Transitoires et oscillateur harmonique

Question de cours

Rappeler sans démonstration l'expression de la pulsation propre et du facteur de qualité d'un circuit RLC série.

Exercice 1 : Mesurer la masse d'un astronaute sur l'ISS

Les astronautes passant plusieurs mois dans la station spatiale internationale (ISS) doivent se soumettre à des bilans de santé très réguliers, et en particulier vérifier qu'ils ne perdent ni ne prennent de poids. Néanmoins, l'absence de gravité rend les balances terrestres inopérantes dans l'espace. Pour permettre des pesées malgré cela, un dispositif original a été développé par l'agence spatiale russe, dont une photographie est présentée ci-contre. Il s'agit d'une chaise de masse $m_0 = 25{,}0\,\mathrm{kg}$ attachée à l'extrémité d'un ressort. L'autre extrémité du ressort est attachée à un point fixe de la station.

On note L_0 la longueur naturelle du ressort et k sa constante de raideur. La position de la chaise est repérée par son point d'attache au ressort, le long d'un axe (Ox) dont l'origine est définie telle que le point d'attache de la chaise se trouve en $x = 0$ lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur naturelle.

On cherche dans un premier temps à mesurer la constante de raideur k du ressort. Pour cela, la chaise **vide** est mise en mouvement et on mesure la période $T_0 = 1{,}28\,\mathrm{s}$ de ses oscillations.

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ de la chaise.

2 - En déduire que la constante de raideur k s'exprime en fonction de la période T_0 et de la masse m_0 par

$$k = 4\pi^2 \frac{m_0}{T_0^2}\,.$$

3 - Calculer sa valeur numérique.

On s'intéresse maintenant à la pesée proprement dite d'un astronaute dont on veut déterminer la masse m_{ast}. Celui-ci s'assoit sur la chaise et la met en mouvement. Les oscillations ont alors pour période $T_{\text{ast}} = 2{,}34\,\mathrm{s}$.

4 - Donner **sans calcul** l'équation différentielle vérifiée par la position du point d'attache de la chaise lorsqu'un astronaute est assis.

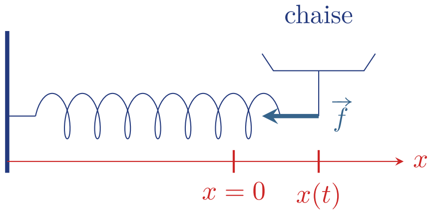
5 - En déduire que la masse de l'astronaute vaut

$$m_{\text{ast}} = m_0 \left[\left(\frac{T_{\text{ast}}}{T_0} \right)^2 - 1 \right]$$

6 - Calculer sa valeur numérique.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Le schéma est fait à un instant où le ressort est étendu : sa longueur est supérieure à sa longueur à vide.



$\boxed{1}$ On étudie le système « chaise vide », en évolution dans le référentiel lié à l'ISS que l'on considère galiléen. En apesanteur, il n'y a pas de poids et donc ici pas de réaction du support. La chaise est donc soumise uniquement à la force de rappel $\vec{f}$ exercée par le ressort, valant ici

$$\vec{f} = -kx\,\vec{e}_x$$

car ici l'allongement du ressort est directement x ($x = 0$ correspond à la longueur à vide) et le vecteur unitaire sortant du ressort est $+\overrightarrow{e}_x$. La quantité de mouvement de la chaise vaut $\overrightarrow{p} = m_0 \overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e}_x$ est le vecteur vitesse de la chaise. D'après la loi de la quantité de mouvement,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{f} \qquad \text{soit} \qquad m_0 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e}_x = -kx\,\overrightarrow{e}_x\,.$$

Projeter cette équation sur l'axe x conduit à l'équation différentielle voulue

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m_0}x = 0}$$

2 Le résultat de la question précédente est presque donné sous forme canonique. On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}}$$

Les oscillations se font à la pulsation propre ω_0. La période propre s'en déduit par

