Ondes

Questions de cours

1 - Nommer les deux types d'erreurs et expliquer ce qui les distingue.

2 - Rappeler sans démonstration les conditions d'interférences parfaitement constructives et parfaitement destructives, d'abord en termes de déphasage puis en termes de différence de marche et de longueur d'onde.

3 - Rappeler sans démonstration la forme mathématique d'une onde progressive harmonique. Montrer que la superposition de deux ondes progressives harmoniques synchrones de même amplitude se propageant en sens opposé donne une onde stationnaire.

Exercice 1 : Mascaret

Un mascaret est une vague solitaire qui remonte certains fleuves sur de très longues distances.

On considère ici que la vague a une célérité de $20\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Le fleuve est modélisé rectiligne d'axe (Ox) orienté dans le sens de propagation du mascaret, donc inversement au sens d'écoulement du fleuve. L'origine O est prise à l'embouchure du fleuve. À l'instant $t = 0$, le mascaret est repéré au niveau d'un pont, 400 m après l'embouchure du fleuve. L'allure du niveau d'eau dans le fleuve est celle de la figure 1.

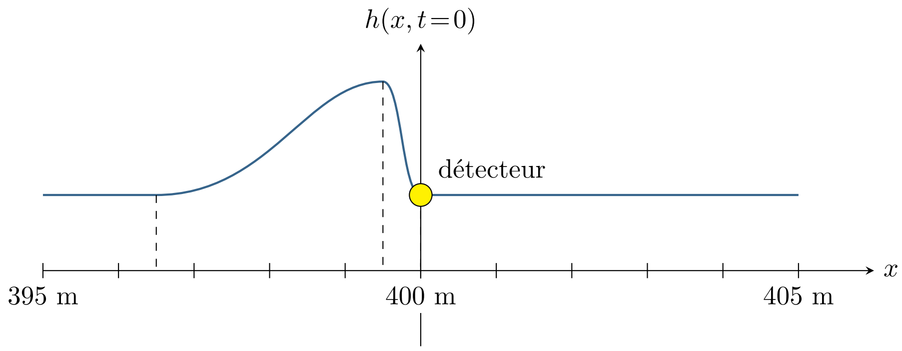


Figure 1 – Profil initial du mascaret. Une graduation de l'axe des abscisses correspond à 1 m.

1 - Faire un schéma du niveau d'eau dans le fleuve une seconde plus tard, en supposant que l'onde se propage sans déformation.

2 - L'observateur sur le pont prévient un surfeur qui attend la vague 1,9 km en amont de l'embouchure de fleuve. Quand le surfeur va-t-il recevoir la vague ?

3 - Un détecteur fixe capable d'enregistrer la hauteur de l'eau dans le fleuve au cours du temps est placé au niveau du pont, représenté par le point sur la figure 1. Dessiner l'allure des variations de niveau d'eau qu'il mesure au cours du temps.

4 - En réalité, il s'avère que la célérité d'une vague dépend de la profondeur de l'eau : plus l'eau est profonde, plus la vague est rapide. En supposant que la variation de hauteur d'eau dû au mascaret lui-même est significative, présenter sur un schéma comment évolue le profil du mascaret.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

En préambule, une petite vidéo montrant le plus grand mascaret du monde : `https://www.youtube.com/watch?v=FT3FrtsTuvs`

Attention aux conversions d'unités dans cet exercice ! On rappelle que

$$1\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = \frac{1}{3{,}6}\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \qquad \textit{donc} \qquad 1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 3{,}6\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}.$$

1 En $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ la vague aura progressé de

$$\Delta x = c\,\Delta t = \frac{20}{3{,}6}\times 1 = 5{,}5\,\mathrm{m}\,.$$

Comme elle ne se déforme pas, il suffit de translater le schéma de la figure 1 pour la représenter, ce qui donne la figure 2.

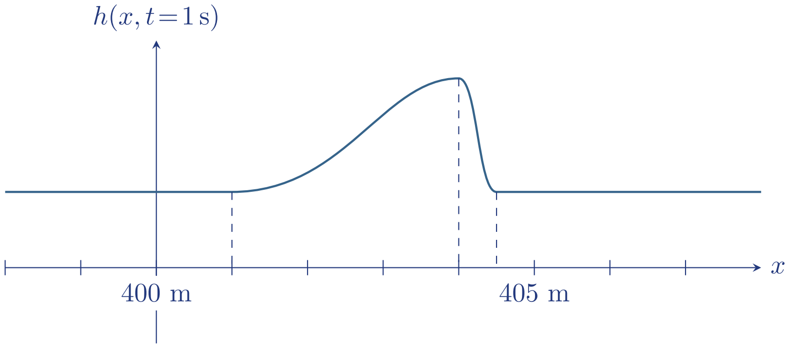


Figure 2 – Profil du mascaret au bout d'une seconde. Une graduation de l'axe des abscisses correspond à $1\,\mathrm{m}$.

