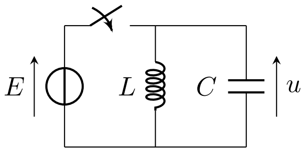
Oscillateurs

Question de cours

Expliquer l'origine physique du moment dipolaire et l'illustrer sur un exemple de votre choix.

Exercice 1 : Circuit LC et générateur réel



Considérons le circuit représenté ci-contre, où l'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$ et où le condensateur est initialement déchargé. La bobine a une inductance de 10 mH et le condensateur une capacité de 10 nF.

1 - Pour décrire le circuit, il n'est pas possible de considérer le générateur idéal. Justifier.

2 - Rappeler la modélisation de Thévenin d'un générateur, et faire un schéma du circuit en remplaçant le générateur par son modèle de Thévenin.

3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u.

4 - Déterminer le type de régime et la résoudre complètement, mais sans chercher à exprimer les constantes d'intégration.

5 - Tracer l'allure de u.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Le condensateur ne peut pas supporter la discontinuité de tension qu'imposerait la fermeture de l'interrupteur avec un générateur idéal.

$\boxed{2}$ Association d'une source idéale de tension et d'une résistance R.

$\boxed{3}$ Dans l'ordre :
- ▷ Loi des mailles : $E = u_R + u$;
- ▷ Loi d'Ohm puis loi des nœuds : $E = R(i_C + i_L) + u$;
- ▷ Dérivation : $0 = R\dfrac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t} + R\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$;
- ▷ Lois de comportement : $0 = RC\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}u + \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$;
- ▷ Forme canonique : $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}u = 0.$

d'où par identification

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{et} \qquad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}\,.$$

$\boxed{4}$ Conditions initiales : on a immédiatement $u(0^+) = 0$ par continuité. La dérivée $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$ est plus compliqué à exprimer, il faut pour cela exprimer $i_C(0^+)$. Par continuité du courant dans la bobine, $i_L(0^+) = 0$ donc $i_C(0^+) = i_R(0^+)$. On exprime alors $i_R(0^+)$ via la loi d'Ohm sachant que $u(0^+) = 0$. Finalement,

$$i_C(0^+) = \frac{E}{R} \qquad \text{d'où} \qquad u(0^+) = \frac{E}{RC}\,.$$

Cf. cours pour la suite.

Étienne Thibierge, 24 janvier 2018, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 2 : Mesurer la masse d'un astronaute sur l'ISS

Les astronautes passant plusieurs mois dans la station spatiale internationale (ISS) doivent se soumettre à des bilans de santé très réguliers, et en particulier vérifier qu'ils ne perdent ni ne prennent de poids. Néanmoins, l'absence de gravité rend les balances terrestres inopérantes dans l'espace. Pour permettre des pesées malgré cela, un dispositif original a été développé par l'agence spatiale russe, dont une photographie est présentée ci-contre. Il s'agit d'une chaise de masse $m_0 = 25{,}0\,\mathrm{kg}$ attachée à l'extrémité d'un ressort. L'autre extrémité du ressort est attachée à un point fixe de la station.

On note L_0 la longueur naturelle du ressort et k sa constante de raideur. La position de la chaise est repérée par son point d'attache au ressort, le long d'un axe (Ox) dont l'origine est définie telle que le point d'attache de la chaise se trouve en $x = 0$ lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur naturelle.

On cherche dans un premier temps à mesurer la constante de raideur k du ressort. Pour cela, la chaise **vide** est mise en mouvement et on mesure la période $T_0 = 1{,}28\,\mathrm{s}$ de ses oscillations.

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ de la chaise.

2 - En déduire que la constante de raideur k s'exprime en fonction de la période T_0 et de la masse m_0 par

$$k = 4\pi^2 \frac{m_0}{{T_0}^2}\,.$$

3 - Calculer sa valeur numérique.

On s'intéresse maintenant à la pesée proprement dite d'un astronaute dont on veut déterminer la masse m_{ast}. Celui-ci s'assoit sur la chaise et la met en mouvement. Les oscillations ont alors pour période $T_{\text{ast}} = 2{,}34\,\mathrm{s}$.

4 - Donner **sans calcul** l'équation différentielle vérifiée par la position du point d'attache de la chaise lorsqu'un astronaute est assis.

