Ondes électromagnétiques

Question de cours

Établir l'équation de conservation de la charge électrique en coordonnées cartésiennes à une dimension. Donner sans démonstration la généralisation à trois dimensions.

Exercice 1 : Blocage d'appel [oral banque PT]

Un téléphone émet un appel, reçu par un second téléphone. On place une plaque de métal devant le second téléphoe : il ne reçoit plus l'appel.

1 - Donner l'ordre de grandeur de la longueur d'onde et de la fréquence d'une onde téléphonique.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{E}$ dans le métal. Comparer cette équation à celle dans le vide. Commenter physiquement.

3 - On pose $\vec{E} = \vec{E}_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k} z)}$. Résoudre l'équation dans le métal.

4 - Identifier une distance caractéristique. La calculer numériquement, et interpréter l'expérience.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Les téléphones mobiles émettent à des fréquences f **de l'ordre de 2 GHz**, ce qui correspond à des longueurs d'onde $\lambda = c/f$ **de l'ordre de 15 cm**.

$\boxed{2}$ On se place dans l'ARQS. D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{d'où} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right).$$

Comme le conducteur est neutre dans l'ARQS, alors d'après l'équation de Maxwell-Gauss $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$, et d'après l'équation de Maxwell-Ampère, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$. Alors,

$$-\Delta\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

et enfin d'après la loi d'Ohm

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \gamma\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}\,.}$$

L'équation de propagation dans le vide s'écrit

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}\,.$$

On constate que l'ordre de la dérivée temporelle n'est pas le même : au lieu d'une équation d'onde, on obtient dans le conducteur une **équation de diffusion**. Cela a pour conséquence physique que l'onde électromagnétique **ne se propage pas** dans le métal, mais lui cède son énergie par effet Joule. L'onde **est absorbée par le métal**.

$\boxed{3}$ Cherchons une solution de la forme indiquée par l'énoncé. En injectant,

$$-\underline{k}^2 \vec{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k} z)} - \mathrm{i}\gamma\mu_0\omega\vec{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k} z)} = \vec{0}$$

et en simplifiant

$$-\underline{k}^2 - \mathrm{i}\mu_0\gamma\omega = 0 \qquad \text{soit} \qquad \underline{k}^2 = -\mathrm{i}\mu_0\gamma\omega\,.$$

En prenant la « racine carrée », $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4})^2 = \dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$, il vient

$$\boxed{\underline{k} = \pm\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\gamma\omega}\,.}$$

Dimensionnellement, on identifie une longueur caractéristique

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}\,.$$

Pour identifier la solution physique parmi les solutions mathématiques, il faut donner des conditions aux limites : on peut par exemple supposer que le métal est infini et occupe tout le domaine $z > 0$. Dans le cas, comme l'onde ne peut s'amplifier, il faut avoir $\mathrm{Im}\,\underline{k} < 0$ et on ne conserve que le terme avec le signe positif. Finalement,

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - z/\delta)}\,.}$$

$\boxed{4}$ La longueur caractéristique sur laquelle le champ électrique s'atténue est bien sûr δ. Pour un métal, $\gamma \sim 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$ (p.ex. $3{,}7 \cdot 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$ pour Al ou $6 \cdot 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$ pour Cu), d'où

$$\boxed{\delta \sim 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}\,.}$$

Ainsi, au delà de quelques microns, l'onde électromagnétique est **complètement absorbée par le métal**. Le second téléphone ne reçoit donc plus l'onde émise par le premier pour l'appeler.

Ondes électromagnétiques

Question de cours

Écrire sous forme réelle et sous forme complexe **les** champs d'une onde électromagnétique plane, progressive, harmonique, polarisée rectilignement dans la direction Oy, se propageant dans le vide dans le sens des z décroissants. Nommer les paramètres et le lien qui peut exister entre eux.

Éléments de correction de l'exercice 0 :

On a $\vec{k} = -\dfrac{\omega}{c}\vec{e}_z$ car propagation dans le sens des z décroissants, $B_0 = E_0/c$, et comme le trièdre $(-k\vec{e}_z, E\vec{e}_y, \vec{B})$ doit être direct alors le champ magnétique est porté par $+\vec{e}_x$.

$$\vec{E} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + kz)}\,\vec{e}_y \qquad \text{et} \qquad \vec{B} = +B_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + kz)}\,\vec{e}_x\,.$$

Exercice 1 : Profondeur de peau [oral banque PT]

Considérons un conducteur électrique semi-infini de conductivité γ et soumis à un champ

$$\vec{E} = E_0\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \alpha z)}\,\vec{u}_x\,.$$

1 - S'agit-il d'une onde plane ? D'une onde progressive ? Que représente α ? Quelles sont la direction et le sens de propagation ? La polarisation ?

