Mécanique et transitoires électriques

Exercice 1 : Bille qui tombe d'une table

Considérons une bille, modélisée par un point matériel M de masse m, qui roule sur une table de longueur L et de hauteur h. À l'instant défini comme $t = 0$ la bille se trouve à une extrémité de la table de coordonées $x_0 = 0$, $z_0 = h$. À l'instant $t = 0$, on lui donne un petit coup qui la fait rouler en lui donnant une vitesse v_0.

1 - Schématiser la situation, en indiquant notamment l'origine du repère.

Dans un premier temps, la bille roule sur la table. Outre son poids, la bille subit également la force de réaction de la table, dont on admet qu'elle a pour expression $\vec{R} = -m\vec{g}$.

2 - Montrer que le mouvement de la bille est rectiligne uniforme tant qu'elle roule sur la table.

3 - Exprimer l'instant t_1 auquel la bille atteint l'extrémité de la table ($x = L$) et entame un mouvement de chute libre.

Le PFD permet de montrer que dans le repère choisir et pour $t > t_1$, les coordonnées de la bille sont telles que

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + A \\ z(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + \dfrac{gL}{v_0} t + B \end{cases} \qquad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes.}$$

4 - Déterminer les valeurs de A et B.

5 - Établir l'équation de la trajectoire de la bille pendant la chute libre.

6 - Tracer sa trajectoire.

7 - À quelle distance de la table se trouve le point où elle touche le sol ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Origine du repère au pied de la table sous la bille.

$\boxed{2}$ La bille est soumise à deux forces qui se compensent, donc mvt rectiligne uniforme.

$\boxed{3}$ $t_1 = L/v_0$ et vitesse initiale v_0.

$\boxed{4}$ On identifie la solution aux CI, mais attention, elles sont données pour $t = t_1 = L/v_0$ et pas en $t = 0$!

$$x(t_1) \underbrace{=}_{\text{sol}} L + A \underbrace{=}_{\text{CI}} L \qquad \text{d'où} \qquad A = 0$$

$$z(t_1) \underbrace{=}_{\text{sol}} -\frac{1}{2} g \frac{L^2}{v_0^2} + \frac{gL^2}{v_0^2} + B \underbrace{=}_{\text{CI}} h \qquad \text{d'où} \qquad B = h - \frac{gL^2}{2v_0^2}$$

$\boxed{5}$ $t = x/v_0$ donc

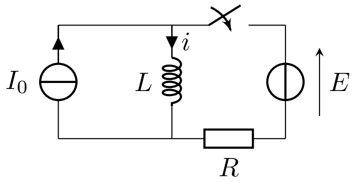
$$z(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{gLx}{v_0^2} - \frac{gL^2}{2v_0^2} + h = -\frac{g}{2v_0^2}(x-L)^2 + h\,.$$

$\boxed{6}$ Droite de $x = 0$ jusqu'à $x = L$ à la hauteur h, puis demi-parabole.

$\boxed{7}$ Il faut résoudre $z(x) = 0$ ce qui donne

$$x = L + \sqrt{\frac{2hv_0^2}{g}}$$

Exercice 2 : Bobine alimentée en courant et en tension



L'interrupteur du circuit ci-contre est fermé à l'instant $t = 0$.

1 - Pour $t > 0$, montrer que i vérifie l'équation différentielle

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = RI_0 + E\,.$$

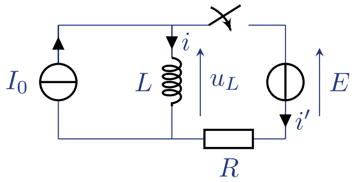
2 - Déterminer sa solution i_p en régime permanent asymptotique ($t \to \infty$) en raisonnant de deux façons différentes : à partir de l'équation différentielle et par équivalence de circuits.

3 - En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle.

4 - Justifier que $i(0^+) = I_0$.

5 - Déterminer la solution $i(t)$ et tracer son allure.

