Colles semaine 12 – Sujet A — Langevin-Wallon, PTSI 2017-2018

Transitoires du premier ordre et oscillateur harmonique

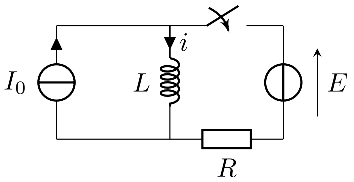
Question de cours

L'énergie mécanique d'un oscillateur masse-ressort à une dimension s'écrit dans un repérage « bien choisi »

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2} k (x - \ell_0)^2 \,.$$

Rappeler ce que représentent chaque terme et montrer que la solution $x(t) = \ell_0 + X_\mathrm{m} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est bien cohérente avec la conservation de l'énergie mécanique de l'oscillateur. On rappelle la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Exercice 1 : Bobine alimentée en courant et en tension



L'interrupteur du circuit ci-contre est fermé à l'instant $t = 0$.

1 - Pour $t > 0$, montrer que i vérifie l'équation différentielle

$$L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = RI_0 + E \,.$$

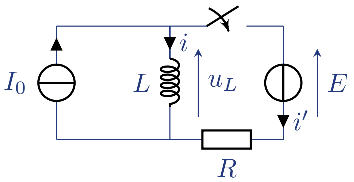
2 - Déterminer sa solution i_p en régime permanent asymptotique ($t \to \infty$) en raisonnant de deux façons différentes : à partir de l'équation différentielle et par équivalence de circuits.

3 - En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle.

4 - Justifier que $i(0^+) = I_0$.

5 - Déterminer la solution $i(t)$ et tracer son allure.

Éléments de correction de l'exercice 1 :



$\boxed{1}$ D'après la loi des mailles et la loi d'Ohm,

$$u_L = E + Ri'$$

Or $I_0 = i + i'$ d'après la loi des nœuds donc

$$u_L = E + R(I_0 - i)$$

et d'après la loi de comportement de la bobine,

$$L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E + R(I_0 - i)$$

ce qui donne bien

$$\boxed{L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E + RI_0 \,.}$$

$\boxed{2}$ Comme le forçage est constant alors la solution i_p en régime permanent est constante également. En injectant cette solution constante dans l'équation différentielle, on trouve

$$0 + Ri_\mathrm{p} = RI_0 + E \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{i_\mathrm{p} = I_0 + \frac{E}{R} \,.}$$

En régime continu, la bobine est équivalente à un fil donc la tension à ses bornes est nulle. On déduit de la loi des mailles

$$0 = E + Ri'_\mathrm{p} \qquad \text{donc} \qquad i'_\mathrm{p} = -\frac{E}{R}$$

La loi des nœuds donne alors le même résultat qu'avant (évidemment !)

$$\boxed{i_\mathrm{p} = I_0 + \frac{E}{R}\,.}$$

3 La forme canonique de l'équation différentielle est

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} i = \frac{RI_0}{L} + \frac{E}{L} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{L}{R}\,.$$

On connaît ses solutions homogènes $i_\mathrm{h} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, et on vient d'en déterminer une solution particulière, donc

$$\boxed{i(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + I_0 + \frac{E}{R}\,,}$$

où la constante A se détermine à partir des conditions initiales.

4 À l'instant $t = 0^-$, la branche contenant la source de tension est ouverte : aucun courant n'y circule. La loi des nœuds impose nécessairement

$$i(0^-) = I_0\,.$$

Comme le courant traversant une bobine est toujours continu, on en déduit

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = I_0\,.}$$

5 Déterminons A,

$$i(0^+) \underbrace{=}_{\text{CI}} I_0 \underbrace{=}_{\text{sol}} A + I_0 + \frac{E}{R} \qquad \text{d'où} \qquad A = -\frac{E}{R}\,,$$

et ainsi

$$i(t) = -\frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{R} + I_0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) + I_0\,.}$$

Courbe représentée figure 1.

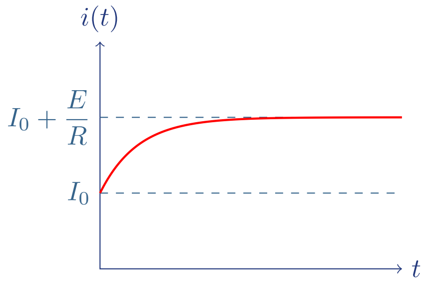
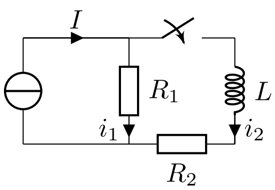


Figure 1 – Courbe représentative du courant $i(t)$.

