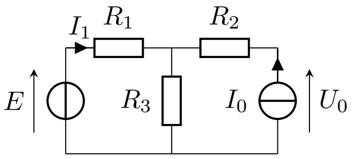
Bases de l'électrocinétique et de la mécanique

Exercice 1 : Circuit en régime continu



Déterminer I_1 et U_0.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Calcul de I_1 :

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = E \qquad \text{donc} \qquad R_1 I_1 + R_3(I_1 + I_0) = E \qquad \text{d'où} \qquad I_1 = \frac{E - R_3 I_0}{R_1 + R_3}$$

Calcul de U_0 : $E - R_1 I_1 + R_2 I_0 - U_0 = 0$

$$\text{donc} \qquad U_0 = E - R_1 \frac{E - R_3 I_0}{R_1 + R_3} + R_2 I_0 \qquad \text{soit} \qquad U_0 = \frac{R_3}{R_1 + R_3} E + \left(R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right) I_0$$

Exercice 2 : Le drop de Dan Carter

À la 70e minute de la finale de la Coupe du Monde de rugby 2015, l'ouvreur néo-zélandais Dan Carter a remis son équipe sur la voie de la victoire en marquant un superbe drop. Pour les non-initiés, un drop consiste à taper le ballon au pied pour le faire passer entre les deux poteaux, au dessus d'une barre horizontale placée à 3 m au dessus du sol.

En analysant la vidéo, on peut estimer le joueur placé à une quarantaine de mètres des poteaux. Le ballon est envoyé avec un angle d'environ 40° par rapport au sol et passe à cinq mètres au dessus de la barre.

1 - Proposer une modélisation simple permettant d'étudier le mouvement du ballon, en indiquant explicitement les effets négligés.

2 - Définir avec précision un repérage adapté à la description du mouvement.

3 - Dans le cadre de cette modélisation, déterminer la loi horaire puis la trajectoire du ballon.

4 - En déduire la vitesse initialement donnée au ballon par Dan Carter.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

Attention rédaction du corrigé à refaire pour l'adapter au début d'année.

Pour les amateurs de rugby ou ceux qui veulent découvrir ce qu'est un drop, la vidéo est disponible sur le lien `https://www.youtube.com/watch?v=gTmt_IB3Ya0`

Le système est le ballon, en mouvement par rapport au référentiel terrestre.

$\boxed{1}$ En première approximation, on peut considérer que le ballon est en chute libre sans frottement, c'est-à-dire en mouvement uniformément accéléré, d'accélération $\vec{a} = \vec{g}$. Cela revient à négliger les frottements de l'air sur le ballon et également tout effet dû à la rotation du ballon sur lui-même. Dans ce cadre, le mouvement du ballon sera décrit par la trajectoire de son centre de masse.

$\boxed{2}$ Le repérage naturel pour étudier un mouvement uniformément accéléré est un repérage cartésien dont une des directions, par exemple z, coïncide avec la direction de l'accélération et une deuxième direction, par exemple x, est définie telle que la vitesse initiale $\vec{v}_0$ du ballon soit incluse dans le plan (xOz). Comme le ballon part du niveau du sol, le plus naturel consiste à fixer l'origine du repère à la position initiale du ballon. On note alors $x = d$ la position

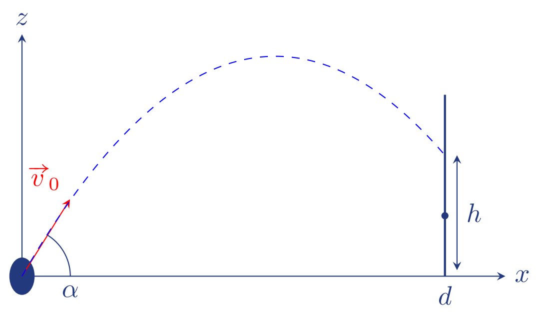


Figure 1 – Repérage pour décrire le drop.

des poteaux et $z = h$ la hauteur à laquelle se trouve le ballon au niveaux des poteaux. L'ensemble est récapitulé figure 1.