Éléments de correction de l'exercice 2 :



$\boxed{1}$ D'après la loi des mailles et la loi d'Ohm,

$$u_L = E + Ri'$$

Or $I_0 = i + i'$ d'après la loi des nœuds donc

$$u_L = E + R(I_0 - i)$$

et d'après la loi de comportement de la bobine,

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E + R(I_0 - i)$$

ce qui donne bien

$$\boxed{L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E + RI_0\,.}$$

$\boxed{2}$ Comme le forçage est constant alors la solution i_p en régime permanent est constante également. En injectant cette solution constante dans l'équation différentielle, on trouve

$$0 + Ri_\mathrm{p} = RI_0 + E \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{i_\mathrm{p} = I_0 + \frac{E}{R}\,.}$$

En régime continu, la bobine est équivalente à un fil donc la tension à ses bornes est nulle. On déduit de la loi des mailles

$$0 = E + Ri'_\mathrm{p} \qquad \text{donc} \qquad i'_\mathrm{p} = -\frac{E}{R}$$

La loi des nœuds donne alors le même résultat qu'avant (évidemment !)

$$\boxed{i_\mathrm{p} = I_0 + \frac{E}{R}\,.}$$

$\boxed{3}$ La forme canonique de l'équation différentielle est

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i = \frac{RI_0}{L} + \frac{E}{L} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{L}{R}\,.$$

On connaît ses solutions homogènes $i_\mathrm{h} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, et on vient d'en déterminer une solution particulière, donc

$$\boxed{i(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + I_0 + \frac{E}{R}\,,}$$

où la constante A se détermine à partir des conditions initiales.

$\boxed{4}$ À l'instant $t = 0^-$, la branche contenant la source de tension est ouverte : aucun courant n'y circule. La loi des nœuds impose nécessairement

$$i(0^-) = I_0\,.$$

Comme le courant traversant une bobine est toujours continu, on en déduit

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = I_0\,.}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Déterminons A,

$$i(0^+) \underbrace{=}_{\text{CI}} I_0 \underbrace{=}_{\text{sol}} A + I_0 + \frac{E}{R} \qquad \text{d'où} \qquad A = -\frac{E}{R}\,,$$

et ainsi

$$i(t) = -\frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{R} + I_0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) + I_0\,.}$$

Courbe représentée figure 1.

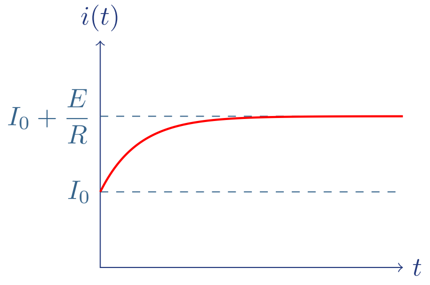


Figure 1 – Courbe représentative du courant $i(t)$.

Mécanique et transitoires électriques

Exercice 1 : Ballon au dessus d'un obstacle

Un ballon de football est frappé depuis le point O situé au sol, ce qui lui donne une vitesse initiale v_0 inclinée de 45° par rapport à l'horizontale.

1 - En assimilant le mouvement du ballon à une chute libre, établir l'équation du mouvement et la projeter dans un repère.

2 - Établir les lois horaires $v_z(t)$ puis $z(t)$ sur les composantes verticales, sans s'intéresser à la composante horizontale.

3 - On souhaite que le ballon passe au dessus d'un obstacle de hauteur H. Déterminer la vitesse initiale minimale à donner au ballon. Pourquoi cette valeur minimale est-elle optimiste ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

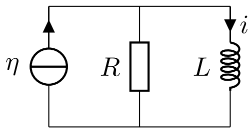
$\boxed{1}$ cf. cours

$\boxed{2}$ $v_z(t) = -gt + v_0 \sin\alpha$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t$.

$\boxed{3}$ Le maximum est atteint lorsque $v_z = 0$ donc à l'instant $t_{\max} = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Pour que le ballon ait une chance de passer, il faut alors avoir

$$z(t_{\max}) > H \qquad \text{soit} \qquad -\frac{{v_0}^2 \sin^2\alpha}{2g} + \frac{{v_0}^2 \sin^2\alpha}{g} > H \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_0 > \sqrt{\frac{2gH}{\sin^2\alpha}}\,.}$$

Exercice 2 : Inversion du courant dans un circuit inductif



Cet exercice a pour objectif d'étudier la réponse d'un circuit inductif à l'inversion du sens du courant dans le circuit. Une bobine d'inductance L et une résistance R sont montées en parallèle avec une source idéale de courant imposant cette inversion, c'est-à-dire telle que

$$\eta = \begin{cases} -I_0 \text{ si } t < 0 \\ I_0 \text{ si } t \geq 0 \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad I_0 > 0\,.$$

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i et l'écrire sous forme canonique.