2 L'avant du mascaret est en $x_0 = 400\,\mathrm{m}$ à $t = 0$. Elle atteint la position du surfeur $x_{\text{surf}} = 1{,}9\,\mathrm{km}$ au bout d'un temps

$$\boxed{\Delta t = \frac{x_{\text{surf}} - x_0}{c}}$$

Numériquement,

$$\Delta t = \frac{1900 - 400}{\dfrac{20}{3{,}6}} = 210\,\mathrm{s} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta t = 3\,\mathrm{min}30\,\mathrm{s}\,.}$$

3 ▷ À l'instant $t = 0$, le front du mascaret est exactement sur le détecteur ;

▷ La crête de la vague est située à $\Delta x = 0{,}5\,\mathrm{m}$ du front du mascaret, elle atteint donc le détecteur avec un retard $\Delta t = \Delta x / c = 0{,}09\,\mathrm{s}$ par rapport au front de la vague ;

▷ L'arrière de la vague est située à $\Delta x' = 3{,}5\,\mathrm{m}$ du front du mascaret, et franchit le détecteur au bout de $\Delta t' = 0{,}63\,\mathrm{s}$.

On en déduit le chronogramme de la figure 3.

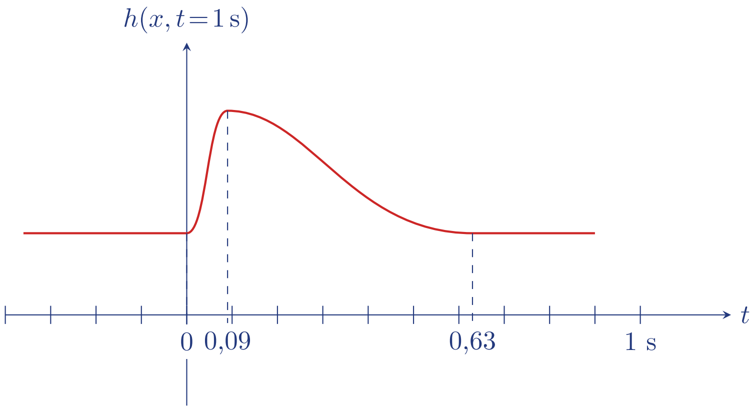


Figure 3 – Chronogramme enregistré par le détecteur. Une graduation de l'axe des abscisses correspond à $0{,}1\,\mathrm{s}$.

4 La partie de la vague la plus rapide sera la crête. Elle va progressivement rattraper le front de la vague, la vague va donc se raidir et finir par déferler, voir figure 4. La particularité d'un mascaret par rapport à une vague sur une plage est la lenteur de ce phénomène !

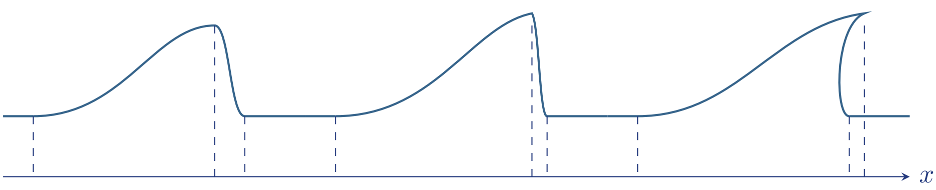


Figure 4 – **Évolution du profil du mascaret.** Comme il s'agit d'un schéma de principe, l'axe des abscisses n'est pas gradué.

Ondes

Questions de cours

1 - Rappeler l'écriture mathématique d'un signal harmonique en nommant chacun des paramètres intervenant. Tracer son chronogramme et expliquer comment on accède graphiquement à ces paramètres.

2 - Donner sans démonstration les deux formes mathématiques par lesquelles on peut modéliser une onde progressive quelconque se propageant à la célérité c dans le sens des x croissants. Que deviennent ces deux formes dans le cas où l'onde se propage dans le sens des x décroissants ?

Exercice 1 : Position des nœuds et des ventres d'une OSH

Considérons une onde stationnaire harmonique de la forme $\xi(x,t) = A\cos(kx)\cos(\omega t)$.

