Équations de Maxwell

Question de cours

Considérons un oscillateur harmonique masse-ressort vertical. Établir l'équation du mouvement **en utilisant une méthode énergétique**.

Exercice 1 : Soudure par induction

Un dispositif de soudure utilise le phénomène d'induction pour chauffer et faire fondre le métal à souder. Pour cela, une bobine est parcourue par un courant alternatif $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ de forte intensité et à haute fréquence. Au centre de cette bobine est placé un cylindre conducteur, qui est le métal à chauffer, de conductivité électrique γ. Pour simplifier, on néglige les effets de bords de la bobine que l'on assimile donc à un solénoïde infini.

1 - Faire un schéma du dispositif et rappeler sans démonstration l'expression du champ créé par la bobine.

2 - Expliquer rapidement pourquoi le métal placé au centre chauffe.

Une analyse d'invariances et de symétries montre que le champ électrique induit dans le métal est de la forme $\vec{E} = E_\theta(r)\vec{e}_\theta$.

3 - Exprimer $\vec{E}$ en fonction notamment de r et I_0.

4 - En déduire la densité de courant induite dans le matérieau, puis l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule. Où est-elle maximale ?

Donnée : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Voir par exemple : `https://www.youtube.com/watch?v=PC79B2Vo2XE`.

$\boxed{1}$ Voir la figure 1. En orientant l'axe z par rapport au courant I (règle de la main droite), le champ créé par le solénoïde s'écrit

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

avec n le nombre de spires par unité de longueur.

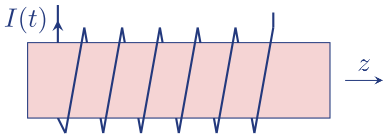

Figure 1 – Dispositif de soudure inductive.

$\boxed{2}$ Le métal est un conducteur placé dans un champ magnétique variable : il y a donc induction dans le métal. Ce sont les courants induits (les courants de Foucault) qui vont chauffer le matériau par effet Joule.

$\boxed{3}$ Analyse des invariances montre que E ne dépend que de r. Plus difficile pour la direction ! Ici la source première du champ électrique est le courant I dans la bobine. Or tout plan contenant l'axe Oz est plan d'anti-symétrie de la distribution de I dans la bobine : on en déduit que E est perpendiculaire à ce plan, donc porté par $\vec{e}_\theta$.

$\boxed{4}$ D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 n \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z = +\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)$$

et en utilisant le formulaire

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial r E_\theta}{\partial r}\vec{e}_z$$

Étienne Thibierge, 17 février 2018, www.etienne-thibierge.fr

d'où on déduit

$$\frac{\partial r E_\theta}{\partial r} = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)\,.$$

En intégrant par rapport à r,

$$r E_\theta = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r^2}{2} + \text{cte}\,.$$

On montre que la constante est nulle en se plaçant en $r = 0$. Finalement,

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{1}{2}\mu_0 n r I_0 \omega \sin(\omega t)\,\overrightarrow{e}_\theta\,.}$$

5 D'après la loi d'Ohm locale,

$$\overrightarrow{j} = \gamma \overrightarrow{E} = \frac{1}{2}\mu_0 \gamma n r I_0 \omega \sin(\omega t)\,\overrightarrow{e}_\theta$$

On en déduit la puissance volumique dissipée par effet Joule,

$$\mathcal{P} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{1}{4}\gamma {\mu_0}^2 n^2 r^2 {I_0}^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)\,.$$

Elle est maximale lorsque r est maximal, donc sur les bords du cylindre : on retrouve l'effet de peau.

Équations de Maxwell

Question de cours

Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire dans le champ gravitationnel, établir l'expression de la vitesse en orbite circulaire. En déduire la troisième loi de Kepler et la généraliser au cas d'une trajectoire elliptique.

Exercice 1 : Écrantage de Debye

Les plasmas sont des milieux macroscopiquement neutres, partiellement ou totalement ionisés. Qu'ils soient naturels ou artificiels, on les rencontre dans des contextes très variés : arc électrique, atmosphère des étoiles, ionosphère, etc.

