Ondes et modèles de la lumière

Questions de cours

1 - Énoncer avec précision les lois de la réfraction.

2 - Sur un banc gradué au millimètre, on repère deux points aux abscisses $x_1 = 8{,}2\,\text{cm}$ et $x_2 = 15{,}9\,\text{cm}$. Déterminer la distance D les séparant et l'incertitude associée.

3 - Rappeler sans démonstration la forme mathématique d'une onde progressive harmonique. Montrer que la superposition de deux ondes progressives harmoniques synchrones de même amplitude se propageant en sens opposé donne une onde stationnaire.

Exercice 1 : Corde de guitare

La partie vibrante d'une corde de guitare mesure $L = 80\,\text{cm}$. Après avoir été pincée, elle donne un la$_3$ dont la fréquence vaut $f = 440\,\text{Hz}$. On cherche à écrire les ondes existant sur cette corde sous la forme

$$\xi(x,t) = A\sin(kx+\psi)\cos(\omega t)$$

1 - Montrer que $\psi = 0$, puis exprimer les valeurs possibles de k en fonction de la longueur de la corde.

2 - Quelle est la longueur d'onde λ obtenue sur la corde ? Quelle est la longueur d'onde du son émis ?

3 - Déterminer la vitesse de propagation d'une onde dans cette corde.

4 - Quelles sont les fréquences inférieures à $2\,\text{kHz}$ sur lesquelles la corde, convenablement excitée, peut résonner ?

5 - Peut-on obtenir toutes ces fréquences en excitant la corde par son milieu ?

6 - Un choc décale le chevalet de la guitare, ce qui réduit la partie vibrante de $1\,\text{cm}$. Sur quelle fréquence fondamentale résonne-t-elle à présent ?

Pour tenter de réaccorder la guitare, il faut retendre la corde. Cela a pour effet de modifier la célérité de l'onde, donnée par

$$c = \sqrt{\frac{T_0\,L}{m}}$$

où T_0 est la force de tension de la corde et m la masse de la partie tendue.

7 - Dans quelle proportion faut-il augmenter la tension de la corde pour accorder la guitare ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Conditions aux limites :
▷ $\xi(0,t) = 0$ donc $\sin\psi = 0$ donc $\psi = 0$ convient ;
▷ $\xi(L,t) = 0$ donc $\sin(kL) = 0$ donc $k = n\pi/L$ avec n entier.

$\boxed{2}$ Sur la guitare : $L = \lambda/2$ (mode fondamental) donc $\lambda = 2L = 1{,}60\,\text{m}$.

Dans l'air : $\lambda_{\text{son}} = c_{\text{son}}/f = 77\,\text{cm}$. Ces deux longueurs d'onde n'ont bien sûr rien à voir, seule la fréquence est commune.

$\boxed{3}$ Relation de dispersion de la corde : $c = \lambda f = 7{,}0\cdot 10^2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

$\boxed{4}$ Non, on ne peut pas obtenir les modes pairs pour lesquels il existe un nœud au milieu de la corde (si on exicte un nœud ... ce ne sera pas un nœud !)

$\boxed{5}$ $f' = c/2L' = 432\,\text{Hz}$.

$\boxed{6}$ Il faut avoir

$$\frac{c'}{2L'} = \frac{c}{2L} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{c'}{c} = \frac{L'}{L} \qquad \text{et} \qquad \frac{T'}{T} = \frac{L'^2}{L^2} = \left(\frac{81}{80}\right)^2 = 1{,}02$$

Il faut augmenter la tension de 2 %.

Ondes et modèles de la lumière

Questions de cours

1 - Quelles sont les caractéristiques d'une onde monochromatique qui sont préservées lors d'un changement de milieu ? Quelles sont celles qui sont modifiées ? Définir l'indice optique du milieu.

2 - Donner sans démonstration les deux formes mathématiques par lesquelles on peut modéliser une onde progressive quelconque se propageant à la célérité c dans le sens des x croissants. Que deviennent ces deux formes dans le cas où l'onde se propage dans le sens des x décroissants ?

Exercice 1 : Position des nœuds et des ventres d'une OSH

Considérons une onde stationnaire harmonique de la forme $\xi(x,t) = A\cos(kx)\cos(\omega t)$.

1 - Définir l'amplitude locale de vibration $A(x)$, c'est-à-dire l'amplitude du signal enregistré par un capteur placé en x.