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}}\,.$$

On en déduit

$$T_0{}^2 = 4\pi^2\frac{m_0}{k} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{k = 4\pi^2\frac{m_0}{T_0{}^2}}$$

3 Les deux données le sont avec trois chiffres significatifs, le résultat du produit doit donc en avoir autant, soit

$$\boxed{k = 602\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}}$$

4 Lorsqu'un astronaute de masse m_{ast} s'assoit sur la chaise, la masse attachée au ressort et mise en mouvement n'est plus seulement la masse de la chaise m_0 mais la somme $m_0 + m_{\mathrm{ast}}$. Par conséquent, l'équation différentielle est la même que celle obtenue à la question 1 en remplaçant m_0 par $m_0 + m_{\mathrm{ast}}$, soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m_0 + m_{\mathrm{ast}}}x = 0}$$

5 La pulsation propre ω_{ast} et la période propre T_{ast} valent respectivement

$$\boxed{\omega_{\mathrm{ast}} = \sqrt{\frac{k}{m_0 + m_{\mathrm{ast}}}} \qquad \text{et} \qquad T_{\mathrm{ast}} = \frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{ast}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 + m_{\mathrm{ast}}}{k}}}$$

Commençons par calculer le rapport T_{ast}/T_0,

$$\frac{T_{\mathrm{ast}}}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m_0+m_{\mathrm{ast}}}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}}} = \sqrt{\frac{m_0 + m_{\mathrm{ast}}}{m_0}}$$

en simplifiant par $\sqrt{k}$ et en réécrivant la fraction. Ainsi,

$$\left(\frac{T_{\mathrm{ast}}}{T_0}\right)^2 = \frac{m_0 + m_{\mathrm{ast}}}{m_0} = 1 + \frac{m_{\mathrm{ast}}}{m_0}$$

donc

$$\frac{m_{\mathrm{ast}}}{m_0} = \left(\frac{T_{\mathrm{ast}}}{T_0}\right)^2 - 1$$

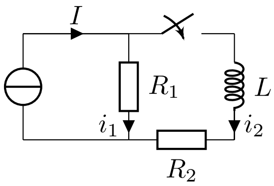
d'où on trouve le résultat voulu

$$\boxed{m_{\mathrm{ast}} = m_0\left[\left(\frac{T_{\mathrm{ast}}}{T_0}\right)^2 - 1\right]}$$

6 Toutes les valeurs mesurées sont à nouveau données avec trois chiffres significatifs, d'où on déduit la masse de l'astronaute

$$\boxed{m_{\mathrm{ast}} = 58{,}6\,\mathrm{kg}}$$

Exercice 2 : Circuit RL à deux mailles



L'interrupteur du montage ci-contre est fermé à $t = 0$.

1 - Déterminer la valeur en $t = 0^+$ et en $t \to \infty$ des intensités i_1 et i_2.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par i_1.

3 - Résoudre cette équation.

4 - Exprimer la puissance instantanée dissipée par effet Joule dans le circuit.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

1 À $t = 0^-$, $i_2 = 0$ car branche ouverte. Comme i_2 traverse une bobine, alors $i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$. Puis d'après la loi des nœuds à $t = 0^+$,

$$i_1(0^+) = I - i_2(0^+) = I\,.$$

Quand $t \to \infty$ la bobine est équivalente à un fil et on a un pont diviseur de courant.

$$i_{1\infty} = \frac{\dfrac{1}{R_1}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \qquad \text{et} \qquad i_{2\infty} = \frac{\dfrac{1}{R_1}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

2 Application successive des lois de Kirchoff et de comportement :

$$I = i_1 + i_2 = i_1 + \frac{u_{R_2}}{R_2} = i_1 + \frac{u_{R_1} - u_L}{R_2} = i_1 + \frac{R_1}{R_2} i_1 - \frac{L}{R_2}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) i_1 - \frac{L}{R_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I - i_1)$$

ce qui amène finalement à

$$\frac{L}{R_2}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) i_1 = I$$

soit sous forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} i_1 = \frac{R_2}{L} I \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{L}{R_1 + R_2}\,.}$$