Considérons un plasma d'argon contenant (en moyenne) dans un volume mésoscopique $\mathrm{d}V$, $n_\mathrm{e}\,\mathrm{d}V$ électrons libres de masse m_e et de charge $-e$, $n_\mathrm{i}\,\mathrm{d}V = n_\mathrm{e}\,\mathrm{d}V$ ions Ar^+ de masse m_i et $n_0\,\mathrm{d}V$ atomes Ar de masse m_0. Le plasma est supposé en équilibre thermodynamique local et on note T sa température.

On considère un ion argon Ar^+ particulier, placé en O et pris comme origine. En raison de l'attraction coulombienne, on observe au voisinage de cet ion un surplus de charges négatives, responsable d'un écart local à la neutralité globale du plasma. En notant $V(r)$ le potentiel électrique total en un point M situé à distance $r = OM$ de l'ion Ar^+, les densités volumiques d'ions et d'électrons en M sont données par la loi de Boltzmann,

$$n_+(M) = n_\mathrm{i} \exp\left[-\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right] \qquad \text{et} \qquad n_-(M) = n_\mathrm{e} \exp\left[+\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right].$$

On suppose la température et le potentiel électrique tels que $eV(r) \ll k_\mathrm{B}T$

Donnée : pour une fonction $f(r)$ en coordonnées sphériques, $\Delta f = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rf)$.

1 - Montrer que V est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[rV(r)\right] = \frac{n_\mathrm{e}er}{\varepsilon_0}\left(\exp\left[+\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right] - \exp\left[-\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right]\right)$$

La simplifier compte tenu de l'hypothèse faite sur la température du plasma.

2 - En déduire une équation différentielle portant sur la fonction auxilliaire $u(r) = rV(r)$. Résoudre cette équation en introduisant deux constantes A et B. Identifier une longueur caractéristique λ_D à expliciter en fonction de ε_0, $k_\mathrm{B}T$, n_e et e

3 - On admet que $V(\infty) = 0$ et qu'au voisinage immédiat de l'ion Ar^+ l'influence de sa charge, supposée ponctuelle, l'emporte sur celle des charges électroniques distribuées en volume. En déduire les deux constantes A et B.

4 - Déterminer l'expression du potentiel $V(r)$ en fonction de e, ε_0 et de λ_D. Commenter le résultat et interpréter le sens physique de λ_D, appelée longueur de Debye.

5 - Pour ce plasma d'argon, $n_\mathrm{e} = 3{,}0 \cdot 10^{21}\,\mathrm{m^{-3}}$. Calculer numériquement λ_D pour une température de $10^3\,\mathrm{K}$ et comparer cette valeur au rayon atomique de l'argon $a = 71\,\mathrm{pm}$.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Équation de Poisson : $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ avec

$$\rho(r) = en_\mathrm{i}\exp\left[-\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right] - en_\mathrm{e}\exp\left[\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right] \qquad \text{et} \qquad n_\mathrm{i} = n_\mathrm{e}\,.$$

Un développement limité au premier ordre donne $\mathrm{e}^x \simeq 1 + x$, donc

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[rV(r)\right] = \frac{2n_\mathrm{e}er}{\varepsilon_0}\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}$$

$\boxed{2}$ Direct :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} - \frac{2n_\mathrm{e}e^2}{\varepsilon_0 k_\mathrm{B}T}u = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} - \frac{u}{\lambda_\mathrm{D}^2} = 0$$

Étienne Thibierge, 17 février 2018, www.etienne-thibierge.fr

qui se résout en
$$u(r) = A\,\mathrm{e}^{-r/\lambda_\mathrm{D}} + B\,\mathrm{e}^{r/\lambda_\mathrm{D}}$$
(solution qu'il est pas mal de connaître, ou qui se retrouve avec la méthode habituelle de l'équation caractéristique)

3 De la question précédente on déduit
$$V(r) = \frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{-r/\lambda_\mathrm{D}} + \frac{B}{r}\,\mathrm{e}^{r/\lambda_\mathrm{D}}$$
La première condition donne $B = 0$ (justification par croissance comparée). La deuxième est plus subtile. Elle se formule sur V (avec un équivalent), mais il est plus simple de le dire sur u, sachant que pour une charge ponctuelle
$$V_\mathrm{CP}(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{d'où} \qquad u_\mathrm{CP}(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}$$
donc
$$u(r) \underbrace{\simeq}_{\text{sol}} A \underbrace{=}_{\text{CL}} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}$$

4 $V(r) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\mathrm{e}^{-r/\lambda_\mathrm{D}}$. Il décroît plus vite que celui d'un ion ponctuel placé en $r = 0$, sur une distance caractéristique λ_D. Cela signifie que les charges situées à une distance $r \gg \lambda_\mathrm{D}$ ne perçoivent pas l'effet de l'ion situé en $r = 0$.

