Électrostatique

Exercice 1 : Champ électrostatique créé par une boule creuse [oral banque PT]

Une boule de centre O et de rayon R contient des charges dont la densité volumique ρ est homogène.

1 - Déterminer la direction du champ $\vec{E}$ et la variable dont dépend la norme de $\vec{E}$.

2 - Calculer en tout point de l'espace le champ $\vec{E}(M)$. Représenter la norme de $\vec{E}$ en fonction de la variable d'espace.

3 - En déduire le potentiel $V(M)$ en tout point de l'espace. Tracer la courbe représentant $V(M)$ en fonction de la variable d'espace.

À l'intérieur de la boule se trouve une cavité sphérique creuse de rayon $R' < R$.

4 - Supposons les deux sphères concentriques. Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace sans avoir recours au théorème de Gauss.

5 - On suppose maintenant que le centre des deux sphères est distant de $OO' = a < R'$. Déterminer le champ électrique et le potentiel dans la cavité.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

$\boxed{2}$ Utilisation du théorème de Gauss.

$$\begin{cases} \vec{E}(r) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & \text{pour } r > R \\ \vec{E}(r) = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r & \text{pour } r \leq R \end{cases}$$

$\boxed{3}$ $E_r = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ qu'on intègre. Potentiel nul à l'infini, et continu en $r = R$.

$$\begin{cases} V(r) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} & \text{pour } r > R \\ V(r) = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \dfrac{r^2}{3}\right) & \text{pour } r \leq R \end{cases}$$

$\boxed{4}$ Principe de superposition : on voit la cavité comme une boule de densité volumique de charge $-\rho$, et on somme les deux champs.

$$\begin{cases} \vec{E}(r) = \dfrac{\rho(R^3 - R'^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & \text{pour } r > R \\ \vec{E}(r) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \dfrac{R'^3}{r^2}\right)\vec{e}_r & \text{pour } R' < r \leq R \\ \vec{E}(r) = \vec{0} & \text{pour } r < R' \end{cases}$$

$\boxed{5}$ Là encore principe de superposition

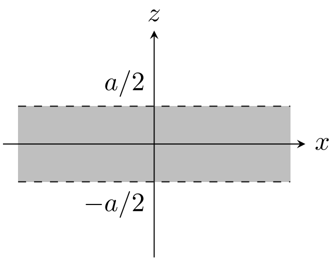
$$\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r - \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r{}'$$

avec $r\,\vec{e}_r = \overrightarrow{OM}$ et $r'\,\vec{e}_r{}' = \overrightarrow{O'M}$, soit

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O'M}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OO'}$$

Le champ est uniforme dans la cavité, d'autant plus grand que les centres sont éloignés.

Exercice 2 : Champ électrostatique créé par une couche chargée



On considère une couche épaisse, comprise entre les deux plans d'équation $z = -a/2$ et $z = +a/2$ et infinie dans les directions x et y, chargée uniformément en volume avec une densité volumique de charge ρ_0.

1 - Par une analyse **rigoureuse** des invariances et symétries de la distribution, en déduire que le champ électrique prend en tout point de l'espace la forme

$$\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{e}_z \,.$$

2 - Montrer par des arguments de symétrie que le champ est nul sur le plan xOy.

3 - Utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ en tout point M de l'espace. Tracer le graphe représentant $E_z(z)$.

4 - En déduire le potentiel électrostatique $V(z)$.

5 - Considérons maintenant que la couche est d'épaisseur très fine, à la limite $a \to 0$.
5.a **-** Déterminer la densité surfacique de charge σ_0 en fonction de ρ_0 et a.
5.b **-** Que devient le champ électrique dans chaque demi-espace ?
5.c **-** Commenter le comportement de $\vec{E}$ au passage du plan chargé.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

$\boxed{1}$ Invariance de la distribution par translation le long de $\vec{e}_x$ ou $\vec{e}_y$ donc $\vec{E} = \vec{E}(z)$. Tout plan contenant M et le vecteur $\vec{e}_z$ est plan de symétrie de la distribution, donc de $\vec{E}$, donc $\vec{E}$ doit être porté par $\vec{e}_z$.

$\boxed{2}$ Le plan xOy est plan de symétrie de la distribution, donc $\vec{E}$ est inclus dans ce plan. Mais pour tout point A de ce plan, le plan xAz est plan de symétrie, donc $\vec{E}$ est aussi inclus dans ce plan. Les deux plans sont orthogonaux, donc $\vec{E}$ est forcément nul.