2 - Calculer le champ $\vec{B}$ associé.

3 - Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

4 - Effectuer un bilan de puissance pour une tranche de conducteur de surface S et de longueur $\mathrm{d}z$. Déterminer la puissance cédée par unité de volume dans le conducteur.

5 - Établir une autre expression de la puissance cédée à partir de la loi d'Ohm locale.

6 - À partir des deux expressions obtenues, déduire la distance sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Il s'agit **bien d'une onde plane**, car $\vec{E}$ prend la même valeur en tout point des plans $z = \text{cte}$, mais elle n'est **pas progressive** à cause de l'exponentielle décroissante. Le paramètre α représente à la fois le **vecteur d'onde** et l'**inverse de la longueur d'amortissement** (longueur de peau) de l'onde. L'onde est **polarisée rectilignement** selon $\vec{u}_x$.

$\boxed{2}$ **Attention !** Pour pouvoir identifier $\overrightarrow{\mathrm{rot}} \leftrightarrow -\mathrm{j}\underline{\vec{k}}\wedge$, il faut écrire l'onde avec un vecteur d'onde complexe, soit

$$\vec{E} = E_0 \exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - (1-\mathrm{j})\alpha z\right)\right]\vec{u}_x\,,$$

d'où on identifie $\underline{\vec{k}} = (1-\mathrm{j})\alpha\vec{u}_z$. D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$-\mathrm{j}\vec{k}\wedge\vec{E} = -\mathrm{j}\omega\vec{B} \qquad \text{soit} \qquad (1-\mathrm{j})\alpha\vec{u}_z \wedge E_0\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\alpha z)}\,\vec{u}_x = \omega\vec{B}$$

d'où

$$\boxed{\vec{B} = \frac{(1-\mathrm{j})\alpha E_0}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\alpha z)}\,\vec{u}_y\,.}$$

$\boxed{3}$ Le vecteur de Poynting est défini par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\,.$$

Sa moyenne temporelle vaut

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}^*}{\mu_0}\right)\,.$$

Or

$$\vec{E} \wedge \vec{B}^* = \frac{(1+\mathrm{j})\alpha {E_0}^2}{\mu_0 \omega} \,\mathrm{e}^{-2\alpha z} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$$

d'où

$$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\alpha {E_0}^2}{2\mu_0 \omega} \,\mathrm{e}^{-2\alpha z} \vec{u}_z \,.}$$

> *Attention, les champs complexes ne donnent accès qu'à la moyenne temporelle. Trouver le vecteur de Poynting instantané exige de revenir aux champ réels.*

4 Puissance moyenne entrant par la face située en z :

$$\langle \mathcal{P}_\mathrm{e} \rangle = \iint \langle \vec{\Pi}(z) \rangle \cdot \mathrm{d}S \vec{u}_z = \frac{\alpha {E_0}^2}{2\mu_0 \omega} S \,\mathrm{e}^{-2\alpha z} \,.$$

Puissance moyenne sortant par la face située en $z + \mathrm{d}z$:

$$\langle \mathcal{P}_\mathrm{s} \rangle = \iint \langle \vec{\Pi}(z+\mathrm{d}z) \rangle \cdot \mathrm{d}S \vec{u}_z = \frac{\alpha {E_0}^2}{2\mu_0 \omega} S \,\mathrm{e}^{-2\alpha (z+\mathrm{d}z)} \,.$$

La puissance entrant dans le conducteur mais n'en sortant pas est cédée au conducteur. Ainsi,

$$\langle \mathcal{P}_\mathrm{J} \rangle = \mathcal{P}_\mathrm{e} - \mathcal{P}_\mathrm{s} = \frac{\alpha {E_0}^2}{2\mu_0 \omega} S \left(\mathrm{e}^{-2\alpha z} - \mathrm{e}^{-2\alpha (z+\mathrm{d}z)} \right) \,.$$

En utilisant un développement limité

$$\mathrm{e}^{-2\alpha z} - \mathrm{e}^{-2\alpha (z+\mathrm{d}z)} \simeq 2\alpha \,\mathrm{e}^{-2\alpha z} \,\mathrm{d}z \,,$$

on obtient

$$\langle \mathcal{P}_\mathrm{J} \rangle = \frac{\alpha {E_0}^2}{2\mu_0 \omega} S \times 2\alpha \,\mathrm{e}^{-2\alpha z} \,\mathrm{d}z$$

et finalement

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_\mathrm{J} \rangle = \frac{\alpha^2 {E_0}^2}{\mu_0 \omega} S \,\mathrm{e}^{-2\alpha z} \,\mathrm{d}z \,.}$$