5 $\lambda_\mathrm{D} = 3 \cdot 10^{-8}$ m, ce qui ne correspond qu'à une quarantaine de rayons atomiques : l'écrantage est très performant.

Équations de Maxwell

Question de cours

Établir l'équation de conservation de la charge électrique en coordonnées cartésiennes à une dimension. Donner sans démonstration la généralisation à trois dimensions.

Exercice 1 : Gravure ionique

La gravure ionique est un procédé couramment utilisé dans l'industrie micro-électronique. Elle permet de graver la surface d'un substrat en la bombardant d'un faisceau d'ions de densité importante, mais de vitesse modérée, ce qui permet à des réactions chimiques d'avoir lieu uniquement à la surface du matériau. Il est donc nécessaire d'accélérer les ions en nombre important, puis, une fois le courant d'ions créé, de les ralentir afin de contrôler leur action sur le substrat.

Pour contrôler séparément l'intensité du courant ionique et l'énergie cinétique des ions, on utilise un système de trois grilles métalliques portées à des potentiels différents contrôlables indépendamment les uns des autres, représenté figure 1. On suppose les potentiels tels que $V_2 < V_3 < V_1 = 0$ et on admet que le champ électrique est nul sur chaque grille, et qu'il est également nul pour $x < 0$ et pour $x > d_0 + d_1$.

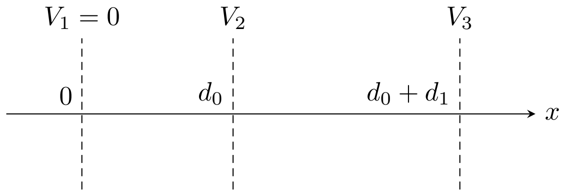

Figure 1 – Dispositif de contrôle du courant ionique.

1 - Déterminer le potentiel $V(x)$ en tout point de l'espace lorsque seules les grilles sont présentes.

Considérons un cation de masse m et de charge e placé sans vitesse à proximité de la grille 1.

2 - Déterminer la vitesse $v(x)$ de l'ion en fonction du potentiel $V(x)$ et montrer qu'il subit une phase d'accélération et une phase de décélération durant le trajet de la grille 1 à la grille 3.

3 - Déterminer sa vitesse en sortie du dispositif. Quelle(s) grille(s) permettent de la contrôler ?

On considère maintenant que le dispositif est traversé par un flux continu, constitué de nombreux ions (densité volumique $\rho(x)$) émis dans les mêmes conditions que précédemment. Tous ces ions se propagent dans la direction x. La présence de ces ions modifie le potentiel électrique par rapport à la situation où les grilles étaient seules.

4 - Montrer que le vecteur densité de courant s'écrit $\vec{j} = J_0 \vec{u}_x$ avec J_0 une constante.

5 - Montrer que le potentiel $V(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{J_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{-2eV}} = 0\,.$$

La résolution de cette équation différentielle conduit à

$$(-V)^{3/4} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{J_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4} x$$

6 - Montrer que jouer sur V_2 permet de contrôler le flux J_0 sans changer la vitesse des cations en sortie du dispositif.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Les grilles sont séparées de vide. D'après l'équation de Poisson, on a donc $\Delta V = 0$ en tout point, soit

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = 0 \qquad \text{soit} \qquad V(x) = ax + b\,.$$

Les constantes a et b se déterminent à partir des conditions aux limites.