3 Tout le calcul qui suit a été fait en cours. Il « suffit » d'intégrer correctement les équations du mouvement en tenant compte des conditions initiales. Plutôt que de le faire par composante comme en cours, utilisons directement ici l'intégration vectorielle. On note $\overrightarrow{OM}(t)$ le vecteur position du ballon à l'instant t. Comme

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{g} \qquad \text{alors} \qquad \vec{v} = \vec{g}\,t + \vec{C}$$

où la constante $\vec{C}$ se détermine à partir de la condition initiale $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, soit $\vec{C} = \vec{0}$. On intègre ensuite une seconde fois pour déterminer le vecteur position,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{C'}$$

où la nouvelle constante $\vec{C'}$ se détermine encore à partir de la condition initiale $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$, soit $\vec{C'} = \vec{0}$. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0 t\,.}$$

On a ici la loi horaire, mais pas encore la trajectoire. Pour cela, il faut trouver l'équation $z(x)$ de la trajectoire en faisant disparaître le temps. Cette équation se trouve par l'intermédiaire des projections, en se rappelant que $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, ce qui donne

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t = v_0 \cos\alpha\, t \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{0z} t = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

La projection sur x permet d'exprimer le temps t en fonction de x,

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}\,,$$

En remplaçant dans l'équation sur z, on trouve

$$z(x) = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{{v_0}^2\cos^2\alpha} + v_0\sin\alpha\,\frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

ce qui donne l'équation d'une parabole,

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2\,{v_0}^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha\, x\,.}$$

4 L'énoncé indique $\alpha = 40°$ et avec les notations introduites précédemment $z(d) = h$ avec $d = 40\,\mathrm{m}$ et $h = 3 + 5 = 8\,\mathrm{m}$. Il suffit d'injecter ces données dans l'équation de la trajectoire pour déterminer v_0,

$$h = -\frac{g}{2\,{v_0}^2\cos^2\alpha}d^2 + \tan\alpha\, d$$

$$d\tan\alpha - h = \frac{g\,d^2}{2\cos^2\alpha}\,\frac{1}{{v_0}^2}$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{g\,d^2}{2\cos^2\alpha\,(d\tan\alpha - h)}}}$$

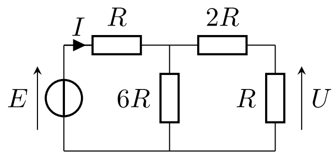
Numériquement, on trouve

$$\boxed{v_0 = 23\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 82\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}$$

L'ordre de grandeur semble plutôt acceptable : une recherche indique que la vitesse typique d'un ballon en vol est de l'ordre de $50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, mais le ballon a été ralenti par frottements ... et Dan Carter n'est pas n'importe quel joueur.

Exercice 3 : Étude d'un circuit en régime continu

Exprimer le courant I et la tension U en fonction de $E = 3\,\mathrm{V}$ et $R = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$.



Éléments de correction de l'exercice 3 :

1 On détermine la résistance équivalente à l'ensemble pour utiliser la loi d'Ohm.

▷ Trois résistances en parallèle à droite du schéma équivalent à

$$\frac{1}{R_\mathrm{p}} = \frac{1}{6R} + \frac{1}{2R+R} = \frac{1}{2R}$$

▷ Montage en série de R_p et R équivaut à $R_\text{éq} = 2R$;

▷ D'après la loi d'Ohm $\boxed{I = E/2R = 1\,\mathrm{mA}}$.

2 La résistance R_p est soumise à la tension $U_\mathrm{p} = 3U$ (pont diviseur) et forme un pont diviseur avec R, d'où

$$\frac{U_\mathrm{p}}{E} = \frac{R_\mathrm{p}}{R_\mathrm{p}+R} \qquad \text{donc} \qquad U = \frac{U_\mathrm{p}}{3} = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}E = 0{,}66\,\mathrm{V}\,.$$

Bases de l'électrocinétique et de la mécanique

Exercice 1 : Ballon au dessus d'un obstacle

Un ballon de football est frappé depuis le point O situé au sol, ce qui lui donne une vitesse initiale v_0 inclinée de 45° par rapport à l'horizontale.

1 - En assimilant le mouvement du ballon à une chute libre, établir l'équation du mouvement et la projeter dans un repère.