$\boxed{3}$ Surface de Gauss cylindrique, les « couvercles » étant placés en $z = 0$ et en z où on veut calculer le champ. Flux nul sur les surfaces latérales car $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$. Ainsi, pour $z > 0$,

$$\begin{cases} E_z(z) = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0} z & \text{pour } 0 < z < a/2 \\ E_z(z) = \dfrac{\rho_0\, a}{2\varepsilon_0} & \text{pour } z > a/2 \\ E_z(z) = -\dfrac{\rho_0\, a}{2\varepsilon_0} & \text{pour } z < -a/2 \end{cases}$$

Le cas $z < 0$ s'en déduit par symétrique.

$\boxed{4}$ Intégration de $E_z = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}$ zone par zone, puis continuité pour trouver les constantes.

$$\begin{cases} V(z) = -\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} z^2 + V_0 & \text{pour } |z| \leq a/2 \\ V(z) = -\dfrac{\rho_0\, a\, z}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\rho_0}{8\varepsilon_0} a^2 + V_0 & \text{pour } z > a/2 \\ V(z) = +\dfrac{\rho_0\, a\, z}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\rho_0}{8\varepsilon_0} a^2 + V_0 & \text{pour } z < -a/2 \end{cases}$$

Rq : le potentiel ne s'annule pas à l'infini car il y a des charges à l'infini

$\boxed{\textbf{5.a}}$ $Q = \sigma_0 S = \rho_0 a S$ donc $\sigma_0 = a\rho_0$.

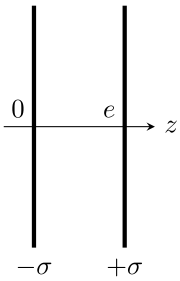
$\boxed{\textbf{5.b}}$ $\vec{E} = \pm \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z$

$\boxed{\textbf{5.c}}$ Discontinuité, relations de passage.

Électrostatique

Exercice 1 : Capteur capacitif [banque PT 2015]

Les capteurs capacitifs utilisent un condensateur comme composant principal. On rappelle qu'un condensateur est formé de deux armatures conductrices séparées par un isolant électrique. Ici, l'isolant est de l'air, dont les propriétés électriques sont supposées identiques à celles du vide.



On considère pour commencer un condensateur à lame d'air constitué de deux armatures planes métalliques de surface S, en regard l'une de l'autre, portant respectivement des densistés surfaciques uniformes de charge $\pm\sigma$. On suppose les dimensions des armatures beaucoup plus grandes que la distance e les séparant, ce qui permet d'utiliser le modèle du condensateur plan illimité.

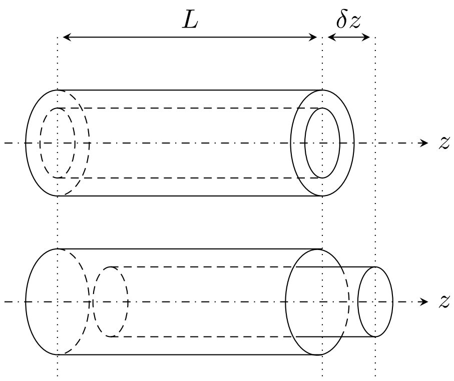
1 - Rappeler sans démonstration le champ $\overrightarrow{E}_{\text{plan}}(M)$ créé dans tout l'espace par un plan de normale $\overrightarrow{e}_z$ et chargé par une densité σ.

2 - En déduire le champ $\overrightarrow{E}(M)$ créé par le condensateur.

3 - En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$ et l'expression de la capacité $C_{\text{p},0}$ du condensateur plan. On impose $V = 0$ sur l'armature chargée négativement.

On envisage maintenant la situation où l'une des deux armatures reste fixe tandis que l'autre est susceptible de se déplacer en translation d'une quantité algébrique δz par rapport à sa position de référence $z = e$.

4 - Donner l'expression de la capacité $C_\text{p}(\delta z)$ en fonction de $C_{\text{p},0}$ et la simplifier dans l'hypothèse de petits déplacements $|\delta z| \ll e$.



On considère maintenant un condensateur formé de deux armatures cylindriques coaxiales, de longueur L et rayons respectifs $R_1 < R_2$ séparées par de l'air. L'armature interne porte une charge $-Q$ et l'externe une charge $+Q$, supposées uniformément réparties sur les surfaces. On suppose $L \gg R_2$, ce qui permet d'adopter un modèle illimité.