Étienne Thibierge, 17 février 2018, www.etienne-thibierge.fr

▷ Comme $V(0) = 0$ et $V(d_0) = V_2 < 0$ alors dans la zone 1 entre $x = 0$ et $x = d_0$,

$$\begin{cases} 0 = a_1 \times 0 + b_1 \\ V_2 = a_1 d_0 + b_1 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} b_1 = 0 \\ a_1 = \dfrac{V_2}{d_0} < 0 \end{cases}$$

▷ De même, dans la zone 2 entre $x = d_0$ et $x = d_0 + d_1$,

$$\begin{cases} V_2 = a_2 d_0 + b_2 \\ V_3 = a_2 (d_0 + d_1) + b_2 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} V_3 - V_2 = a_2 d_1 \\ b_2 = V_2 - a_2 d_0 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} a_2 = \dfrac{V_3 - V_2}{d_1} \\ b_2 = V_2 - (V_3 - V_2)\dfrac{d_0}{d_1} \end{cases}$$

▷ Enfin, comme le champ est nul en dehors des grilles alors le potentiel est constant. Par continuité, on en déduit

$$V(x < 0) = V_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad V(x > d_0 + d_1) = V_3$$

On peut alors le représenter sur la figure 2.

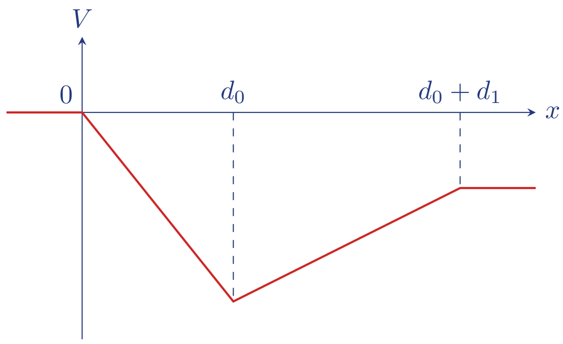

Figure 2 – Potentiel électrique dans le dispositif de contrôle du courant ionique.

2 L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, qui dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p} = eV(x)$. Son énergie mécanique est donc constante, et comme l'ion part sans vitesse de la grille de potentiel nul on en déduit

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m v^2 + eV \underbrace{=}_{\text{CI}} 0$$

On en déduit qu'en tout x la vitesse s'écrit

$$\boxed{v(x) = \sqrt{-\frac{2eV(x)}{m}}\,.}$$

Comme le potentiel augmente en valeur absolue entre les grilles 1 et 2 alors l'ion accélère, puis il ralentit entre les grilles 2 et 3 où le potentiel diminue en valeur absolue.

3 En sortie du dispositif, le potentiel est uniforme et

$$\boxed{v_\mathrm{s} = \sqrt{-\frac{2eV_3}{m}}\,.}$$

La vitesse de sortie est donc contrôlée **uniquement par la grille 3**.

4 La situation est unidimensionnelle, donc le vecteur densité de courant $\vec{j}$ ne dépend que de x. Comme de plus le régime permanent alors l'équation de conservation de la charge se simplifie en

$$\frac{\mathrm{d}j_x}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{soit} \qquad j_x = J_0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{j} = J_0 \vec{u}_x}\,.$$

5 D'après l'équation de Poisson

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = 0\,.$$

Or la densité de courant et la densité de charge sont reliées par $J_0 = \rho(x)v(x)$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{J_0}{\varepsilon_0\, v(x)} = 0\,.$$

Enfin, la conservation de l'énergie mécanique d'un ion donne

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{J_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{-2eV}} = 0\,.}$$

6 Imposer $V = V_2$ en $x = d$ permet de fixer J_0. En effet,

$$\frac{4}{3}(-V_2)^{3/4} = -2\sqrt{\frac{J_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4} d \qquad \text{d'où} \qquad \frac{4}{3}(-V_2)^{3/2} = 4\frac{J_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}^{1/2} d^2$$

et donc

$$J_0 = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0}{d^2}\left(\frac{2e}{m}\right)^{1/2}(-V_2)^{3/2}$$

La densité de courant J_0 est donc uniquement fixée par la grille 2. Or on a montré précédemment que la vitesse des cations n'était fixée que par le potentiel V_3, grâce à la conservation de son énergie mécanique : modifier le potentiel V_2 ne modifie donc pas la vitesse de sortie.