2 - Établir les lois horaires $v_z(t)$ puis $z(t)$ sur les composantes verticales, sans s'intéresser à la composante horizontale.

3 - On souhaite que le ballon passe au dessus d'un obstacle de hauteur H. Déterminer la vitesse initiale minimale à donner au ballon. Pourquoi cette valeur minimale est-elle optimiste ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ cf. cours

$\boxed{2}$ $v_z(t) = -gt + v_0 \sin\alpha$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t$.

$\boxed{3}$ Le maximum est atteint lorsque $v_z = 0$ donc à l'instant $t_{\max} = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Pour que le ballon ait une chance de passer, il faut alors avoir

$$z(t_{\max}) > H \qquad \text{soit} \qquad -\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} > H \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_0 > \sqrt{\frac{2gH}{\sin^2\alpha}}\,.}$$

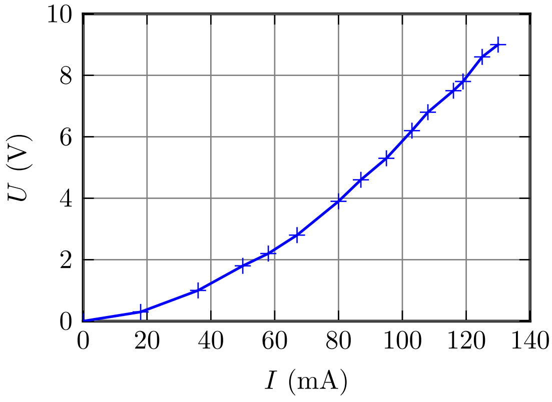
Exercice 2 : Caractéristique d'une lampe à incandescence

La caractéristique expérimentale d'une lampe à incandescence est représentée figure (a) en convention récepteur.

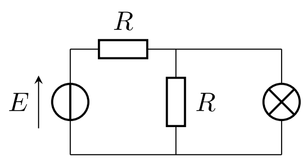
1 - On connecte la lampe à une source idéale de tension $E = 5\,\mathrm{V}$. Représenter la situation sur un schéma et déterminer les valeurs de U et I.

2 - Établir une relation entre U et I lorsque la lampe est placée dans le montage figure (b).

3 - En déduire les valeurs numériques de U et I.



(a) Caractéristique de la lampe.

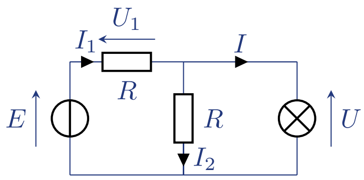


(b) Montage étudié. On a $E = 12\,\mathrm{V}$ et $R = 200\,\Omega$.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

$\boxed{1}$ Si E est dans le même sens que U alors $U = 5\,\mathrm{V}$ et par lecture de la caractéristique $I = 90\,\mathrm{mA}$.

2



Loi des mailles	$E = U_1 + U$
Loi d'Ohm	$E = R_1 I_1 + U$
Loi des nœuds	$E = R(I + I_2) + U$
Loi d'Ohm	$E = RI + U + U$
	$\boxed{U = \dfrac{E}{2} - \dfrac{RI}{2}}$

3 Pour conclure on trace la caractéristique du montage par dessus celle de la lampe, voir figure 1. On lit ensuite les coordonnées du point d'intersection.

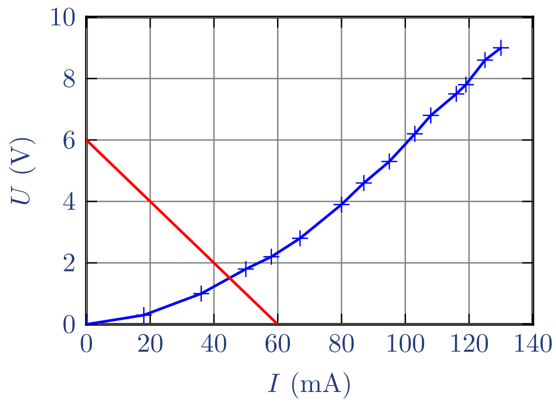
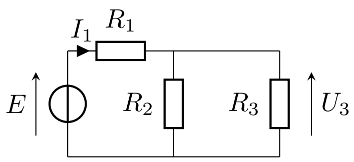


Figure 1 – Superposition des caractéristiques.