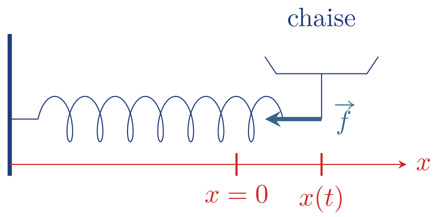
5 - En déduire que la masse de l'astronaute vaut

$$m_{\text{ast}} = m_0 \left[\left(\frac{T_{\text{ast}}}{T_0}\right)^2 - 1\right]$$

6 - Calculer sa valeur numérique.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

Le schéma est fait à un instant où le ressort est étendu : sa longueur est supérieure à sa longueur à vide.



$\boxed{1}$ On étudie le système « chaise vide », en évolution dans le référentiel lié à l'ISS que l'on considère galiléen. En apesanteur, il n'y a pas de poids et donc ici pas de réaction du support. La chaise est donc soumise uniquement à la force de rappel $\vec{f}$ exercée par le ressort, valant ici

$$\vec{f} = -kx\,\vec{e}_x$$

car ici l'allongement du ressort est directement x ($x = 0$ correspond à la longueur à vide) et le vecteur unitaire sortant du ressort est $+\vec{e}_x$. La quantité de mouvement de la chaise vaut $\vec{p} = m_0\vec{v}$ où $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x$ est le vecteur vitesse de la chaise. D'après la loi de la quantité de mouvement,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{f} \qquad \text{soit} \qquad m_0\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_x = -kx\,\vec{e}_x\,.$$

Projeter cette équation sur l'axe x conduit à l'équation différentielle voulue

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m_0}x = 0}$$

2 Le résultat de la question précédente est presque donné sous forme canonique. On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}}$$

Les oscillations se font à la pulsation propre ω_0. La période propre s'en déduit par

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}}\,.$$

On en déduit

$$T_0{}^2 = 4\pi^2\frac{m_0}{k} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{k = 4\pi^2\frac{m_0}{T_0{}^2}}$$

3 Les deux données le sont avec trois chiffres significatifs, le résultat du produit doit donc en avoir autant, soit

$$\boxed{k = 602\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}}$$

4 Lorsqu'un astronaute de masse m_ast s'assoit sur la chaise, la masse attachée au ressort et mise en mouvement n'est plus seulement la masse de la chaise m_0 mais la somme $m_0 + m_\mathrm{ast}$. Par conséquent, l'équation différentielle est la même que celle obtenue à la question 1 en remplaçant m_0 par $m_0 + m_\mathrm{ast}$, soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m_0 + m_\mathrm{ast}}x = 0}$$

5 La pulsation propre ω_ast et la période propre T_ast valent respectivement

$$\boxed{\omega_\mathrm{ast} = \sqrt{\frac{k}{m_0 + m_\mathrm{ast}}} \qquad \text{et} \qquad T_\mathrm{ast} = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{ast}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 + m_\mathrm{ast}}{k}}}$$

Commençons par calculer le rapport T_ast/T_0,

$$\frac{T_\mathrm{ast}}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m_0+m_\mathrm{ast}}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}}} = \sqrt{\frac{m_0 + m_\mathrm{ast}}{m_0}}$$

en simplifiant par $\sqrt{k}$ et en réécrivant la fraction. Ainsi,

$$\left(\frac{T_\mathrm{ast}}{T_0}\right)^2 = \frac{m_0 + m_\mathrm{ast}}{m_0} = 1 + \frac{m_\mathrm{ast}}{m_0}$$

donc

$$\frac{m_\mathrm{ast}}{m_0} = \left(\frac{T_\mathrm{ast}}{T_0}\right)^2 - 1$$

d'où on trouve le résultat voulu

$$\boxed{m_\mathrm{ast} = m_0\left[\left(\frac{T_\mathrm{ast}}{T_0}\right)^2 - 1\right]}$$

6 Toutes les valeurs mesurées sont à nouveau données avec trois chiffres significatifs, d'où on déduit la masse de l'astronaute

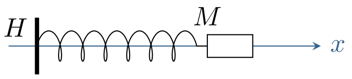
$$\boxed{m_\mathrm{ast} = 58{,}6\,\mathrm{kg}}$$

Oscillateurs

Question de cours

Incluse dans l'exercice.

Exercice 1 : Étude expérimentale d'un oscillateur mécanique



On considère un oscillateur masse-ressort horizontal, dans lequel un mobile de masse m est accroché à l'extrémité un ressort (longueur à vide ℓ_0, raideur k). L'autre extrémité du ressort est reliée à un bâti. Ce mobile est supposé se déplacer à une dimension seulement, le long d'un axe Ox. L'origine est choisie à la position au repos du mobile.

Un dispositif de soufflerie permet au mobile de glisser sur un « coussin d'air » au dessus de son support : il n'y a donc pas de frottement solide à prendre en compte, mais seulement les frottements fluides exercés par l'air et modélisés par une force linéaire

$$\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$$

1 - Établir l'équation différentielle dont la position x du mobile et l'écrire sous forme canonique.