1 - Définir l'amplitude locale de vibration $A(x)$, c'est-à-dire l'amplitude du signal enregistré par un capteur placé en x.

2 - En déduire la position des ventres de vibration en fonction de la longueur d'onde λ et d'un entier n.

3 - Même question pour les nœuds de vibration.

4 - Retrouver ces résultats à partir de la représentation graphique de l'OSH.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Le signal vu par un capteur situé en x a pour amplitude $A(x) = A\cos(kx)$.

$\boxed{2}$ Position des ventres :

$$\begin{aligned} A(x) = \pm A_\mathrm{m} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \cos(kx) = \pm 1 \\ &\Leftrightarrow \qquad kx = n\pi\,, \qquad n \text{ entier} \\ &\Leftrightarrow \qquad x = n\frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que deux ventres sont séparés de $\lambda/2$.

❖ ***Oral : S'appuyer sur le cercle trigo. Justifier que c'est cohérent avec la figure.***

$\boxed{3}$ Positions des nœuds :

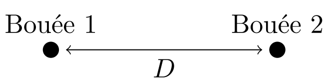
$$\begin{aligned} A(x) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \cos(kx) = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad kx = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi\,, \qquad n \text{ entier} \\ &\Leftrightarrow \qquad x = \frac{\pi}{2k} + \frac{n\pi}{k} \\ &\Leftrightarrow \qquad x = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que deux nœuds sont séparés de $\lambda/2$.

❖ ***Oral : S'appuyer sur le cercle trigo. Justifier que c'est cohérent avec la figure.***

Exercice 2 : Étude de la houle

La houle est constituée de vagues formées par le vent, qui peuvent se propager sur de grandes distances et donc être observées dans des régions dépourvues de vent. On assimilera la houle à une onde mécanique progressive sinusoïdale. La hauteur de la houle est, par définition, égale à l'amplitude crête-à-crête de la hauteur d'eau mesurée par rapport au niveau de la mer calme.



Deux bouées distantes de $D = 50\,\mathrm{m}$ sont alignées dans le sens de propagation de la houle (voir schéma ci-contre), la houle se propageant de la bouée 1 vers la bouée 2. Chacune est munie d'un accéléromètre qui enregistre leur déplacement vertical en fonction du temps. Les données recueillies sont tracées figure 1, représentant la hauteur d'eau (en mètres) en fonction du temps (en secondes).

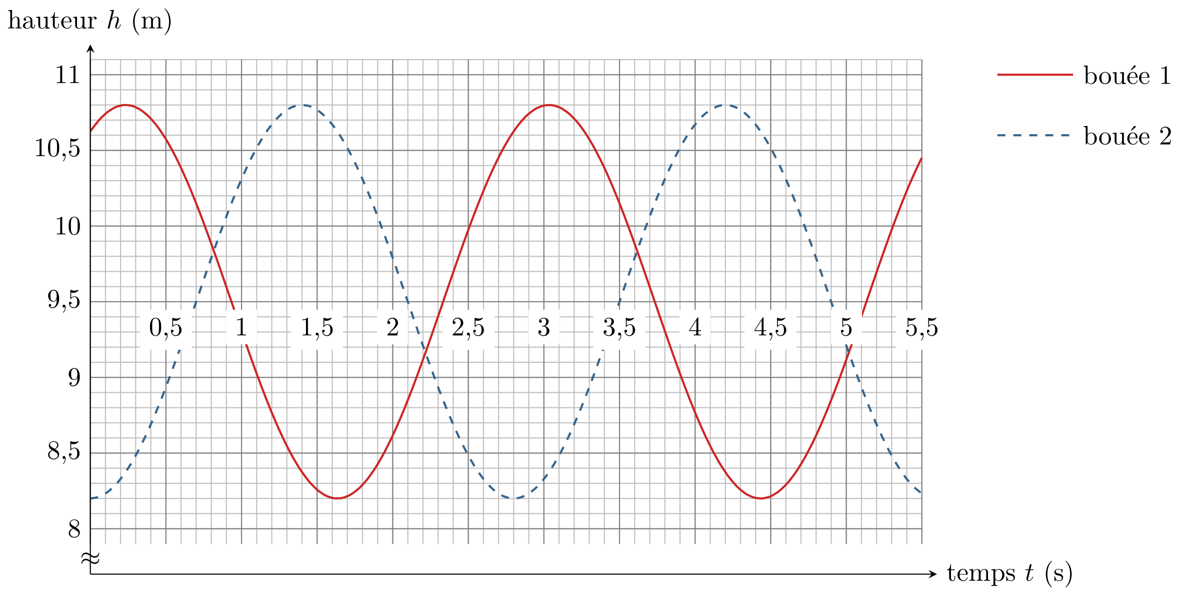


Figure 1 – Chronogramme de la hauteur des bouées.