Exercice 2 : Circuit RL à deux mailles



L'interrupteur du montage ci-contre est fermé à $t = 0$.

1 - Déterminer la valeur en $t = 0^+$ et en $t \to \infty$ des intensités i_1 et i_2.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par i_1.

3 - Résoudre cette équation.

4 - Exprimer la puissance instantanée dissipée par effet Joule dans le circuit.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

1 À $t = 0^-$, $i_2 = 0$ car branche ouverte. Comme i_2 traverse une bobine, alors $i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$. Puis d'après la loi des nœuds à $t = 0^+$,

$$i_1(0^+) = I - i_2(0^+) = I\,.$$

Quand $t \to \infty$ la bobine est équivalente à un fil et on a un pont diviseur de courant.

$$i_{1\infty} = \frac{\dfrac{1}{R_1}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \qquad \text{et} \qquad i_{2\infty} = \frac{\dfrac{1}{R_1}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

2 Application successive des lois de Kirchoff et de comportement :

$$I = i_1 + i_2 = i_1 + \frac{u_{R_2}}{R_2} = i_1 + \frac{u_{R_1} - u_L}{R_2} = i_1 + \frac{R_1}{R_2} i_1 - \frac{L}{R_2}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) i_1 - \frac{L}{R_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I - i_1)$$

ce qui amène finalement à

$$\frac{L}{R_2}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) i_1 = I$$

soit sous forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} i_1 = \frac{R_2}{L} I \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{L}{R_1 + R_2}\,.}$$

3 ▷ Forme générale : $i_1(t) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} I + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$

▷ Condition initiale : cf. avant ;

▷ Détermination de A :

$$i_1(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} \frac{R_2}{R_1 + R_2} I + A \underbrace{=}_{\text{sol}} I \qquad \text{d'où} \qquad A = I\left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

Cocnlusion :

$$\boxed{i(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} I\,.}$$

4 Pour simplifier on pose $\alpha = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$, ce qui donne

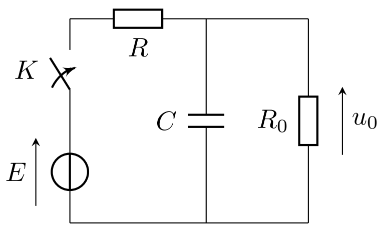
$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_\mathrm{J} &= R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 \\
&= R_1 \left[\alpha I\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + (1-\alpha) I\right]^2 + R_2 \left[I - \alpha I\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - (1-\alpha) I\right]^2 \\
&= R_1 \left[\alpha I\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + (1-\alpha) I\right]^2 + R_2 \left[-\alpha I\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \alpha I\right]^2
\end{aligned}$$

Transitoires du premier ordre et oscillateur harmonique

Question de cours

Établir l'équation du mouvement d'un oscillateur masse-ressort horizontal. L'écrire sous forme canonique.

Exercice 1 : Circuit avec résistances et condensateur



On s'intéresse à la charge d'un condensateur dans le circuit ci-contre soumis à un échelon de tension. L'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.

1 - Avant d'établir l'équation différentielle, on s'intéresse au régime permanent atteint une fois que l'interrupteur est fermé depuis suffisamment longtemps. Déterminer le courant dans chacune des branches du circuit et la tension u_0 aux bornes de la résistance R_0.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_0.

3 - Donner la forme générale de ses solutions en faisant apparaître une constante A. Quelle est la dimension de A ?

4 - Résoudre cette équation pour trouver la loi horaire $u_0(t)$. Tracer son allure.

5 - Calculer à tout instant la puissance fournie par le générateur. Quand est-elle maximale ? Même question pour la puissance dissipée par la résistance R_0. Expliquer qualitativement.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Régime permanent donc $i_C = 0$ puis raisonnement par équivalence de circuit donne

$$i_R = i_0 = \frac{E}{R+R_0} \qquad \text{et} \qquad u_0 = \frac{R_0}{R+R_0}\,E\,.$$

$\boxed{2}$ Loi des mailles à $t > 0$ et loi d'Ohm :

$$E = u_R + u_0 = R\,i_R + u_0$$

Loi des noeuds et lois de comportement (u_0 est aussi la tension aux bornes du condensateur) :

$$i_R = i_C + i_0 = C\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + \frac{u_0}{R_0}$$

Finalement,

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + \left(1+\frac{R}{R_0}\right)u_0$$

Forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}\left(1+\frac{R}{R_0}\right)u_0 = \frac{E}{RC}$$

$\boxed{3}$ Solution particulière = régime permanent asymptotique.

$$u_0(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{R_0}{R+R_0}\,E$$

A est une tension.