3 ▷ Forme générale : $i_1(t) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} I + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$

▷ Condition initiale : cf. avant ;

▷ Détermination de A :

$$i_1(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} \frac{R_2}{R_1 + R_2} I + A \underbrace{=}_{\text{sol}} I \qquad \text{d'où} \qquad A = I\left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

Cocnlusion :

$$\boxed{i(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} I\,.}$$

4 Pour simplifier on pose $\alpha = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_\mathrm{J} &= R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 \\
&= R_1 \left[\alpha I\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + (1 - \alpha) I\right]^2 + R_2 \left[I - \alpha I\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - (1 - \alpha) I\right]^2 \\
&= R_1 \left[\alpha I\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + (1 - \alpha) I\right]^2 + R_2 \left[-\alpha I\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \alpha I\right]^2
\end{aligned}$$

Transitoires et oscillateur harmonique

Question de cours

Écrire sans démonstration la forme canonique d'une équation différentielle d'oscillateur amorti. Lister les différentes formes que peuvent prendre ses solutions en fonction de la valeur du facteur de qualité. Les expliquer brièvement mais sans démontrer.

Exercice 1 : Monoxyde de carbone

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux atomes de masses m_1 et m_2, reliés par un pseudo-ressort de raideur k et longueur à vide L_0, libres de se déplacer à une dimension le long d'un axe (Ox). La position de l'atome d'oxygène (respectivement carbone) est repérée par l'abscisse x_1 (respectivement x_2), avec $x_2 > x_1 > 0$.

On suppose les deux atomes initialement immobiles et on note leurs positions x_1^0 et x_2^0. Tout au long de l'exercice, le poids des deux atomes sera négligé.

1 - Effectuer un bilan des forces sur l'atome d'oxygène et établir l'équation différentielle de son mouvement.

2 - Effectuer de même un bilan des forces sur l'atome de carbone et établir l'équation différentielle de son mouvement.

Ces deux équations sont couplées : le mouvement d'un atome dépend du mouvement de l'autre. On introduit deux nouvelles variables,

$$S = m_1\,x_1 + m_2\,x_2 \qquad \text{et} \qquad D = x_2 - x_1\,.$$

3 - Quelles sont les équations différentielles satisfaites par S et D ? Sont-elles couplées ?

4 - Résoudre ces équations compte tenu des conditions initiales.

5 - En déduire les expressions de x_1 et x_2.

6 - Quelle est la période des oscillations de la molécule ? Dans le cas où l'un des deux atomes est beaucoup plus lourd que l'autre, quel résultat retrouve-t-on ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Longueur du ressort : $x_2 - x_1$, et sur l'atome 1 $\vec{u}_s = -\vec{u}_x$ d'où par le PFD

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}\vec{u}_x = -k\,(x_2 - x_1 - \ell_0)\,(-\vec{u}_x) = k(x_2 - x_1 - \ell_0)\vec{u}_x\,.$$

que l'on projette pour conclure.

$\boxed{2}$ Même chose sauf que pour l'atome 2 $\vec{u}_s = +\vec{u}_x$ d'où

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2}\vec{u}_x = -k\,(x_2 - x_1 - \ell_0)\,\vec{u}_x\,.$$

que l'on projette pour conclure.

$\boxed{3}$ Le plus simple est de calculer directement les dérivées secondes et de réinjecter les expressions obtenues aux questions précédentes.

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2} = m_1 \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + m_2 \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = k(x_2 - x_1 - \ell_0) - k(x_2 - x_1 - \ell_0) = 0$$

puis pour D :

$$\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m_2}\,(x_2 - x_1 - \ell_0) - \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1 - \ell_0) = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(D - \ell_0)$$

ce qui s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{\mu}D = \frac{k}{\mu}\ell_0$$

avec $\mu = (m_1 + m_2)/m_1 m_2$. Équations découplées.