Exercice 3 : Circuit en régime continu



Déterminer I_1 et U_3.

Éléments de correction de l'exercice 3 :

Calcul de U_3 : $R_1 I_1 + U_3 = E$

$$\text{donc} \qquad R_1(I_2 + I_3) + U_3 = E \qquad \text{d'où} \qquad R_1\frac{U_3}{R_3} + R_1\frac{U_3}{R_3} + U_3 = E \qquad \text{et} \qquad U_3 = \frac{E}{1 + \dfrac{R_1}{R_2} + \dfrac{R_1}{R_3}}$$

Calcul de I_1 :

$$E = R_1 I_1 + U_3 \qquad \text{d'où} \qquad I_1 = \frac{E - U_3}{R_1} = \frac{E}{R_1}\frac{\dfrac{R_1}{R_2} + \dfrac{R_1}{R_3}}{1 + \dfrac{R_1}{R_2} + \dfrac{R_1}{R_3}} = \frac{R_3 + R_2}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2} E$$

Bases de l'électrocinétique et de la mécanique

Exercice 1 : Bille qui tombe d'une table

Considérons une bille, modélisée par un point matériel M de masse m, qui roule sur une table de longueur L et de hauteur h. À l'instant défini comme $t = 0$ la bille quitte la table et entame un mouvement de chute libre. Sa vitesse a alors pour norme v_0.

Dans un repère cartésien et pour $t > 0$, les coordonnées de la bille sont telles que

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + L \\ z(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + h \end{cases}$$

1 - Interpréter les lois horaires : où se trouve l'origine du repère choisi ?

2 - Établir l'équation de la trajectoire de la bille pendant la chute libre.

3 - Tracer sa trajectoire, en prenant également en compte la première phase du mouvement où elle roule sur la table.

4 - À quelle distance de la table se trouve le point où elle touche le sol ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Point de décollage de la bille a pour coordonées (L, h) donc l'origine du repère se trouve sur le sol de l'autre côté de la table.

$\boxed{2}$ $t = (x - L)/v_0$ donc

$$z(x) = -\frac{g}{2{v_0}^2}\,(x-L)^2 + h\,.$$

$\boxed{3}$ Droite de $x = 0$ jusqu'à $x = L$ à la hauteur h, puis demi-parabole.

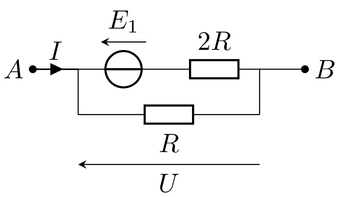
$\boxed{4}$ Il faut résoudre $z(x) = 0$ ce qui donne

$$x = L + \sqrt{\frac{2h{v_0}^2}{g}}$$

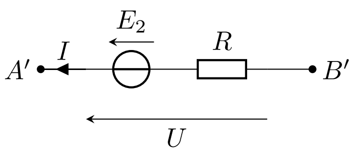
Exercice 2 : Caractéristiques de dipôles actifs

On considère les deux dipôles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ représentés ci-dessous. Pour les applications numériques, on prendra $E_1 = 10\,\mathrm{V}$, $E_2 = 2\,\mathrm{V}$ et $R = 1\,\mathrm{k}\Omega$.

Dipôle $\mathcal{D}_1$:



Dipôle $\mathcal{D}_2$:



1 - Établir la loi courant-tension du dipôle $\mathcal{D}_1$. Tracer sa caractéristique.

2 - Même question pour le dipôle $\mathcal{D}_2$.

3 - On connecte les deux dipôles en joignant les nœuds A et A' d'une part et B et B' d'autre part. Déterminer par le calcul puis graphiquement le point de fonctionnement du circuit ainsi formé.

On considère maintenant cette association des deux dipôles comme un seul dipôle $\mathcal{D}$, parcouru par un courant I orienté du côté A vers le côté B et soumis à une tension $U = U_{AB}$.

4 - Faire un schéma clair précisant ces notations, et déterminer par le calcul la caractéristique de $\mathcal{D}$.