$\boxed{4}$ Condition initiale : $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ donc

$$u_0(t) = \frac{R_0}{R+R_0}\,E\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.$$

$\boxed{5}$ Courant i dans la branche du générateur :

$$i = \frac{E - u_0}{R} = \frac{R_0}{R(R + R_0)} E + \frac{1}{R + R_0} E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

Puissance fournie par le générateur : $\mathcal{P}_\mathrm{g} = E \times i$, maximale en $t = 0$.

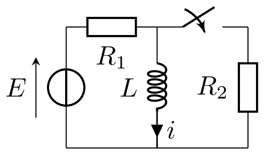
Puissance dissipée par R_0 :

$$\mathcal{P}_0 = \frac{u_0^2}{R_0}$$

maximale quand u_0 est maximale, donc lorsque $t \to \infty$.

Explication qualitative : au début de l'évolution, le condensateur emmagasine de l'énergie fournie par le générateur, ce qui n'est pas le cas à la fin.

Exercice 2 : Circuit RL à deux mailles



Considérons le circuit représenté ci-contre, dans lequel l'interrupteur, ouvert depuis très longtemps, est fermé à $t = 0$. Le générateur est un générateur de tension continue. On s'intéresse au courant traversant la bobine.

Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par le courant i.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

- ▷ Loi des nœuds : $i_1 = i + i_2$;
- ▷ Loi d'Ohm : $\dfrac{u_1}{R_1} = i + \dfrac{u_L}{R_2}$;
- ▷ Loi des mailles : $\dfrac{E - u_L}{R_1} = i + \dfrac{u_L}{R_2}$;
- ▷ Développement et loi de comportement : $\dfrac{E}{R_1} - \dfrac{L}{R_1}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = i + \dfrac{L}{R_2}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$;
- ▷ Forme canonique : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R_1 + R_2}{L\,R_1\,R_2}\,i = \dfrac{E}{R_1}$

Solution de la forme $i(t) = \dfrac{E}{R_1} + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Condition initiale : $i(0^+) = i(0^-) = E/R_1$ d'où $A = 0$.

Ainsi, fermer l'interrupteur ne modifie pas le courant dans le circuit.

Colles semaine 12 – Sujet C — Langevin-Wallon, PTSI 2017-2018

Transitoires du premier ordre et oscillateur harmonique

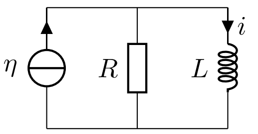
Question de cours

L'équation du mouvement d'un oscillateur masse-ressort horizontal s'écrit sous forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 X_{\text{éq}}\,.$$

À l'instant initial, $x(0) = 0$ et $v_x(0) = V_0$. Exprimer $x(t)$.

Exercice 1 : Inversion du courant dans un circuit inductif



Cet exercice a pour objectif d'étudier la réponse d'un circuit inductif à l'inversion du sens du courant dans le circuit. Une bobine d'inductance L et une résistance R sont montées en parallèle avec une source idéale de courant imposant cette inversion, c'est-à-dire telle que

$$\eta = \begin{cases} -I_0 \text{ si } t < 0 \\ I_0 \text{ si } t \geq 0 \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad I_0 > 0\,.$$

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i et l'écrire sous forme canonique.

2 - Résoudre cette équation, et montrer que l'intensité s'écrit

$$i(t) = I_0 \left(1 - 2\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.$$

3 - Tracer sur la même figure les chronogrammes de η et i en indiquant la valeur de τ.

4 - Rappeler l'expression de l'énergie E_L stockée dans la bobine. En déduire sans calcul d'intégrale la variation de cette énergie ΔE_L entre l'instant initial $t = 0$ et le régime asymptotique $t \to \infty$. Commenter.

5 - Tracer qualitativement l'allure de l'énergie stockée $E_L(t)$ en fonction du temps.

6 - Montrer que la puissance P_J dissipée par effet Joule dans la résistance R vaut

$$P_\mathrm{J} = 4\,R\,{I_0}^2\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}$$

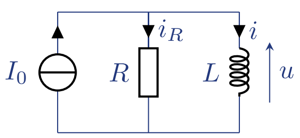
En déduire l'énergie totale dissipée Q_J.

7 - Exprimer la puissance instantanée P_g fournie par le générateur. En déduire en la calculant explicitement que l'énergie totale W_g fournie par la source sur l'ensemble de l'évolution est égale à celle dissipée par effet Joule.

8 - Résumer en quelques mots l'effet de l'inversion du courant dans le circuit du point de vue énergétique.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Le schéma ci-dessous est tracé pour $t > 0$ avec $\eta = I_0$.