5 - Déterminer en justifiant qualitativement mais de manière précise la direction et le sens du champ électrostatique et les coordonnées dont dépend son module.

6 - Déterminer le champ en tout point de l'espace.

7 - En déduire le potentiel électrostatique puis la différence de potentiel entre les deux armatures du condensateur. On impose $V = 0$ sur l'armature intérieure.

8 - Déterminer la capacité $C_{\text{c}0}$ du condensateur sous la forme $C_{\text{c}0} = AL_\text{r}$, où L_r est la longueur des portions de cylindre en regard (ici $L_\text{r} = L$).

9 - L'armature intérieure est susceptible de se déplacer d'une distance algébrique δz par rapport à sa position de référence. Déterminer l'expression littérale $C_\text{c}(\delta z)$ en fonction de $C_{\text{c},0}$, L et δz. Tracer son allure.

10 - Dans la perspective de la mesure d'un déplacement δz, quelles sont les différences notables entre un condensateur plan et un condensateur cylindrique ?

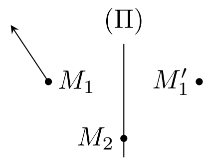
Éléments de correction de l'exercice 1 :

Non tapé

Électrostatique

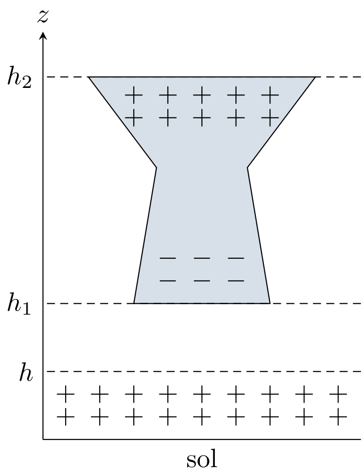
Question de cours

Sur le schéma ci-dessous, tracer le champ $\vec{E}(M_1')$ et $\vec{E}(M_2)$ dans le cas où (Π) est un plan de symétrie, puis dans le cas où il s'agit d'un plan d'anti-symétrie.



Exercice 1 : Nuage d'orage [oral banque PT]

L'apparition de cumulonimbus, nuage colossal au profil en forme d'enclume, est annonciatrice d'un orage imminent. On modélise dans cet exercice un nuage typique, situé entre les altitudes $h_1 = 2\,\mathrm{km}$ et $h_2 = 10\,\mathrm{km}$ et de section horizontale $S = 1\,\mathrm{km}^2$. On pose $h_0 = (h_1 + h_2)/2$ et $H = h_2 - h_1$.



On constate habituellement dans ces nuages l'apparition de charges négatives à la base du nuage et de charges positives au sommet : on considérera que la densité volumique de charge $\rho(z)$ varie linéairement de la valeur maximale $\rho_0 > 0$ au sommet du nuage à la valeur opposée $-\rho_0$ à sa base. La base chargée du nuage fait alors apparaître, par influence et ionisation de l'air, des charges positives dans l'atmosphère sur une hauteur $h = 500\,\mathrm{m}$. On les supposera réparties uniformément avec une densité volumique ρ_{sol}. Le sol est assimilé à un bon conducteur, l'air entre $z = h$ et $z = h_1$ n'est pas chargé. Dans la modélisation proposée, les effets de bords sont négligés : les grandeurs étudiées sont supposées ne dépendre que de l'altitude z.

Des mesures effectuées par ballon sonde permettent de déterminer la valeur de la composante verticale du champ électrique dans l'atmosphère : quasiment nul au niveau du sol, environ $65\,\mathrm{kV\cdot m^{-1}}$ à $500\,\mathrm{m}$ d'altitude et jusqu'à $200\,\mathrm{kV\cdot m^{-1}}$ de valeur maximale à l'intérieur du nuage.

1 - Expliquer le phénomène d'influence à l'origine de la présence des charges au sol.

2 - La conservation de la charge ne semble pas vérifier sur le schéma. Comment expliquer ce paradoxe ?

3 - Justifier qu'en tout point M on ait $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$.

4 - Déterminer le champ électrique dans les quatre domaines $0 < z < h$; $h < z < h_1$; $h_1 < z < h_2$ et enfin $z > h_2$.

5 - Tracer l'allure de $E(z)$.