4 Pour S, on raisonne par intégrations successives en déterminant les constantes avec les conditions initiales.

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = A \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} A \underbrace{=}_{\text{CI}} 0$$

puis

$$S = B \qquad \text{et} \qquad S(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} B \underbrace{=}_{\text{CI}} m_1 x_1^0 + m_2 x_2^0\,.$$

d'où finalement

$$\boxed{S = m_1 x_1^0 + m_2 x_2^0\,.}$$

Pour D c'est une équation d'oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$, résolution identique au cours, il reste à la fin

$$D(t) = \ell_0 + (x_2^0 - x_1^0 - \ell_0)\cos(\omega_0 t)\,.$$

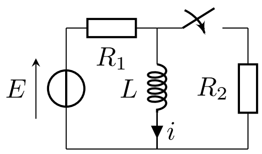
5 Combinaisons dans un système linéaire pour exprimer $x_{1,2}$ en fct de S, D.

$$x_1 = \frac{S}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} D \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{S}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} D$$

On peut ensuite remplacer pour avoir des expressions explicites.

6 La période des oscillations est $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Dans le cas $m_1 \gg m_2$ alors $\omega_0 \simeq \sqrt{\frac{k}{m_2}}$ donc $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$. L'objet le plus lourd ne se déplace presque pas et se comporte comme un bâti immobile.

Exercice 2 : Circuit RL à deux mailles



Considérons le circuit représenté ci-contre, dans lequel l'interrupteur, ouvert depuis très longtemps, est fermé à $t = 0$. Le générateur est un générateur de tension continue. On s'intéresse au courant traversant la bobine.

Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par le courant i.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

- ▷ Loi des nœuds : $i_1 = i + i_2$;
- ▷ Loi d'Ohm : $\dfrac{u_1}{R_1} = i + \dfrac{u_L}{R_2}$;
- ▷ Loi des mailles : $\dfrac{E - u_L}{R_1} = i + \dfrac{u_L}{R_2}$;
- ▷ Développement et loi de comportement : $\dfrac{E}{R_1} - \dfrac{L}{R_1}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = i + \dfrac{L}{R_2}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$;
- ▷ Forme canonique : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R_1 + R_2}{L\,R_1\,R_2}\,i = \dfrac{E}{R_1}$

Solution de la forme $i(t) = \dfrac{E}{R_1} + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Condition initiale : $i(0^+) = i(0^-) = E/R_1$ d'où $A = 0$.

Ainsi, fermer l'interrupteur ne modifie pas le courant dans le circuit.

Transitoires et oscillateur harmonique

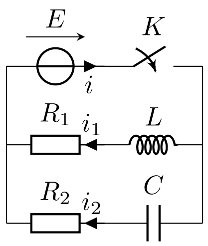
Question de cours

L'énergie mécanique d'un oscillateur masse-ressort à une dimension s'écrit dans un repérage « bien choisi »

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2} k (x - \ell_0)^2 \,.$$

Rappeler ce que représentent chaque terme et montrer que la solution $x(t) = \ell_0 + X_{\mathrm{m}} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est bien cohérente avec la conservation de l'énergie mécanique de l'oscillateur. On rappelle la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Exercice 1 : Branches RC et RL en parallèle



L'interrupteur du circuit ci-contre est fermé à l'instant $t = 0$.

1 - Déterminer l'intensité i_1 pour $t > 0$.

2 - Même question pour i_2.

3 - À quelle condition le courant i peut-il rester constant ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

On se place à $t > 0$ avec interrupteur fermé.

$\boxed{1}$ Équation différentielle et forme canonique :

$$E = R_1 i_1 + u_L = R_1 i_1 + L \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_1} i_1 = \frac{E}{L} \qquad \text{avec} \qquad \tau_1 = \frac{L}{R_1} \,.$$

Forme générale des solutions :

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1} + A_1 \,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}$$

Condition initiale : $i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0$ (car $i(0^-) = i_2(0^-) = 0$ car branches ouvertes)

Constante : $A_1 = -E/R_1$ d'où

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1} \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_1}\right)$$

$\boxed{2}$ Équation différentielle et forme canonique :

$$E = R_2 i_2 + u_C \qquad \text{donc} \qquad 0 = R_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{i_2}{C} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_2} i_2 = 0$$

Forme générale des solutions : $i_2(t) = A_2 \,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}$

Condition initiale : moins simple !