D'après la loi des nœuds,

$$I_0 = i_R + i$$

D'après la loi d'Ohm,

$$I_0 = \frac{u}{R} + i$$

Enfin, d'après la loi de comportement de la bobine,

$$I_0 = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i\,.$$

Sous forme canonique, l'équation devient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} i = \frac{R}{L} I_0 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{L}{R}}$$

2

▷ **Forme générale des solutions :**

→ Solution particulière : second membre constant, donc solution particulière constante, donc $i_\mathrm{p} = I_0$.

→ Solution homogène : $i_\mathrm{h} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

→ Conclusion : $i(t) = I_0 + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$

▷ **Condition initiale :**

→ Étude à $t = 0^-$: régime permanent continu, la bobine est analogue à un fil qui court-circuite la résistance R. Tout le courant imposé par le générateur traverse la bobine, donc

$$\boxed{i(0^-) = -I_0\,.}$$

→ Passage à $t = 0^+$: par continuité du courant dans la bobine,

$$i(0^+) = i(0^-) = -I_0\,.$$

▷ **Constante d'intégration :**

$$i(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A + I_0 \underbrace{=}_{\text{CI}} -I_0 \qquad \text{d'où} \qquad A = -2I_0$$

▷ **Conclusion :**

$$i(t) = I_0 - 2I_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{i(t) = I_0\left(1 - 2\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

3 Voir figure 1.

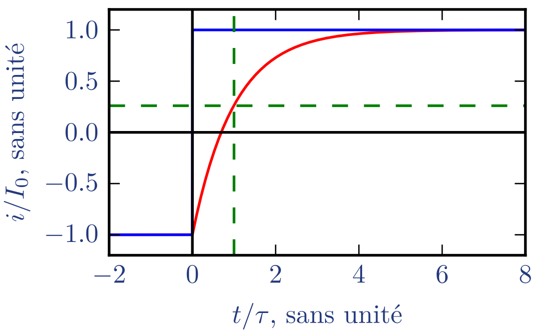


Figure 1 – Chronogrammes de η et i. Temps représenté en unités de τ, courants en unités de I_0. Sur une copie, il est assez efficace de déterminer τ à partir de la tangente initiale.

4 L'énergie stockée dans une bobine d'inductance L parcourue par un courant i vaut

$$\boxed{E_L = \frac{1}{2} L i^2\,.}$$

Ainsi,

$$\Delta E_L = \frac{1}{2} L \left[i(\infty)^2 - i(0)^2\right] = \frac{1}{2} L \left[I_0^2 - (-I_0)^2\right] \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta E_L = 0\,.}$$

L'énergie de la bobine **est la même au début et à la fin de l'évolution**, mais cela ne signifie pas qu'elle ne varie pas pendant celle-ci puisque le courant qui traverse la bobine s'inverse.

5 Voir figure 2.

> *Points importants du tracé : l'énergie est toujours positive, part et finit à la même hauteur, et le passage par zéro est « doux », c'est-à-dire sans point anguleux (ce n'est pas une valeur absolue).*

6 La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance vaut

$$P_\mathrm{J} = R\,i_R^{\,2}$$

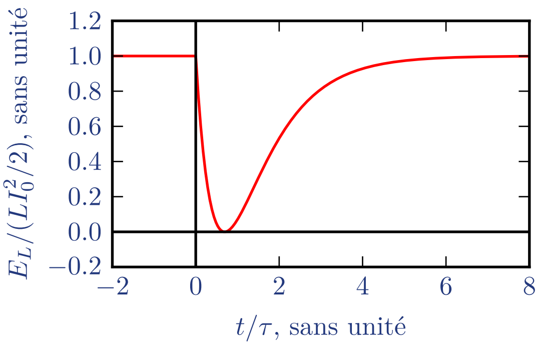


Figure 2 – **Énergie stockée dans la bobine.** Temps représenté en unités de τ, énergie en unités de $\frac{1}{2}LI_0{}^2$.