2 - Résoudre cette équation, et montrer que l'intensité s'écrit

$$i(t) = I_0\left(1 - 2\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.$$

3 - Tracer sur la même figure les chronogrammes de η et i en indiquant la valeur de τ.

4 - Rappeler l'expression de l'énergie E_L stockée dans la bobine. En déduire sans calcul d'intégrale la variation de cette énergie ΔE_L entre l'instant initial $t = 0$ et le régime asymptotique $t \to \infty$. Commenter.

5 - Tracer qualitativement l'allure de l'énergie stockée $E_L(t)$ en fonction du temps.

6 - Montrer que la puissance P_J dissipée par effet Joule dans la résistance R vaut

$$P_\mathrm{J} = 4\,R\,{I_0}^2\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}$$

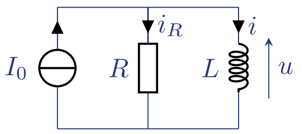
En déduire l'énergie totale dissipée Q_J.

7 - Exprimer la puissance instantanée P_g fournie par le générateur. En déduire en la calculant explicitement que l'énergie totale W_g fournie par la source sur l'ensemble de l'évolution est égale à celle dissipée par effet Joule.

8 - Résumer en quelques mots l'effet de l'inversion du courant dans le circuit du point de vue énergétique.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

1 Le schéma ci-dessous est tracé pour $t > 0$ avec $\eta = I_0$.



D'après la loi des nœuds,

$$I_0 = i_R + i$$

D'après la loi d'Ohm,

$$I_0 = \frac{u}{R} + i$$

Enfin, d'après la loi de comportement de la bobine,

$$I_0 = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i\,.$$

Sous forme canonique, l'équation devient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i = \frac{R}{L}I_0 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{L}{R}}$$

2

▷ **Forme générale des solutions :**
- → Solution particulière : second membre constant, donc solution particulière constante, donc $i_\mathrm{p} = I_0$.
- → Solution homogène : $i_\mathrm{h} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.
- → Conclusion : $i(t) = I_0 + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$

▷ **Condition initiale :**
- → Étude à $t = 0^-$: régime permanent continu, la bobine est analogue à un fil qui court-circuite la résistance R. Tout le courant imposé par le générateur traverse la bobine, donc

$$\boxed{i(0^-) = -I_0\,.}$$

- → Passage à $t = 0^+$: par continuité du courant dans la bobine,

$$i(0^+) = i(0^-) = -I_0\,.$$

▷ **Constante d'intégration :**

$$i(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A + I_0 \underbrace{=}_{\text{CI}} -I_0 \qquad \text{d'où} \qquad A = -2I_0$$

▷ **Conclusion :**

$$i(t) = I_0 - 2I_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{i(t) = I_0\left(1 - 2\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

3 Voir figure 1.

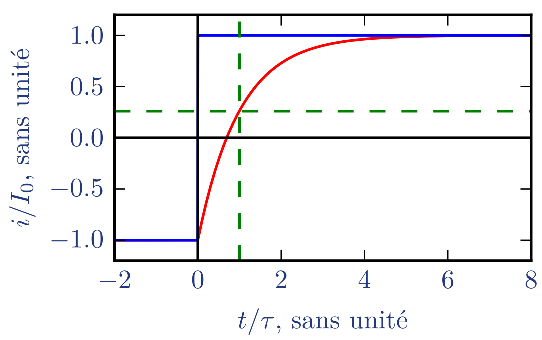


Figure 1 – Chronogrammes de η et i. Temps représenté en unités de τ, courants en unités de I_0. Sur une copie, il est assez efficace de déterminer τ à partir de la tangente initiale.