2 - En déduire la position des ventres de vibration en fonction de la longueur d'onde λ et d'un entier n.

3 - Même question pour les nœuds de vibration.

4 - Retrouver ces résultats à partir de la représentation graphique de l'OSH.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Le signal vu par un capteur situé en x a pour amplitude $A(x) = A\cos(kx)$.

$\boxed{2}$ Position des ventres :

$$\begin{aligned} A(x) = \pm A_\mathrm{m} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \cos(kx) = \pm 1 \\ &\Leftrightarrow \qquad kx = n\pi\,, \qquad n \text{ entier} \\ &\Leftrightarrow \qquad x = n\frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que deux ventres sont séparés de $\lambda/2$.

❖ ***Oral : S'appuyer sur le cercle trigo. Justifier que c'est cohérent avec la figure.***

$\boxed{3}$ Positions des nœuds :

$$\begin{aligned} A(x) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \cos(kx) = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad kx = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi\,, \qquad n \text{ entier} \\ &\Leftrightarrow \qquad x = \frac{\pi}{2k} + \frac{n\pi}{k} \\ &\Leftrightarrow \qquad x = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que deux nœuds sont séparés de $\lambda/2$.

❖ ***Oral : S'appuyer sur le cercle trigo. Justifier que c'est cohérent avec la figure.***

Exercice 2 : Mascaret

Un mascaret est une vague solitaire qui remonte certains fleuves sur de très longues distances.

On considère ici que la vague a une célérité de $20\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Le fleuve est modélisé rectiligne d'axe (Ox) orienté dans le sens de propagation du mascaret, donc inversement au sens d'écoulement du fleuve. L'origine O est prise à l'embouchure du fleuve. À l'instant $t = 0$, le mascaret est repéré au niveau d'un pont, $400\,\mathrm{m}$ après l'embouchure du fleuve. L'allure du niveau d'eau dans le fleuve est celle de la figure 1.

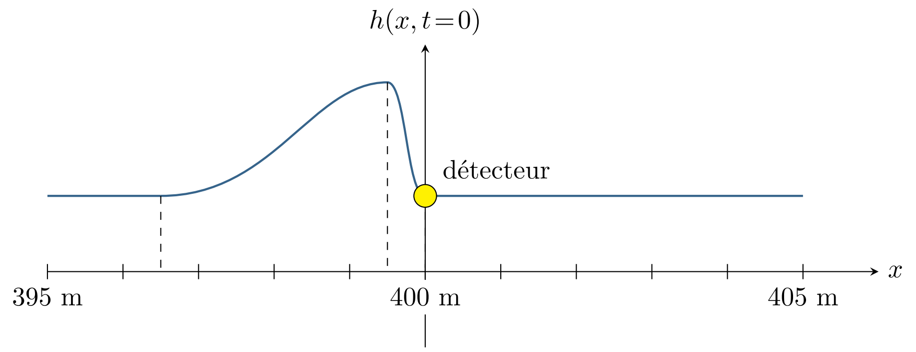


Figure 1 – Profil initial du mascaret. Une graduation de l'axe des abscisses correspond à 1 m.

1 - Faire un schéma du niveau d'eau dans le fleuve une seconde plus tard, en supposant que l'onde se propage sans déformation.

2 - L'observateur sur le pont prévient un surfeur qui attend la vague 1,9 km en amont de l'embouchure de fleuve. Quand le surfeur va-t-il recevoir la vague ?

3 - Un détecteur fixe capable d'enregistrer la hauteur de l'eau dans le fleuve au cours du temps est placé au niveau du pont, représenté par le point sur la figure 1. Dessiner l'allure des variations de niveau d'eau qu'il mesure au cours du temps.

4 - En réalité, il s'avère que la célérité d'une vague dépend de la profondeur de l'eau : plus l'eau est profonde, plus la vague est rapide. En supposant que la variation de hauteur d'eau dû au mascaret lui-même est significative, présenter sur un schéma comment évolue le profil du mascaret.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

En préambule, une petite vidéo montrant le plus grand mascaret du monde : `https://www.youtube.com/watch?v=FT3FrtsTuvs`

> *Attention aux conversions d'unités dans cet exercice ! On rappelle que*
>
> $$1\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = \frac{1}{3{,}6}\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \textit{donc} \qquad 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 3{,}6\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

$\boxed{1}$ En $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ la vague aura progressé de

$$\Delta x = c\,\Delta t = \frac{20}{3{,}6} \times 1 = 5{,}5\,\mathrm{m}\,.$$

Comme elle ne se déforme pas, il suffit de translater le schéma de la figure 1 pour la représenter, ce qui donne la figure 2.