5 - Le dipôle $\mathcal{D}$ est-il équivalent à un dipôle connu ?

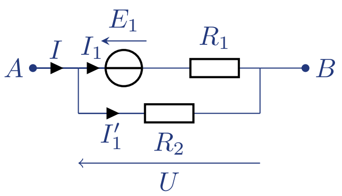
Éléments de correction de l'exercice 2 :

$\boxed{1}$ Loi des nœuds : $I = I_1 + I_1'$ avec $I_1' = U/R$ (branche du bas) et $U = E_1 + 2R\, I_1$ soit $I_1 = (U - E_1)/2R$ (branche du haut), d'où

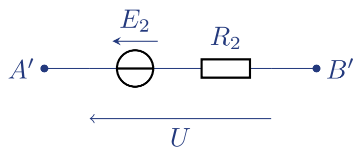
$$I = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right) U - \frac{E_1}{2R} = \frac{3}{2R} U - \frac{E_1}{2R}$$

compte tenu des valeurs numériques. C'est une droite d'ordonnée à l'origine $E_1/2R = 5\,\mathrm{mA}$ et coupant l'axe des abscisses en $U = E_1/3 = 3{,}3\,\mathrm{V}$.

Dipôle $\mathcal{D}_1$:



Dipôle $\mathcal{D}_2$:



$\boxed{2}$ Caractéristique du dipôle $\mathcal{D}_2$: $U = E_2 - R\,I$ ou encore $I = \dfrac{1}{R}(E_2 - U)$.

$\boxed{3}$ En faisant attention à l'orientation des courants et tension dans les dipôles (qui est ici correcte d'emblée), le point de fonctionnement est solution du système

$$\begin{cases} I = \dfrac{3}{2R} U - \dfrac{E_1}{2R} \\ I = \dfrac{2}{2R}(E_2 - U) \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} 0 = \left(\dfrac{3}{2R} + \dfrac{2}{2R}\right) U - \dfrac{E_1}{2R} - \dfrac{2E_2}{2R} \\ 5I = \dfrac{-2E_1}{2R} + \dfrac{6E_2}{2R} \end{cases}$$

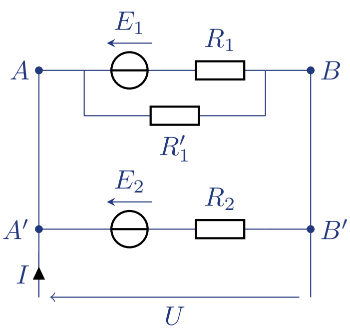
soit finalement

$$\begin{cases} U = \dfrac{E_1 + 2E_2}{5} = 2{,}8\,\mathrm{V} \\ I = \dfrac{1}{2R}\left(\dfrac{6}{5}E_2 - \dfrac{2}{5}E_1\right) = -1{,}6\,\mathrm{mA} \end{cases}$$

$\boxed{4}$ D'après le schéma, le courant I est la somme des courants traversant les deux dipôles soumis à la même tension U, d'où

$$I = \frac{3}{2R} U - \frac{E_1}{2R} - \frac{2}{2R}(E_2 - U) = \frac{5}{2R} U - \frac{1}{2R}(E_1 + 2E_2)\,.$$

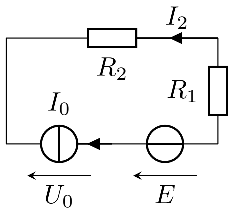
en faisant attention aux conventions d'orientation.



$\boxed{5}$ La caractéristique est du type $U = E + RI$, ce qui n'est pas l'un des cas connus, **MAIS** le dipôle est orienté en convention récepteur. En l'orientant en convention générateur, la caractéristique prendrait une forme type générateur de Thévenin. On en déduit que **le dipôle est équivalent à un générateur de Thévenin**.

Étienne Thibierge, 12 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 3 : Circuit en régime continu



Déterminer I_2 et U_0.

Éléments de correction de l'exercice 3 :

On a directement $I_2 = -I_0$.

Calcul de U_0 :

$$E + U_0 + R_2 I_2 + R_1 I_2 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad U_0 = -E + (R_1 + R_2) I_0$$