4 L'énergie stockée dans une bobine d'inductance L parcourue par un courant i vaut

$$\boxed{E_L = \frac{1}{2}Li^2\,.}$$

Ainsi,

$$\Delta E_L = \frac{1}{2} L \left[i(\infty)^2 - i(0)^2 \right] = \frac{1}{2} L \left[{I_0}^2 - (-I_0)^2 \right] \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta E_L = 0\,.}$$

L'énergie de la bobine **est la même au début et à la fin de l'évolution**, mais cela ne signifie pas qu'elle ne varie pas pendant celle-ci puisque le courant qui traverse la bobine s'inverse.

$\boxed{5}$ Voir figure 2.

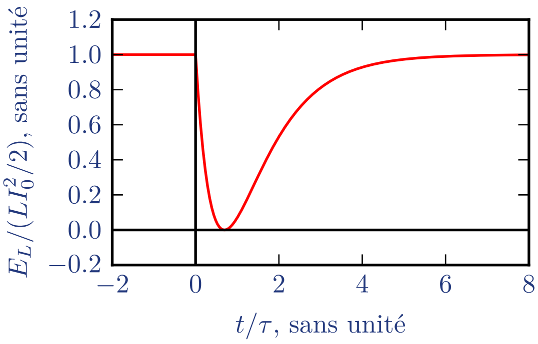


Figure 2 – Énergie stockée dans la bobine. Temps représenté en unités de τ, énergie en unités de $\frac{1}{2}L{I_0}^2$.

> *Points importants du tracé : l'énergie est toujours positive, part et finit à la même hauteur, et le passage par zéro est « doux », c'est-à-dire sans point anguleux (ce n'est pas une valeur absolue).*

$\boxed{6}$ La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance vaut

$$P_\mathrm{J} = R\, i_R^{\,2}$$

D'après la loi des nœuds,

$$P_\mathrm{J} = R\,(I_0 - i)^{\,2} = R\left(-2I_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_\mathrm{J} = 4\,R\,{I_0}^2\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}}$$

L'énergie totale dissipée s'en déduit par intégration entre $t = 0$ et $t \to \infty$,

$$Q_\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} 4\,R\,{I_0}^2\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = 4\,R\,{I_0}^2 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = 4\,R\,{I_0}^2 \left[-\frac{\tau}{2}\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}\right]_0^{+\infty}$$

Ainsi,

$$Q_\mathrm{J} = 2\,R\,{I_0}^2\,\tau \qquad \text{soit} \qquad \boxed{Q_\mathrm{J} = 2\,L\,{I_0}^2\,.}$$

$\boxed{7}$ La puissance fournie par le générateur pour $t > 0$ est $P_\mathrm{g} = u\,I_0$. Il y a un signe + car le générateur est orienté en convention générateur. Elle est nulle pour $t < 0$: le régime est permanent continu, la bobine est donc équivalente et la tension à ses bornes est nulle. La loi de comportement de la bobine et l'expression de i permettent d'écrire

$$P_\mathrm{g} = L\,I_0 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\,I_0\,\frac{2I_0}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = 2\,R\,{I_0}^2\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

Ainsi, l'énergie totale W_g fournie par la source de courant vaut

$$W_\mathrm{g} = \int_0^{+\infty} P_\mathrm{g}\,\mathrm{d}t = 2R{I_0}^2 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{d}t = 2R{I_0}^2 \left[-\tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]_0^{+\infty}$$

Ainsi,

$$W_\mathrm{g} = 2\,R\,{I_0}^2\,\tau \qquad \text{soit} \qquad W_\mathrm{g} = 2\,L\,{I_0}^2\,.$$

ce qui donne bien

$$\boxed{W_\mathrm{g} = Q_\mathrm{J}}$$

$\boxed{8}$ Inverser le courant dans le circuit n'entraîne qu'une dissipation d'énergie par effet Joule, l'énergie stockée dans la bobine ne variant globalement pas. Néanmoins, **ce bilan global ne décrit pas le bilan énergétique instantané**. On voit à partir des deux questions précédentes que les puissances fournie par le générateur et dissipée par effet Joule ne sont pas égales : l'égalité n'est vraie que pour les énergies totales. Dans une première phase, **la bobine libère l'énergie qu'elle avait stockée, et cette énergie est dissipée dans la résistance** : on voit que pour t suffisamment petit, $P_\mathrm{J} > P_\mathrm{g}$. Par ailleurs, dans cette première phase, toute la puissance fournie par le générateur est également dissipée. Vient ensuite une seconde phase où le sens du courant a bien été inversé et où **la bobine recommence à emmagasiner de l'énergie que lui fournit le générateur**. Cette fois, la puissance fournie par le générateur n'est que partiellement dissipée : on voit que pour t suffisamment grand, $P_\mathrm{J} < P_\mathrm{g}$.