2 - La figure 1 représente l'évolution de x au cours du temps. Quelle est la nature du mouvement ? Qu'est-ce que cela implique sur la valeur du facteur de qualité ?

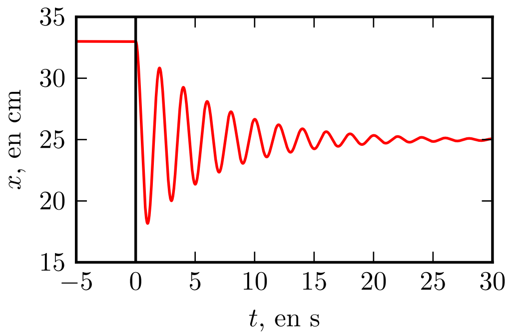


Figure 1 – **Enregistrement expérimental de la position du mobile au cours du temps.**

3 - Exprimer la pseudo-pulsation ω des oscillations en fonction de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur et de son facteur de qualité Q. En déduire la pseudo-période T des oscillations en fonction de la période propre T_0 et de Q.

4 - À l'instant initial, le ressort est étiré jusqu'à atteindre la position x_0 et le mobile est lâché sans vitesse. Résoudre l'équation différentielle obtenue précédemment en exprimant x en fonction notamment de ω, ω_0 et Q.

5 - La décroissance des oscillations est caractérisée par le décrément logarithmique,

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}$$

Montrer que δ ne dépend que de Q.

6 - En déduire le facteur de qualité à partir de la courbe expérimentale.

7 - Exprimer l'énergie mécanique de l'oscillateur. Montrer que

$$\frac{E_\mathrm{m}(t) - E_\mathrm{m}(t+T)}{E_\mathrm{m}(t)} \simeq \frac{2\pi}{Q}$$

On utilisera le développement limité valable pour $|x| \ll 1$, $\mathrm{e}^x \simeq 1 + x$.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Étienne Thibierge, 24 janvier 2018, www.etienne-thibierge.fr

Origine du repère à la longueur à vide du ressort.

1

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0$$

2 Pseudo-périodique donc $Q>1/2$.

3 Déterminer les racines du polynôme caractéristique, ω est la partie imaginaire,

$$\omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \qquad \text{d'où} \qquad T=\frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

4 Forme générale :

$$x(t)=[A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)]\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$

Condition initiale :

$$x(0)=x_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=0$$

Détermination des constantes : avec la position,

$$x(0)\underbrace{=}_{\text{sol}}A\underbrace{=}_{\text{CI}}x_0 \qquad \text{d'où} \qquad A=x_0\,.$$

Avec la vitesse initiale,

$$v(0)\underbrace{=}_{\text{sol}}B\omega-\frac{\omega_0}{2Q}A\underbrace{=}_{\text{CI}}0 \qquad \text{soit} \qquad B=\frac{\omega_0}{2Q\omega}A=\frac{x_0}{2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}=\frac{x_0}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

Conclusion :

$$x(t)=x_0\left[\cos(\omega t)+\frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin(\omega t)\right]\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$

5 Simplification du terme en sinus grâce à la périodicité, ne reste donc que

$$\frac{x(t)}{x(t+T)}=\mathrm{e}^{\omega_0T/2Q} \qquad \text{d'où} \qquad \delta=\frac{\omega_0T}{2Q}=\frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

6 Numériquement $Q=10$.

7 $x(t+T)=x(t)\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}T\right)$ donc

$$E_{\text{pe}}(t+T)=E_{\text{pe}}(t)\exp\left(-\frac{\omega_0}{Q}T\right)$$

Idem pour la vitesse, donc

$$E_{\text{m}}(t+T)=E_{\text{m}}(t)\exp\left(-\frac{\omega_0}{Q}T\right)$$

et si on approxime $\omega_0T\simeq 2\pi$ compte tenu de la valeur numérique de Q il vient

$$\frac{E_{\text{m}}(t)-E_{\text{m}}(t+T)}{E_{\text{m}}(t)}\simeq 1-\exp\left(-\frac{2\pi}{Q}\right)\simeq\frac{2\pi}{Q}$$

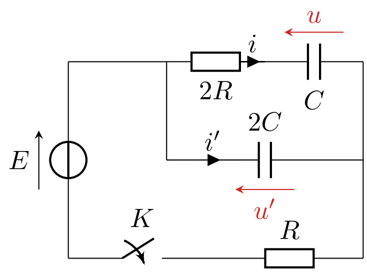
Oscillateurs

Question de cours

Rappeler sans démonstration l'expression de la pulsation propre et du facteur de qualité d'un circuit RLC série.