A - Étude des signaux enregistrés par les bouées

1 - Que vaut la hauteur H de la houle ? Que vaut sa période T ? Sa fréquence f ? Sa pulsation ω ?

2 - Proposer une écriture mathématique pour les hauteurs $h_1(t)$ et $h_2(t)$ des bouées 1 et 2 faisant notamment intervenir les paramètres définis à la question précédente et deux phases initiales φ_1 et φ_2.

3 - Vérifier que le chronogramme est en accord avec la valeur $\varphi_1 = -\pi/6$. Il n'est pas demandé de *démonstration* compliquée mais une *vérification* simple.

4 - Que vaut le plus petit retard apparent Δt_{app} de la houle entre les bouées, lu sur le graphique ? En déduire le déphasage apparent entre les bouées.

5 - Le vrai retard de la houle entre les deux bouées est en fait $\Delta t = 3T + \Delta t_{\text{app}}$. En déduire le vrai déphasage.

6 - En déduire la phase initiale φ_2. Vérifier que votre calcul est cohérent avec le chronogramme.

B - Caractéristiques de la houle

7 - En déduire la célérité de la houle, d'abord à exprimer en fonction de T, Δt_{app} et D, puis à calculer numériquement.

8 - Calculer la longueur d'onde de la houle, d'abord à exprimer littéralement puis à calculer numériquement.

9 - Quand la hauteur de la houle augmente, on observe que la période des oscillations augmente ainsi que la distance L entre deux vagues successives. Par exemple, en haute mer pour $h = 10\,\text{m}$, on mesure $T' = 5\,\text{s}$ et $L = 80\,\text{m}$. Quelle est la célérité c' d'une telle houle ?

10 - La propagation d'une onde est dite dispersive si la célérité de l'onde dépend de sa fréquence. La propagation de la houle est-elle dispersive ?

Éléments de correction de l'exercice 2 :

A - Étude des signaux enregistrés par les bouées

$\boxed{1}$ La hauteur d'eau est comprise entre $h_{\max} = 10{,}8\,\text{m}$ et $h_{\min} = -8{,}2\,\text{m}$. L'amplitude crête-à-crête vaut donc

$$\boxed{H = h_{\max} - h_{\min} = 2{,}6\,\text{m}\,.}$$

Par lecture graphique, sa période T vaut

$$\boxed{T = 2{,}8\,\text{s}\,.}$$

On en déduit alors

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = 0{,}36\,\text{Hz}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2{,}2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

2 Les deux signaux sont des signaux harmoniques décalés, c'est-à-dire des signaux harmoniques de moyenne non nulle. Ils sont de pulsation ω et d'amplitude $H/2$, et ont pour valeur moyenne $H_0 = 9{,}5\,\mathrm{m}$. Ainsi,

$$\boxed{h_1(t) = H_0 + \frac{H}{2}\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad \text{et} \qquad h_2(t) = H_0 + \frac{H}{2}\cos(\omega t + \varphi_2)\,.}$$

3 On vérifie numériquement que la valeur calculée

$$h_1(0) = H_0 + \frac{H}{2}\cos\left(0 - \frac{\pi}{6}\right) = 10{,}6\,\mathrm{m}$$

est en accord avec ce que l'on peut lire sur le chronogramme.

4 On peut estimer le retard apparent à

$$\Delta t_{\mathrm{app}} = 1{,}2\,\mathrm{s}\,.$$

Le déphasage apparent de la bouée 2 par rapport à la bouée 1 vaut donc

$$\boxed{\Delta\varphi_{\mathrm{app},2/1} = -\omega\,\Delta t_{\mathrm{app}} = -2{,}7\,\mathrm{rad}\,.}$$

> *La bouée 2 étant en retard de phase, attention à ne pas oublier le signe !*

5 Le vrai décalage temporel est égal à $\Delta t = 3T + \Delta t_{\mathrm{app}} = 9{,}6\,\mathrm{s}$, le déphasage vaut donc

$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1} = -\omega\,\Delta t = -21{,}5\,\mathrm{rad}\,.}$$

6 Comme les deux signaux sont synchrones, alors

$$\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi_{2/1} = -22{,}0\,\mathrm{rad}\,.}$$

Numériquement, $\cos(22) \simeq -1$, ce qui est **cohérent avec le chronogramme** car h_2 est quasiment minimal à l'instant $t = 0$.