6 - Sachant que que $E(z)$ admet un extrêmum au milieu du nuage, exprimer $E_{\max}$ en fonction de h et H. On supposera $\rho_0 \simeq \rho_{\mathrm{sol}}$.

7 - Lorsque le champ électrique atteint localement la valeur $E_{\mathrm{dis}} = 10\,\mathrm{kV\cdot cm^{-1}}$, appelé champ disruptif, l'air est ionisé et un courant électrique devient possible. Comparer la valeur du champ disruptif à celle du champ électrique dans le nuage. Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 Modification de la répartition des charges dans un conducteur sous l'effet d'un champ extérieur : les charges ⊖ à la base du nuage repoussent les charges ⊖ de l'air et du sol et attirent les charges ⊕.

2 Le « sol » est infini : les charges ⊖ sont plus loin et non représentées.

3 L'énoncé est un peu vague (mal restitué par le candidat ?), mais laisse en gros entendre que le nuage est infini (ou éventuellement symétrie cylindrique ?). Il y a invariance par translation parallèle au sol, donc $\vec{E}$ ne dépend que de z. De plus, tout plan passant par M et contenant l'axe z est plan de symétrie de la distribution de charges, donc plan de symétrie du champ. Le champ est inclus dans l'intersection de tous ces plans de symétrie : il est donc porté par $\vec{u}_z$.

4 On utilise le théorème de Gauss appliqué à une surface cylindrique de section S, située entre $z = 0$ et z quelconque, sachant que d'après l'énoncé (mesures en ballon sonde) $E(0) = 0$. Ainsi,

$$\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = SE(z)\,.$$

- pour $0 < z < h$: $Q_{\mathrm{int}}(z) = \rho_{\mathrm{sol}} S z$ donc
$$\boxed{E(z) = \frac{\rho_{\mathrm{sol}} z}{\varepsilon_0}\,.}$$
- pour $h < z < h_1$: $Q_{\mathrm{int}}(z) = \rho_{\mathrm{sol}} S h$ donc
$$\boxed{E(z) = \frac{\rho_{\mathrm{sol}} h}{\varepsilon_0}\,.}$$
- Exprimons la densité volumique de charge à l'intérieur du nuage : elle est de la forme $\rho(z) = Az + B$ avec $\rho(h_1) = -\rho_0$ et $\rho(h_2) = \rho_0$ d'où
$$\rho(z) = \frac{2\rho_0}{H}(z - 2h_0)$$
Ainsi,
$$Q_{\mathrm{int}} = \rho_{\mathrm{sol}} S h + \int_{h_1}^{z} \frac{2\rho_0}{H}(z - 2h_0) S \mathrm{d}z = \rho_{\mathrm{sol}} S h + \frac{2\rho_0\, S}{H}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{{h_1}^2}{2} - 2h_0(z - h_1)\right)\,.$$
et donc
$$\boxed{E(z) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H}\left(z^2 - 2h_0 z\right) + \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\rho_{\mathrm{sol}} h - \frac{2\rho_0}{H}\left(\frac{{h_1}^2}{2} - 2h_0 h_1\right)\right]}$$
- pour $z > h_2$: on remplace z par h_2 dans l'expression précédente.

5 Voir figure 1.

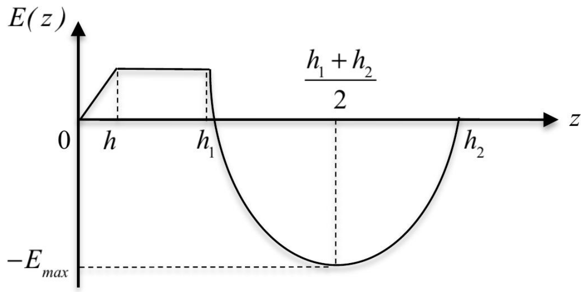


Figure 1 – Évolution du champ électrique dans le nuage.

6 Au milieu du nuage $z = h_0$. Un calcul un peu long et moche (à mon avis abusif pour un exo d'oral banque PT) conduit à un résultat nettement moins moche,

$$\boxed{E_{\max} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{H}{4} - h\right)}$$

7 Le champ au centre du nuage est donné, et il est inférieur au champ disruptif. Ce donc n'est pas comme ça qu'apparaît la foudre. Le champ disruptif est en fait atteint au niveau d'une pointe, comme un arbre, un clocher ou un paratonnerre : c'est là que le champ disruptif est atteint, et l'éclair permet de vider le nuage des charges accumulées.