Mécanique et transitoires électriques

Exercice 1 : Le drop de Dan Carter

À la 70e minute de la finale de la Coupe du Monde de rugby 2015, l'ouvreur néo-zélandais Dan Carter a remis son équipe sur la voie de la victoire en marquant un superbe drop. Pour les non-initiés, un drop consiste à taper le ballon au pied pour le faire passer entre les deux poteaux, au dessus d'une barre horizontale placée à 3 m au dessus du sol.

En analysant la vidéo, on peut estimer le joueur placé à une quarantaine de mètres des poteaux. Le ballon est envoyé avec un angle d'environ 40° par rapport au sol et passe à cinq mètres au dessus de la barre.

1 - Proposer une modélisation simple permettant d'étudier le mouvement du ballon, en indiquant explicitement les effets négligés.

2 - Définir avec précision un repérage adapté à la description du mouvement.

3 - Dans le cadre de cette modélisation, déterminer la loi horaire puis la trajectoire du ballon.

4 - En déduire la vitesse initialement donnée au ballon par Dan Carter.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Attention rédaction du corrigé à refaire pour l'adapter au début d'année.

Pour les amateurs de rugby ou ceux qui veulent découvrir ce qu'est un drop, la vidéo est disponible sur le lien `https://www.youtube.com/watch?v=gTmt_IB3Ya0`

Le système est le ballon, en mouvement par rapport au référentiel terrestre.

$\boxed{1}$ En première approximation, on peut considérer que le ballon est en chute libre sans frottement, c'est-à-dire en mouvement uniformément accéléré, d'accélération $\vec{a} = \vec{g}$. Cela revient à négliger les frottements de l'air sur le ballon et également tout effet dû à la rotation du ballon sur lui-même. Dans ce cadre, le mouvement du ballon sera décrit par la trajectoire de son centre de masse.

$\boxed{2}$ Le repérage naturel pour étudier un mouvement uniformément accéléré est un repérage cartésien dont une des directions, par exemple z, coïncide avec la direction de l'accélération et une deuxième direction, par exemple x, est définie telle que la vitesse initiale $\vec{v}_0$ du ballon soit incluse dans le plan (xOz). Comme le ballon part du niveau du sol, le plus naturel consiste à fixer l'origine du repère à la position initiale du ballon. On note alors $x = d$ la position des poteaux et $z = h$ la hauteur à laquelle se trouve le ballon au niveaux des poteaux. L'ensemble est récapitulé figure 1.

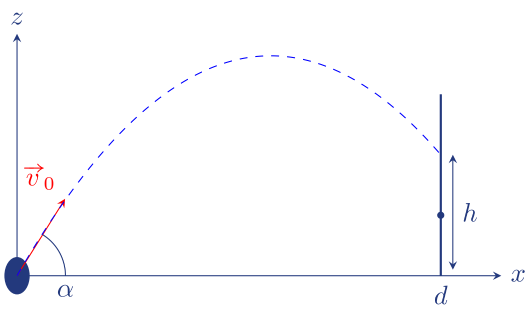


Figure 1 – Repérage pour décrire le drop.