> *Répondre à cette question demande une petite entorse aux règles de calcul sur les chiffres significatifs : si vous ne gardez que deux chiffres significatifs au lieu d'en garder trois, vous n'aurez pas une précision suffisante pour vérifier l'accord avec le chronogramme. Ici tout se passe bien car l'exemple est « artificiel » si bien que les chronogrammes sont tracés avec une période strictement égale à 2,8 s.*

B - Caractéristiques de la houle

7 La célérité est relié au retard et à la distance entre les bouées par

$$c = \frac{D}{\Delta t} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{c = \frac{D}{3T + \Delta t_{\mathrm{app}}} = 5{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

8 D'après la relation de dispersion,

$$\boxed{\lambda = cT = 15\,\mathrm{m}}$$

9 La distance L entre deux vagues correspond exactement à la longueur d'onde. Toujours d'après la relation de dispersion,

$$\boxed{c' = \frac{L}{T'} = 16\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

10 D'après les questions précédentes, $T' \neq T$ et $c' \neq c$: on en déduit que **la propagation de la houle est dispersive**.

Ondes

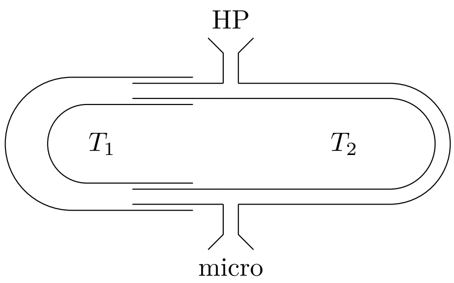
Questions de cours

1 - Dans un TP visant à mesurer l'intensité de la pesanteur, on aboutit à la fin des calculs à $g = 9{,}826\,47\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et à une incertitude $\Delta g = 2{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Écrire le résultat sous une forme adaptée.

2 - Donner sans démonstration la forme mathématique permettant de modéliser une onde stationnaire.

3 - Rappeler l'écriture mathématique d'un signal harmonique en nommant chacun des paramètres intervenant. Démontrer qu'il est de moyenne nulle.

Exercice 1 : Trombone de König



Le trombone de König est un dispositif de laboratoire permettant de faire interférer deux ondes sonores ayant suivi des chemins différents. Un haut-parleur, alimenté par un générateur basses fréquences, émet un son de fréquence f. Un microphone branché sur un oscilloscope enregistre le signal sonore en sortie. En déplaçant la partie mobile du tuyau T_1, on fait varier l'amplitude du signal observé. Elle passe deux fois de suite par une valeur minimale lorsqu'on déplace T_1 de $d = 11{,}5 \pm 0{,}2\,\mathrm{cm}$.

Déterminer la vitesse du son dans l'air à la température où l'expérience est réalisée.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

L'onde sonore arrivant au micro est la superposition des deux ondes passées par chacun des tuyaux. Ces ondes sont de même fréquence et interfèrent.

Lorsque l'on déplace la partie mobile du tuyau T_1, on modifie la longueur du chemin parcouru par l'onde acoustique dans ledit tuyau, et donc le déphasage entre les deux ondes se superposant. Précisémment, lorsque le tuyau T_1 est déplacé d'une distance d vers la gauche le trajet est allongé de $2d$ et le déphasage augmenté de

$$\Delta(\Delta\phi) = 2\pi\frac{2d}{\lambda} = \frac{4\pi\, f\, d}{c}$$

d'après la relation de dispersion.

D'autre part, l'amplitude mesurée par le micro est minimale lorsque les interférences sont destructives, c'est-à-dire lorsque les deux ondes sont en opposition de phase : $\Delta\phi = \pi + 2n\pi$, n entier. En déplaçant le tuyau T_1 d'une position où les interférences sont destructives à la suivante, le déphasage passe alors de $\pi + 2n\pi$ à $\pi + 2(n \pm 1)\pi$. Le signe $\pm$ dépend du sens dans lequel le tuyau est déplacé.

Par conséquent,

$$\Delta(\Delta\phi) = \pi \qquad \text{soit} \qquad \frac{4\pi\, f\, d}{c} = \pi \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{c = 2fd = 345 \pm 6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$