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \qquad \text{donc} \qquad E = R_2 i_2(0^+) + 0 \qquad \text{d'où} \qquad i_2(0^+) = \frac{E}{R_2}$$

Constante : $A_2 = E/R_2$ donc

$$i_2(t) = \frac{E}{R_2} \,\mathrm{e}^{-t/\tau_2} \,.$$

$\boxed{3}$

$$i = i_1 + i_2 = \frac{E}{R_2} \mathrm{e}^{-t/\tau_2} + \frac{E}{R_1} \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_1}\right) = \frac{E}{R_1} + E \left[\frac{\mathrm{e}^{-t/\tau_2}}{R_2} - \frac{\mathrm{e}^{-t/\tau_1}}{R_1}\right]$$

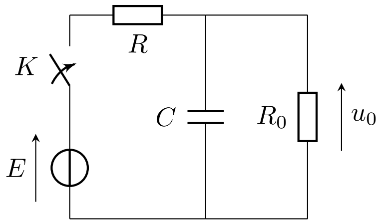
ce qui devient à tout instant

$$t \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right) = \ln \frac{R_2}{R_1}$$

possible seulement si $\tau_1 = \tau_2$ et si $R_2 = R_1$.

Étienne Thibierge, 12 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 2 : Circuit avec résistances et condensateur



On s'intéresse à la charge d'un condensateur dans le circuit ci-contre soumis à un échelon de tension. L'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.

1 - Avant d'établir l'équation différentielle, on s'intéresse au régime permanent atteint une fois que l'interrupteur est fermé depuis suffisamment longtemps. Déterminer le courant dans chacune des branches du circuit et la tension u_0 aux bornes de la résistance R_0.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_0.

3 - Donner la forme générale de ses solutions en faisant apparaître une constante A. Quelle est la dimension de A ?

4 - Résoudre cette équation pour trouver la loi horaire $u_0(t)$. Tracer son allure.

5 - Calculer à tout instant la puissance fournie par le générateur. Quand est-elle maximale ? Même question pour la puissance dissipée par la résistance R_0. Expliquer qualitativement.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

1 Régime permanent donc $i_C = 0$ puis raisonnement par équivalence de circuit donne

$$i_R = i_0 = \frac{E}{R+R_0} \qquad \text{et} \qquad u_0 = \frac{R_0}{R+R_0}\,E\,.$$

2 Loi des mailles à $t > 0$ et loi d'Ohm :

$$E = u_R + u_0 = R\,i_R + u_0$$

Loi des noeuds et lois de comportement (u_0 est aussi la tension aux bornes du condensateur) :

$$i_R = i_C + i_0 = C\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + \frac{u_0}{R_0}$$

Finalement,

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right) u_0$$

Forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}\left(1 + \frac{R}{R_0}\right) u_0 = \frac{E}{RC}$$

3 Solution particulière = régime permanent asymptotique.

$$u_0(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{R_0}{R+R_0}\,E$$

A est une tension.

4 Condition initiale : $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ donc

$$u_0(t) = \frac{R_0}{R+R_0}\,E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.$$

5 Courant i dans la branche du générateur :

$$i = \frac{E-u_0}{R} = \frac{R_0}{R(R+R_0)}E + \frac{1}{R+R_0}E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

Puissance fournie par le générateur : $\mathcal{P}_\mathrm{g} = E \times i$, maximale en $t = 0$.

Puissance dissipée par R_0 :

$$\mathcal{P}_0 = \frac{{u_0}^2}{R_0}$$

maximale quand u_0 est maximale, donc lorsque $t \to \infty$.

Explication qualitative : au début de l'évolution, le condensateur emmagasine de l'énergie fournie par le générateur, ce qui n'est pas le cas à la fin.