$\boxed{3}$ Tout le calcul qui suit a été fait en cours. Il « suffit » d'intégrer correctement les équations du mouvement en tenant compte des conditions initiales. Plutôt que de le faire par composante comme en cours, utilisons directement ici l'intégration vectorielle. On note $\overrightarrow{OM}(t)$ le vecteur position du ballon à l'instant t. Comme

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{g} \qquad \text{alors} \qquad \vec{v} = \vec{g}\,t + \vec{C}$$

où la constante $\overrightarrow{C}$ se détermine à partir de la condition initiale $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{v}_0$, soit $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$. On intègre ensuite une seconde fois pour déterminer le vecteur position,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{g}\,t^2 + \overrightarrow{v}_0 t + \overrightarrow{C'}$$

où la nouvelle constante $\overrightarrow{C'}$ se détermine encore à partir de la condition initiale $\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{0}$, soit $\overrightarrow{C'} = \overrightarrow{0}$. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{g}\,t^2 + \overrightarrow{v}_0 t\,.}$$

On a ici la loi horaire, mais pas encore la trajectoire. Pour cela, il faut trouver l'équation $z(x)$ de la trajectoire en faisant disparaître le temps. Cette équation se trouve par l'intermédiaire des projections, en se rappelant que $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u}_z$, ce qui donne

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t = v_0 \cos\alpha\, t \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{0z} t = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

La projection sur x permet d'exprimer le temps t en fonction de x,

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}\,,$$

En remplaçant dans l'équation sur z, on trouve

$$z(x) = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + v_0\sin\alpha\,\frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

ce qui donne l'équation d'une parabole,

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha\, x\,.}$$

4 L'énoncé indique $\alpha = 40°$ et avec les notations introduites précédemment $z(d) = h$ avec $d = 40\,\mathrm{m}$ et $h = 3 + 5 = 8\,\mathrm{m}$. Il suffit d'injecter ces données dans l'équation de la trajectoire pour déterminer v_0,

$$h = -\frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}d^2 + \tan\alpha\, d$$

$$d\tan\alpha - h = \frac{g\,d^2}{2\cos^2\alpha}\,\frac{1}{v_0^2}$$

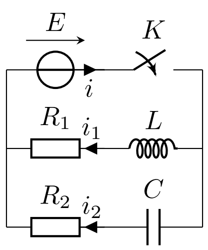
$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{g\,d^2}{2\cos^2\alpha\,(d\tan\alpha - h)}}}$$

Numériquement, on trouve

$$\boxed{v_0 = 23\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 82\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}$$

L'ordre de grandeur semble plutôt acceptable : une recherche indique que la vitesse typique d'un ballon en vol est de l'ordre de $50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, mais le ballon a été ralenti par frottements ... et Dan Carter n'est pas n'importe quel joueur.

Exercice 2 : Branches RC et RL en parallèle



L'interrupteur du circuit ci-contre est fermé à l'instant $t = 0$.

1 - Déterminer l'intensité i_1 pour $t > 0$.

2 - Même question pour i_2.

3 - À quelle condition le courant i peut-il rester constant ?

Éléments de correction de l'exercice 2 :

On se place à $t > 0$ avec interrupteur fermé.

1 Équation différentielle et forme canonique :

$$E = R_1 i_1 + u_L = R_1 i_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_1} i_1 = \frac{E}{L} \qquad \text{avec} \qquad \tau_1 = \frac{L}{R_1}\,.$$

Forme générale des solutions :

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1} + A_1\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}$$

Condition initiale : $i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0$ (car $i(0^-) = i_2(0^-) = 0$ car branches ouvertes)

Constante : $A_1 = -E/R_1$ d'où

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_1}\right)$$

2 Équation différentielle et forme canonique :

$$E = R_2 i_2 + u_C \qquad \text{donc} \qquad 0 = R_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{i_2}{C} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_2} i_2 = 0$$

Forme générale des solutions : $i_2(t) = A_2\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}$

Condition initiale : moins simple !

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \qquad \text{donc} \qquad E = R_2 i_2(0^+) + 0 \qquad \text{d'où} \qquad i_2(0^+) = \frac{E}{R_2}$$

Constante : $A_2 = E/R_2$ donc

$$i_2(t) = \frac{E}{R_2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}\,.$$

3

$$i = i_1 + i_2 = \frac{E}{R_2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2} + \frac{E}{R_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_1}\right) = \frac{E}{R_1} + E\left[\frac{\mathrm{e}^{-t/\tau_2}}{R_2} - \frac{\mathrm{e}^{-t/\tau_1}}{R_1}\right]$$

ce qui devient à tout instant

$$t\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right) = \ln\frac{R_2}{R_1}$$

possible seulement si $\tau_1 = \tau_2$ et si $R_2 = R_1$.