D'après la loi des nœuds,

$$P_\mathrm{J} = R\,(I_0 - i)^{\,2} = R\left(-2I_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_\mathrm{J} = 4\,R\,I_0{}^2\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}}$$

L'énergie totale dissipée s'en déduit par intégration entre $t = 0$ et $t \to \infty$,

$$Q_\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} 4\,R\,I_0{}^2\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = 4\,R\,I_0{}^2 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = 4\,R\,I_0{}^2 \left[-\frac{\tau}{2}\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}\right]_0^{+\infty}$$

Ainsi,

$$Q_\mathrm{J} = 2\,R\,I_0{}^2\,\tau \qquad \text{soit} \qquad \boxed{Q_\mathrm{J} = 2\,L\,I_0{}^2\,.}$$

$\boxed{7}$ La puissance fournie par le générateur pour $t > 0$ est $P_\mathrm{g} = u\,I_0$. Il y a un signe + car le générateur est orienté en convention générateur. Elle est nulle pour $t < 0$: le régime est permanent continu, la bobine est donc équivalente et la tension à ses bornes est nulle. La loi de comportement de la bobine et l'expression de i permettent d'écrire

$$P_\mathrm{g} = L\,I_0 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\,I_0\,\frac{2I_0}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = 2\,R\,I_0{}^2\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

Ainsi, l'énergie totale W_g fournie par la source de courant vaut

$$W_\mathrm{g} = \int_0^{+\infty} P_\mathrm{g}\,\mathrm{d}t = 2RI_0{}^2 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{d}t = 2RI_0{}^2\left[-\tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]_0^{+\infty}$$

Ainsi,

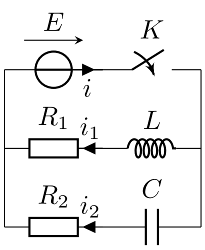
$$W_\mathrm{g} = 2\,R\,I_0{}^2\,\tau \qquad \text{soit} \qquad W_\mathrm{g} = 2\,L\,I_0{}^2\,.$$

ce qui donne bien

$$\boxed{W_\mathrm{g} = Q_\mathrm{J}}$$

$\boxed{8}$ Inverser le courant dans le circuit n'entraîne qu'une dissipation d'énergie par effet Joule, l'énergie stockée dans la bobine ne variant globalement pas. Néanmoins, **ce bilan global ne décrit pas le bilan énergétique instantané**. On voit à partir des deux questions précédentes que les puissances fournie par le générateur et dissipée par effet Joule ne sont pas égales : l'égalité n'est vraie que pour les énergies totales. Dans une première phase, **la bobine libère l'énergie qu'elle avait stockée, et cette énergie est dissipée dans la résistance** : on voit que pour t suffisamment petit, $P_\mathrm{J} > P_\mathrm{g}$. Par ailleurs, dans cette première phase, toute la puissance fournie par le générateur est également dissipée. Vient ensuite une seconde phase où le sens du courant a bien été inversé et où **la bobine recommence à emmagasiner de l'énergie que lui fournit le générateur**. Cette fois, la puissance fournie par le générateur n'est que partiellement dissipée : on voit que pour t suffisamment grand, $P_\mathrm{J} < P_\mathrm{g}$.

Exercice 2 : Branches RC et RL en parallèle



L'interrupteur du circuit ci-contre est fermé à l'instant $t = 0$.

1 - Déterminer l'intensité i_1 pour $t > 0$.

2 - Même question pour i_2.

3 - À quelle condition le courant i peut-il rester constant ?

Éléments de correction de l'exercice 2 :

On se place à $t > 0$ avec interrupteur fermé.

1 Équation différentielle et forme canonique :

$$E = R_1 i_1 + u_L = R_1 i_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_1} i_1 = \frac{E}{L} \qquad \text{avec} \qquad \tau_1 = \frac{L}{R_1}\,.$$

Forme générale des solutions :

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1} + A_1\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}$$

Condition initiale : $i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0$ (car $i(0^-) = i_2(0^-) = 0$ car branches ouvertes)

Constante : $A_1 = -E/R_1$ d'où

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_1}\right)$$

2 Équation différentielle et forme canonique :

$$E = R_2 i_2 + u_C \qquad \text{donc} \qquad 0 = R_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{i_2}{C} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_2} i_2 = 0$$

Forme générale des solutions : $i_2(t) = A_2\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}$

Condition initiale : moins simple !

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \qquad \text{donc} \qquad E = R_2 i_2(0^+) + 0 \qquad \text{d'où} \qquad i_2(0^+) = \frac{E}{R_2}$$

Constante : $A_2 = E/R_2$ donc

$$i_2(t) = \frac{E}{R_2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}\,.$$

3

$$i = i_1 + i_2 = \frac{E}{R_2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2} + \frac{E}{R_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_1}\right) = \frac{E}{R_1} + E\left[\frac{\mathrm{e}^{-t/\tau_2}}{R_2} - \frac{\mathrm{e}^{-t/\tau_1}}{R_1}\right]$$

ce qui devient à tout instant

$$t\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right) = \ln\frac{R_2}{R_1}$$

possible seulement si $\tau_1 = \tau_2$ et si $R_2 = R_1$.