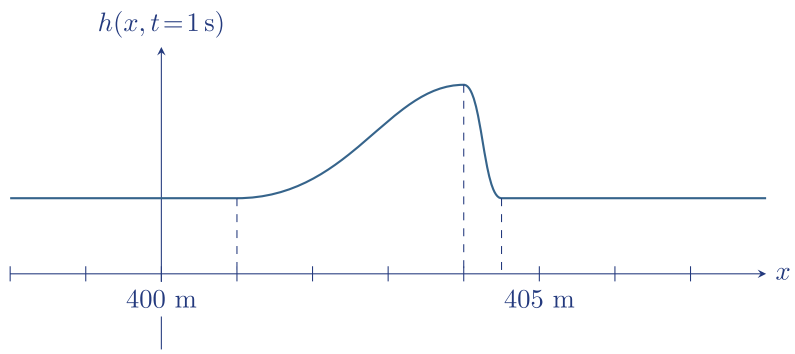


Figure 2 – Profil du mascaret au bout d'une seconde. Une graduation de l'axe des abscisses correspond à 1 m.

$\boxed{2}$ L'avant du mascaret est en $x_0 = 400\,\mathrm{m}$ à $t = 0$. Elle atteint la position du surfeur $x_{\mathrm{surf}} = 1{,}9\,\mathrm{km}$ au bout d'un temps

$$\boxed{\Delta t = \frac{x_{\mathrm{surf}} - x_0}{c}}$$

Numériquement,

$$\Delta t = \frac{1900 - 400}{\dfrac{20}{3{,}6}} = 210\,\mathrm{s} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta t = 3\,\mathrm{min}30\,\mathrm{s}\,.}$$

$\boxed{3}$ ▷ À l'instant $t = 0$, le front du mascaret est exactement sur le détecteur ;

▷ La crête de la vague est située à $\Delta x = 0{,}5\,\mathrm{m}$ du front du mascaret, elle atteint donc le détecteur avec un retard $\Delta t = \Delta x/c = 0{,}09\,\mathrm{s}$ par rapport au front de la vague ;

▷ L'arrière de la vague est située à $\Delta x' = 3{,}5\,\mathrm{m}$ du front du mascaret, et franchit le détecteur au bout de $\Delta t' = 0{,}63\,\mathrm{s}$.

On en déduit le chronogramme de la figure 3.

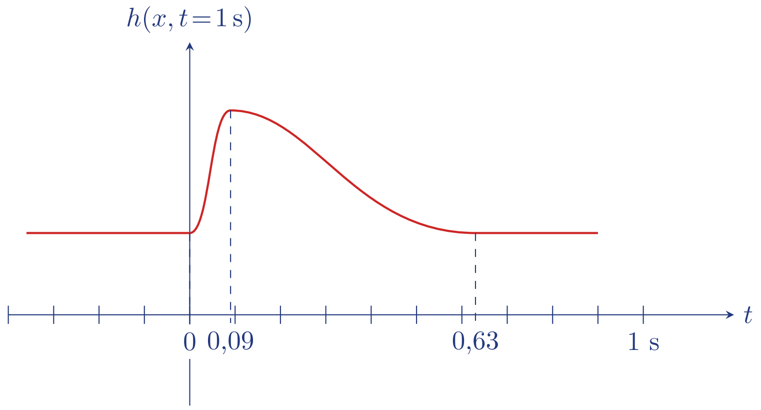


Figure 3 – Chronogramme enregistré par le détecteur. Une graduation de l'axe des abscisses correspond à 0,1 s.

$\boxed{4}$ La partie de la vague la plus rapide sera la crête. Elle va progressivement rattraper le front de la vague, la vague va donc se raidir et finir par déferler, voir figure 4. La particularité d'un mascaret par rapport à une vague sur une plage est la lenteur de ce phénomène !

