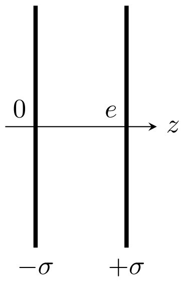
Électrostatique et magnétostatique

Exercice 1 : Capteur capacitif [banque PT 2015]

Les capteurs capacitifs utilisent un condensateur comme composant principal. On rappelle qu'un condensateur est formé de deux armatures conductrices séparées par un isolant électrique. Ici, l'isolant est de l'air, dont les propriétés électriques sont supposées identiques à celles du vide.



On considère pour commencer un condensateur à lame d'air constitué de deux armatures planes métalliques de surface S, en regard l'une de l'autre, portant respectivement des densistés surfaciques uniformes de charge $\pm\sigma$. On suppose les dimensions des armatures beaucoup plus grandes que la distance e les séparant, ce qui permet d'utiliser le modèle du condensateur plan illimité.

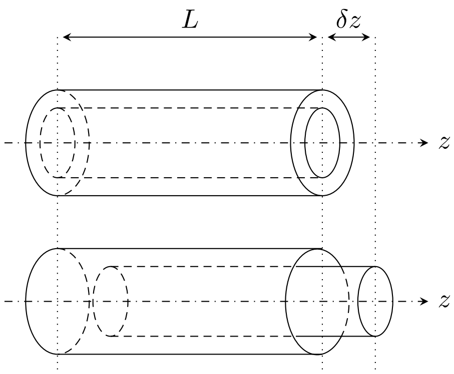
1 - Rappeler sans démonstration le champ $\overrightarrow{E}_{\text{plan}}(M)$ créé dans tout l'espace par un plan de normale $\overrightarrow{e}_z$ et chargé par une densité σ.

2 - En déduire le champ $\overrightarrow{E}(M)$ créé par le condensateur.

3 - En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$ et l'expression de la capacité $C_{\text{p},0}$ du condensateur plan. On impose $V = 0$ sur l'armature chargée négativement.

On envisage maintenant la situation où l'une des deux armatures reste fixe tandis que l'autre est susceptible de se déplacer en translation d'une quantité algébrique δz par rapport à sa position de référence $z = e$.

4 - Donner l'expression de la capacité $C_{\text{p}}(\delta z)$ en fonction de $C_{\text{p},0}$ et la simplifier dans l'hypothèse de petits déplacements $|\delta z| \ll e$.



On considère maintenant un condensateur formé de deux armatures cylindriques coaxiales, de longueur L et rayons respectifs $R_1 < R_2$ séparées par de l'air. L'armature interne porte une charge $-Q$ et l'externe une charge $+Q$, supposées uniformément réparties sur les surfaces. On suppose $L \gg R_2$, ce qui permet d'adopter un modèle illimité.

5 - Déterminer en justifiant qualitativement mais de manière précise la direction et le sens du champ électrostatique et les coordonnées dont dépend son module.

6 - Déterminer le champ en tout point de l'espace.

7 - En déduire le potentiel électrostatique puis la différence de potentiel entre les deux armatures du condensateur. On impose $V = 0$ sur l'armature intérieure.

8 - Déterminer la capacité $C_{\text{c}0}$ du condensateur sous la forme $C_{\text{c}0} = AL_{\text{r}}$, où L_{r} est la longueur des portions de cylindre en regard (ici $L_{\text{r}} = L$).

9 - L'armature intérieure est susceptible de se déplacer d'une distance algébrique δz par rapport à sa position de référence. Déterminer l'expression littérale $C_{\text{c}}(\delta z)$ en fonction de $C_{\text{c},0}$, L et δz. Tracer son allure.

10 - Dans la perspective de la mesure d'un déplacement δz, quelles sont les différences notables entre un condensateur plan et un condensateur cylindrique ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

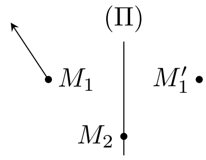
Non tapé

Étienne Thibierge, 17 février 2018, www.etienne-thibierge.fr

Électrostatique et magnétostatique

Question de cours

Sur le schéma ci-dessous, tracer le champ $\vec{E}(M_1')$ et $\vec{E}(M_2)$ dans le cas où (Π) est un plan de symétrie, puis dans le cas où il s'agit d'un plan d'anti-symétrie.



Exercice 1 : Champ électromagnétique d'un faisceau de particules [oral CCP]

On considère un faisceau homocinétique de particules chargées, de rayon R et infini le long d'un axe (Oz). Les particules portent une charge q et se déplacent toutes à la même vitesse $\vec{v}$ par rapport à un référentiel galiléen. La densité volumique de particules est notée n.

1 - On s'intéresse pour commencer au champ magnétique.
***1.a* -** Exprimer le vecteur densité de courant $\vec{j}$ dans le faisceau en fonction de n, q et $\vec{v}$.
***1.b* -** Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.

2 - On étudie ensuite le champ électrique.
***2.a* -** Préciser l'expression de la densité volumique de charge ρ au sein du faisceau.
***2.b* -** Déterminer le champ électrique en tout point.

3 - Proposer une relation vectorielle liant $\vec{v}, \vec{E}, \vec{B}$ qui soit valable en tout point. On utilisera $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

4 - Reprendre ces questions dans le référentiel lié aux particules. Commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Même si les charges se déplacent, on est bien en régime statique car $\rho = \text{cte}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{\text{cte}}$. On utilise les coordonnées cylindriques.

1.a $\vec{j} = nq\vec{v}$.