5 La puissance volumique dissipée par effet Joule vaut $\mathcal{P}_{\mathrm{J,vol}} = \gamma E^2$ donc en moyenne et sur la tranche de volume $S \,\mathrm{d}z$,

$$\langle \mathcal{P}_\mathrm{J} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\gamma \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right) S \,\mathrm{d}z$$

soit

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_\mathrm{J} \rangle = \frac{\gamma {E_0}^2}{2} \,\mathrm{e}^{-2\alpha z} S \,\mathrm{d}z \,.}$$

6 Par identification,

$$\frac{\alpha^2 {E_0}^2}{\mu_0 \omega} S \,\mathrm{e}^{-2\alpha z} \mathrm{d}z = \frac{\gamma {E_0}^2}{2} \,\mathrm{e}^{-2\alpha z} S \,\mathrm{d}z \,,$$

soit en simplifiant

$$\frac{\alpha^2}{\mu_0 \omega} = \frac{\gamma}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} \,.$$

La longueur de peau $\delta = 1/\alpha$ s'écrit finalement

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \,.}$$

Ondes électromagnétiques

Question de cours

Établir l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide. Comment s'appelle-t-elle ? Montrer qu'une onde de la forme $\vec{E}(x,t) = f(x-ct)\vec{e}_x$ en est solution.

Exercice 1 : Bilan de puissance d'un conducteur [oral banque PT]

Considérons un conducteur cylindrique de rayon R, infini, d'axe Oz, soumis à un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et stationnaire orienté suivant $\vec{u}_z$. On raisonne sur un tronçon de cylindre de longueur ℓ.

1 - Quel paramètre caractérise l'aspect conducteur d'un matériau ? Donner son unité et un ordre de grandeur.

2 - Calculer l'intensité traversant le cylindre.

3 - En déduire le champ magnétique créé par le cylindre.

4 - Déterminer la puissance dissipée par effet Joule.

5 - Exprimer la puissance rayonnée à travers les parois du cylindre.

6 - En déduire le bilan de puissance et le commenter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Il s'agit de la **conductivité électrique**, notée γ. Celle du cuivre, l'un des meilleurs conducteurs, est de $6\cdot 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$; à tire de comparaison celle de l'eau de mer n'est que de l'ordre de $5\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$.

$\boxed{2}$ D'après la loi d'Ohm locale,

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}\,,$$

d'où on déduit l'intensité par calcul du flux au travers d'une section transverse, c'est-à-dire un cercle,

$$I = \iint \vec{j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{I = \pi R^2\,\gamma E\,.}$$

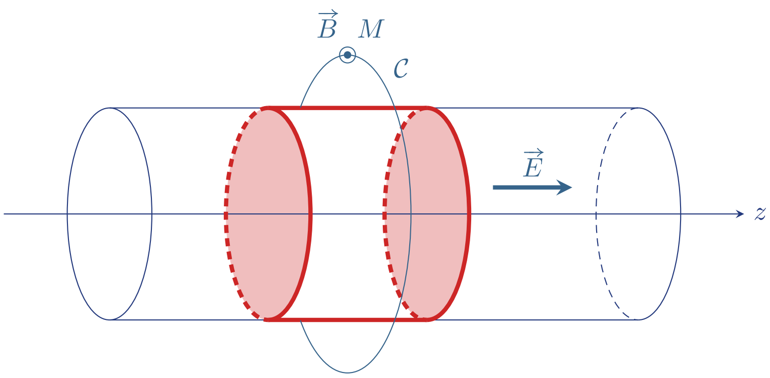

Figure 1 – Bilan de puissance électromagnétique d'un cylindre.

$\boxed{3}$ Plaçons nous en un point M repéré par ses coordonnées cylindriques, voir figure 1.

- **Invariances et symétries :**

▷ La distribution de courant est invariante par translation le long de l'axe (Oz) et par rotation autour de cet axe, le champ magnétique ne dépend donc que du rayon r.

▷ Le plan passant par M est contenant l'axe Oz est plan de symétrie de la distribution de courant, le champ magnétique lui est donc orthogonal : on en déduit qu'il est porté par $\vec{u}_\theta$.

▷ Conclusion :

$$\vec{B} = B_\theta(r)\vec{u}_\theta\,.$$

• **Théorème d'Ampère :** Raisonnons sur un contour $\mathcal{C}$ circulaire de rayon r centré sur l'axe (Oz) et passant par M,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}} \,.$$

Comme le champ est de même norme sur ce contour, alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 2\pi r \, B_\theta(r)$$

Le courant enlacé dépend de la position de M :
- ▷ si $r > R$ alors $I_{\text{enl}} = I = \pi R^2 \gamma E$;
- ▷ si $r < R$ alors $I_{\text{enl}} = \pi r^2 \, j = \pi r^2 \, \gamma E$