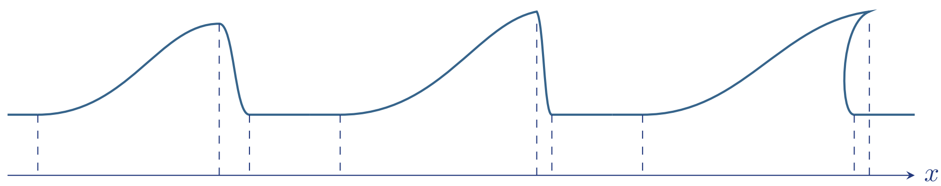


Figure 4 – Évolution du profil du mascaret. Comme il s'agit d'un schéma de principe, l'axe des abscisses n'est pas gradué.

Ondes et modèles de la lumière

Questions de cours

1 - Dans un TP visant à mesurer l'intensité de la pesanteur, on aboutit à la fin des calculs à $g = 9{,}826\,47\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et à une incertitude $\Delta g = 2{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Écrire le résultat sous une forme adaptée.

2 - Donner sans démonstration la forme mathématique permettant de modéliser une onde stationnaire.

Exercice 1 : Condition de réflexion totale

Les notations sont celles du cours, paragraphe sur la loi de la réfraction. Supposons maintenant $n_1 > n_2$.

1 - Donner un exemple de milieux qui vérifient cette condition.

2 - Représenter la situation sur un schéma. À partir de ce schéma, expliquer qualitativement pourquoi il existe une valeur limite $\theta_{1,\mathrm{lim}}$ de l'angle d'incidence au delà de laquelle le rayon réfracté ne peut plus exister.

3 - Calculer $\theta_{1,\mathrm{lim}}$ en fonction des indices n_1 et n_2.

4 - Comment interpréter la similitude avec l'expression de $\theta_{2,\mathrm{max}}$ établie précédemment ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Exemple : le rayon est dans du plexiglas et émerge dans de l'air.

$\boxed{2}$ Voir figure 1.

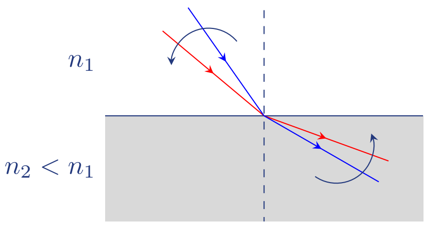


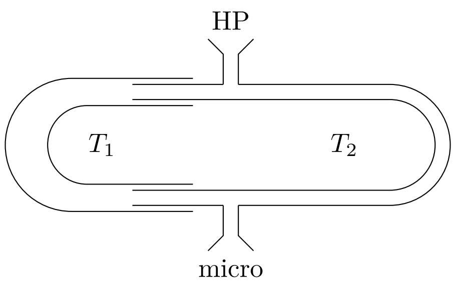
Figure 1 – **Cas $n_1 > n_2$.** Angle maximal de réfraction.

$\boxed{3}$ L'angle réfraction maximal ne peut pas être plus grand que $\pi/2$: au delà, la lumière ne rentre pas dans le milieu 2 et se réfléchit totalement. Dans ce cas la loi des sinus donne

$$n_1 \sin\theta_{1,\mathrm{lim}} = n_2 \sin\frac{\pi}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \theta_{1,\mathrm{lim}} = \frac{n_2}{n_1}$$

$\boxed{4}$ Principe de retour inverse, en inversant les milieux 1 et 2.

Exercice 2 : Trombone de König



Le trombone de König est un dispositif de laboratoire permettant de faire interférer deux ondes sonores ayant suivi des chemins différents. Un haut-parleur, alimenté par un générateur basses fréquences, émet un son de fréquence f. Un microphone branché sur un oscilloscope enregistre le signal sonore en sortie. En déplaçant la partie mobile du tuyau T_1, on fait varier l'amplitude du signal observé. Elle passe deux fois de suite par une valeur minimale lorsqu'on déplace T_1 de $d = 11{,}5 \pm 0{,}2\,\mathrm{cm}$.

Déterminer la vitesse du son dans l'air à la température où l'expérience est réalisée.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

L'onde sonore arrivant au micro est la superposition des deux ondes passées par chacun des tuyaux. Ces ondes sont de même fréquence et interfèrent.

Lorsque l'on déplace la partie mobile du tuyau T_1, on modifie la longueur du chemin parcouru par l'onde acoustique dans ledit tuyau, et donc le déphasage entre les deux ondes se superposant. Précisémment, lorsque le tuyau T_1 est déplacé d'une distance d vers la gauche le trajet est allongé de $2d$ et le déphasage augmenté de

$$\Delta(\Delta\phi) = 2\pi\frac{2d}{\lambda} = \frac{4\pi\, f\, d}{c}$$

d'après la relation de dispersion.