1.b **Attention !** C'est la distribution de courant qui compte, et ses symétries et invariances n'ont a priori pas de raison d'être les mêmes que celles de la distribution de charges.
▷ Invariance de la distribution de courants par rotation autour de l'axe donc $\vec{B}$ indépendant de θ ;
▷ Invariance de la distribution de courants par translation le long de l'axe donc indépendant de z ;
▷ Le plan passant par M et de normale $\vec{e}_\theta$ est plan de symétrie de la distribution de courants donc $\vec{B}$ est orthogonal à ce plan, donc $\vec{B} = B_\theta \vec{e}_\theta$.
Conclusion : $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$.

> *Le plan passant par M et de normale $\vec{e}_z$ est plan d'**antisymétrie** de la distribution de courants alors que c'est un plan de symétrie de la distribution de charges.*

On applique ensuite le théorème d'Ampère à un cercle d'axe $\vec{e}_z$ et de rayon r, orienté par la règle de la main droite par rapport à $\vec{e}_z$:

$$B \times 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enl}}(r) \qquad \text{avec} \qquad I_{\text{enl}}(r) = \begin{cases} \pi r^2 nqv & \text{si } r < R \\ \pi R^2 nqv & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

Finalement,

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 nqvr}{2}\vec{e}_\theta & \text{si } r < R \\ \dfrac{\mu_0 nqvR^2}{2r}\vec{e}_\theta & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

2.a $\rho = nq$

2.b **Attention !** C'est la distribution de charges qui compte, et ses symétries et invariances n'ont a priori pas de raison d'être les mêmes que celles de la distribution de courants. Analyse des symétries et invariances :

▷ Invariance de la distribution de charges par rotation autour de l'axe donc $\vec{E}$ indépendant de θ ;

▷ invariance de la distribution de charges par translation le long de l'axe donc indépendant de z ;

▷ Plan passant par M et de normale $\vec{e}_z$ est plan de symétrie de la distribution de charges, donc $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan, donc $E_z = 0$;

▷ Plan passant par M et de normale $\vec{e}_\theta$ est plan de symétrie de la distribution de charges donc $E_\theta = 0$.

Bilan : $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$.

On applique ensuite le théorème de Gauss à un cylindre d'axe $\vec{e}_z$ de rayon r et de hauteur H quelconque.

$$E(r) \times 2\pi r \times H + 0 + 0 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{avec} \qquad Q_{\text{int}}(r) = \begin{cases} nq\,\pi\,r^2\,h & \text{si } r < R \\ nq\,\pi\,R^2\,h & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

(flux nul sur les couvercles du cylindre car $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = 0$). Finalement,

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{nq\,r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \dfrac{nq\,R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_r & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

3 Les directions font penser à un produit vectoriel,

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v} \wedge \vec{E}$$

4 Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation à vitesse uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}$: il est donc galiléen, et on peut y calculer les champs « normalement ».

▷ Pour $\vec{E}$ rien ne change car la distribution de charge garde les mêmes propriétés dans le nouveau référentiel ;

▷ Par contre tout change pour $\vec{B}$ parce que les particules sont fixes dans $\mathcal{R}'$, donc $\vec{j}\,' = \vec{0}$, donc $\vec{B}' = \vec{0}$!

Moralité : le champ magnétique dépend du référentiel ! C'est vrai aussi pour $\vec{E}$, mais on ne le montre pas ici. Par contre la relation entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ demeure vraie.

Électrostatique et magnétostatique

Exercice 1 : Champ électrostatique créé par une boule creuse [oral banque PT]

Une boule de centre O et de rayon R contient des charges dont la densité volumique ρ est homogène.

1 - Déterminer la direction du champ $\vec{E}$ et la variable dont dépend la norme de $\vec{E}$.

2 - Calculer en tout point de l'espace le champ $\vec{E}(M)$. Représenter la norme de $\vec{E}$ en fonction de la variable d'espace.

3 - En déduire le potentiel $V(M)$ en tout point de l'espace. Tracer la courbe représentant $V(M)$ en fonction de la variable d'espace.

À l'intérieur de la boule se trouve une cavité sphérique creuse de rayon $R' < R$.

4 - Supposons les deux sphères concentriques. Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace sans avoir recours au théorème de Gauss.

5 - On suppose maintenant que le centre des deux sphères est distant de $OO' = a < R'$. Déterminer le champ électrique et le potentiel dans la cavité.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ $\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r$.

$\boxed{2}$ Utilisation du théorème de Gauss.

$$\begin{cases} \vec{E}(r) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & \text{pour } r > R \\ \vec{E}(r) = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r & \text{pour } r \leq R \end{cases}$$

$\boxed{3}$ $E_r = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ qu'on intègre. Potentiel nul à l'infini, et continu en $r = R$.

$$\begin{cases} V(r) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} & \text{pour } r > R \\ V(r) = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \dfrac{r^2}{3}\right) & \text{pour } r \leq R \end{cases}$$

$\boxed{4}$ Principe de superposition : on voit la cavité comme une boule de densité volumique de charge $-\rho$, et on somme les deux champs.

$$\begin{cases} \vec{E}(r) = \dfrac{\rho(R^3 - R'^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & \text{pour } r > R \\ \vec{E}(r) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \dfrac{R'^3}{r^2}\right)\vec{e}_r & \text{pour } R' < r \leq R \\ \vec{E}(r) = \vec{0} & \text{pour } r < R' \end{cases}$$

$\boxed{5}$ Là encore principe de superposition

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r - \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r\,'$$

avec $r\,\vec{e}_r = \overrightarrow{OM}$ et $r'\,\vec{e}_r\,' = \overrightarrow{O'M}$, soit

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O'M}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OO'}$$

Le champ est uniforme dans la cavité, d'autant plus grand que les centres sont éloignés.

Étienne Thibierge, 17 février 2018, www.etienne-thibierge.fr