue dans un compresseur mono-étagé fonctionnant entre les mêmes pressions P_0 et P_2. Conclure.

6 - Calculer numériquement le travail de transvasement du compresseur étagé optimisé, et comparer au travail dépensé pour un compresseur mono-étagé. Conclure.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

$\boxed{1}$ Compression réversible et on néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle : le travail de transvasement est égal au travail indiqué total reçu par unité de masse de fluide dans le compresseur. D'après le premier principe,

$$\Delta h = w_{\mathrm{t,BP}} + q_{\mathrm{BP}}$$

Compression adiabatique donc $q_{\mathrm{BP}} = 0$. Par ailleurs, le fluide est un gaz parfait donc $\Delta h = c_P\,\Delta T$ (loi de Joule), d'où

$$w_{\mathrm{t,BP}} = c_P(T_1 - T_0)$$

$\boxed{2}$ Comme un échangeur ne contient pas de parties mobiles,

$$w_{\mathrm{t}} = w_{\mathrm{t,BP}} + 0 + w_{\mathrm{t,HP}} = c_P(T_1 + T_2 - 2T_0)$$

$\boxed{3}$ Les compressions sont adiabatiques réversibles, donc isentropiques. D'après la loi de Laplace, $P^{1-\gamma}\,T^{\gamma} = \text{cte}$, d'où

$$T_1 = T_0\,\beta_1^{1-1/\gamma} \qquad \text{et} \qquad T_2 = T_0\,\beta_2^{1-1/\gamma}$$

Finalement,

$$w_{\mathrm{t}} = c_P\,T_0\left(\beta_1^{1-1/\gamma} + \beta_2^{1-1/\gamma} - 2\right)\,.$$

$\boxed{4}$ Les rapports $\beta_1 = P_1/P_0$ et $\beta_2 = P_2/P_1$ sont deux fonctions explicites de P_1. La valeur $P_1^\star$ qui minimise w_{t} est telle que

$$\frac{\partial w_{\mathrm{t}}}{\partial P_1} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \beta_1^{-1/\gamma}\times\frac{\partial\beta_1}{\partial P_1} + \beta_2^{-1/\gamma}\times\frac{\partial\beta_2}{\partial P_1} = 0$$

soit en substituant

$$\beta_1^{-1/\gamma}\,\frac{1}{P_0} - \beta_2^{-1/\gamma}\,\frac{P_2}{P_1^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad P_1^2 = P_0\,P_2\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{-1/\gamma} = P_0\,P_2\left(\frac{P_1^2}{P_0\,P_2}\right)^{-1/\gamma}\,.$$

La seule possibilité pour vérifier cette dernière égalité est d'avoir $P_1^\star = \sqrt{P_0\,P_2}$. Il est alors direct d'en déduire que dans ce cas

$$\beta_1 = \beta_2\,.$$

On pose ensuite tout simplement $\beta = \beta_1 = \beta_2$.

$\boxed{5}$ Loi de Laplace appliqué aux isentropiques :

$$T_2 = T_1 = \beta^{1-\frac{1}{\gamma}}T_0 = 432\,\mathrm{K}$$

car $\beta_{\text{tot}} = P_2/P_0 = \beta^2 = 25$. Pour un compresseur mono-étagé,

$$T_2' = \beta_{\text{tot}}^{1-\frac{1}{\gamma}} T_0 = 685\,\text{K}$$

Température plus élevée, donc plus de risque de dégrader certaines pièces.

6 On reprend l'expression de w_{t} établie précédemment, mais avec $\beta_1 = \beta_2$,

$$w_{\text{t}} = 2c_P\,T_0\left(\beta^{1-1/\gamma} - 1\right) = 319\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\,.$$

alors que pour un compresseur mono-étagé

$$w_{\text{t}} = c_P\,T_0\left(\beta_{\text{tot}}^{1-1/\gamma} - 1\right) = 412\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\,.$$

Plus économique.