Finalement,

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 \pi R^2 \gamma E}{2\pi r} \vec{u}_\theta & r \geq R \\ \dfrac{\mu_0 \pi r^2 \, \gamma E}{2\pi r} \vec{u}_\theta & r \leq R \end{cases}$$

d'où en simplifiant

$$\boxed{\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 R^2 \gamma E}{2r} \vec{u}_\theta & r \geq R \\ \dfrac{\mu_0 r \, \gamma E}{2} \vec{u}_\theta & r \leq R \end{cases}}$$

4 La puissance volumique dissipée par effet Joule s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{J,vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 \,.$$

La puissance dissipée dans le tronçon vaut donc

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{J}} = \gamma E^2 \ell \pi R^2 \,.}$$

5 Le vecteur de Poynting s'écrit

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \,.$$

Comme $\vec{E}$ est porté par $\vec{u}_z$ et $\vec{B}$ par $\vec{u}_\theta$ alors $\vec{\Pi}$ est porté par $\vec{u}_r$. Sur les surfaces colorées de la figure 1, son flux est donc nul : il n'est donc pas nécessaire de le calculer. Exprimons-le en $r = R$, seul endroit intéressant.

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \times E \times \frac{\mu_0 R \, \gamma E}{2} (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta) = -\frac{R \gamma E^2}{2} \vec{u}_r \,.$$

Enfin, la puissance rayonnée au travers des parois du tronçon de cylindre est égale au flux sortant du vecteur de Poynting,

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{Pi} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}_{\text{lat}}} \vec{\Pi} \cdot \mathrm{d}S \, \vec{u}_r \,,$$

d'où

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = -\frac{R \gamma E^2}{2} \times 2\pi R \ell$$

soit

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{ray}} = -\gamma E^2 \pi R^2 \ell \,.}$$

> *La puissance rayonnée est négative, ce qui signifie que l'énergie ne sort pas mais entre dans le cylindre au travers des parois.*

6 On constate l'égalité des deux termes,

$$\mathcal{P}_{\text{J}} + \mathcal{P}_{\text{ray}} = 0 \,.$$

Cela signifie que toute la puissance dissipée par effet Joule dans le cylindre y entre par rayonnement, ce qui est logique puisqu'il n'y a pas d'autre source de puissance dans le tronçon de cylindre étudié. Ce résultat est par ailleurs cohérent avec l'équation intégrale de Poynting,

$$-\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{em}}}{\mathrm{d}t} = \oiint \vec{\Pi} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \mathcal{P}_{\text{J}} = 0 \,,$$

car en régime stationnaire comme ici l'énergie électromagnétique $\mathcal{E}_{\text{em}}$ contenue dans le système est constante.

Rappel : *Physiquement, l'équation de Poynting s'écrit*

$$- \text{ variation d'énergie} = \text{puissance rayonnée en surface} + \text{puissance dissipée en volume}$$

ce qui se traduit en termes d'équation locale

$$-\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \operatorname{div} \overrightarrow{\Pi} + \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}$$

et en termes d'équation intégrale

$$-\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{em}}{\mathrm{d}t} = \oiint \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS} + \iiint \mathcal{P}_{J,\mathrm{vol}} \, dV \,.$$

Ondes électromagnétiques

Exercice 1 : Champs d'un laser [oral banque PT]

1 - Écrire le vecteur champ électrique d'une onde de pulsation ω se déplaçant selon Oz polarisée rectilignement.

2 - Comment caractériser expérimentalement le caractère polarisé d'une onde ?

3 - On dispose d'un laser d'une puissance de 1 mW. Déterminer les amplitudes des champs électrique et magnétique.

Donnée : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}$.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Cf. cours : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x$ avec $k = \omega/c$ et $\vec{u}_x$ la direction de polarisation.

$\boxed{2}$ Cf. cours : l'intensité lumineuse en sortie d'un polariseur est nulle pour une certaine position, dans laquelle l'axe passant du polariseur est orthogonal à la direction de polarisation.

$\boxed{3}$ On assimile l'air au vide. D'après la relation de structure,

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}}{c} \qquad \text{soit} \qquad \vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)\vec{u}_y\,.$$

Le vecteur de Poynting s'écrit

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{{E_0}^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\vec{u}_z\,.$$

En modélisant le faisceau laser par un faisceau cylindrique de rayon $a = 2\,\mathrm{mm}$ (diffraction négligeable), la puissance moyenne portée par le faisceau vaut donc

$$\mathcal{P} = \left\langle ||\vec{\Pi}|| \right\rangle \times \pi a^2 = \frac{{E_0}^2 \pi a^2}{\mu_0 c}\,.$$

On en déduit

$$\boxed{E_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{P}\,\mu_0\,c}{\pi a^2}} = 1{,}7\cdot 10^2\,\mathrm{V\cdot m^{-1}} \qquad \text{et} \qquad B_0 = \frac{E_0}{c} = 5{,}8\cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}\,.}$$