D'autre part, l'amplitude mesurée par le micro est minimale lorsque les interférences sont destructives, c'est-à-dire lorsque les deux ondes sont en opposition de phase : $\Delta\phi = \pi + 2n\pi$, n entier. En déplaçant le tuyau T_1 d'une position où les interférences sont destructives à la suivante, le déphasage passe alors de $\pi + 2n\pi$ à $\pi + 2(n \pm 1)\pi$. Le signe $\pm$ dépend du sens dans lequel le tuyau est déplacé.

Par conséquent,

$$\Delta(\Delta\phi) = \pi \qquad \text{soit} \qquad \frac{4\pi\, f\, d}{c} = \pi \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{c = 2fd = 345 \pm 6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

Exercice 3 : Mesurer la vitesse de la lumière dans un four à micro-ondes

Vous disposez du four à micro-ondes dont la plaque signalétique est représentée ci-contre. Ses dimensions intérieures sont 33,0 × 32,4 × 21,1 cm^3 données dans l'ordre largeur, profondeur, hauteur. Vous avez en outre une tablette de chocolat bien homogène que vous êtes prêt à sacrifier pour la science.

1 - Quelle est la longueur d'onde à laquelle sont émises les micro-ondes ?

2 - Si les parois du four sont parfaitement réfléchissantes, quel type d'ondes peut se mettre en place dans le four ? Quelle sont les plus grandes longueur d'ondes pouvant être obtenues ? Conclure.

3 - Proposer alors un protocole expérimental permettant de mesurer la vitesse de la lumière dans l'air.

4 - Conclure quant à l'intérêt du plateau tournant dans une utilisation normale du four à micro-ondes.

Éléments de correction de l'exercice 3 :

$\boxed{1}$ La longueur d'onde se déduit de la fréquence par

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3{,}00\cdot 10^8}{2450\cdot 10^6} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\lambda = 0{,}122\,\mathrm{m}}$$

$\boxed{2}$ Lorsqu'une onde est confinée dans un milieu limité, **des ondes stationnaires peuvent apparaître dans le milieu**. De telles ondes possèdent des nœuds et des ventres qui ont des positions fixes dans l'espace.

La plus grande longueur d'onde possible pour les ondes stationnaires est **telle que la distance entre les parois corresponde à la moitié de la longueur d'onde**. Ainsi, les longueurs d'onde maximales dans les trois directions valent respectivement

$$\boxed{\lambda_{\max,x} = 66{,}0\,\mathrm{cm} \quad ; \quad \lambda_{\max,y} = 64{,}8\,\mathrm{cm} \quad \text{et} \quad \lambda_{\max,z} = 42{,}2\,\mathrm{cm}}$$

La longueur d'onde d'émission de la source micro-onde est inférieure à ces longueurs d'ondes maximales, **elle est donc à même d'engendrer un système d'ondes stationnaires**.

$\boxed{3}$ Toutes les longueurs d'ondes pouvant donner naissance à un système d'ondes stationnaires se déduisent de la longueur d'onde maximale par

$$\lambda_n = \frac{\lambda_{\max}}{n} \qquad \text{où } n \text{ est un entier positif}\,.$$

Dans le plan horizontal, la valeur $n = 5$ donne $\lambda_{5,x} = 13{,}2\,\mathrm{cm}$ et $\lambda_{5,y} = 12{,}9\,\mathrm{cm}$. Ces valeurs sont proches de la celle de la source de micro-ondes, et pourront donc être excitées par la source et donner naissance à un système d'ondes résonantes. Davantage de puissance sera transférée au chocolat au niveau des ventres, qui va fondre localement. En mesurant la distance entre deux zones où le chocolat aura beaucoup fondu, on remonte à la distance entre ventres, puis à la longueur d'onde, et ainsi à un ordre de grandeur de la vitesse de la lumière.

$\boxed{\mathbf{4}}$ La position des nœuds et des ventres dans le four est fixe. Le plateau tournant sert ainsi à éviter qu'ils ne coïncident toujours avec le même point du plat à chauffer. En outre, remarquons que la longueur des micro-ondes ne correspond exactement à aucune des longueurs d'ondes résonantes : cela évite que les nœuds et les ventres ne soient trop marqués, ce qui est gênant pour l'expérience du chocolat, mais favorable pour chauffer un plat uniformément.