Exercice 1 : Circuit à deux condensateurs

Les deux condensateurs étant déchargés, l'interrupteur K est fermé à l'instant $t = 0$. On pose $\tau = RC$ et on suppose $E > 0$.



1 - Quelles sont les valeurs juste après la fermeture de K des tensions u et u' et des courants i et i' ?

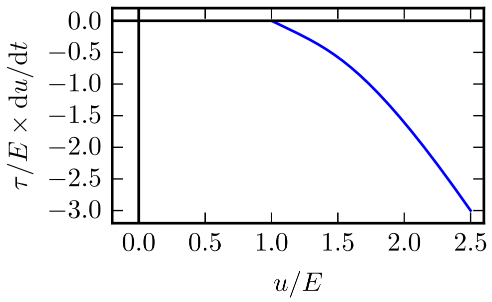
2 - Quelles sont les valeurs au bout d'un temps infini de u, u', i et i' ?

3 - Montrer que u vérifie l'équation différentielle

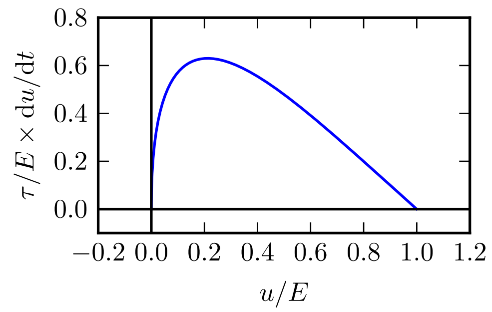
$$4\tau^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + 5\tau \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = E$$

4 - Un régime pseudo-périodique est-il accessible à u ? Si oui, comment faut-il choisir les composants ?

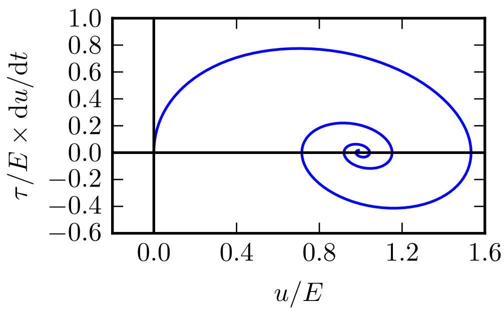
5 - Parmi les quatre trajectoires de phases représentées ci-dessous, laquelle est celle représentant l'évolution de u ? Justifier soigneusement.



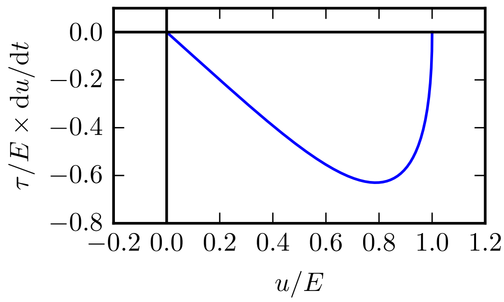
Trajectoire (a)



Trajectoire (b)



Trajectoire (c)



Trajectoire (d)

6 - Résoudre complètement l'équation différentielle.

7 - Montrer que u est une fonction croissante du temps.

8 - Tracer l'allure de la courbe représentant $u(t)$.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue, donc comme les deux condensateurs sont déchargés au moment de la fermeture de l'interrupteur alors

$$\boxed{u(0^+) = 0 \qquad \text{et} \qquad u'(0^+) = 0\,.}$$

> *La condition initiale est donc donnée dans l'énoncé ... Attention à ne pas raconter n'importe quoi avec l'interrupteur ouvert, ou bien en gardant une tension u_K dans la condition initiale, ou bien (et pire) en supposant $u_K = 0$.*

Par contre les courants n'ont aucune raison d'être continus. D'après la loi des mailles appliquée à la maille contenant C et $2R$,

$$E = 2Ri(0^+) + u(0^+) + R\left[i(0^+) + i'(0^+)\right] = 3R\,i(0^+) + R\,i'(0^+)$$

De même, d'après la loi des mailles appliquée à la maille contenant $2C$,

$$E = u'(0^+) + R\left[i(0^+) + i'(0^+)\right] = R\,i(0^+) + R\,i'(0^+)\,.$$

En soustrayant les deux égalités issues de la loi des mailles, on trouve

$$0 = 2R\,i(0^+) + 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{i(0^+) = 0}$$

et on déduit ensuite

$$E = 0 + R\,i'(0^+) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{i'(0^+) = \frac{E}{R}\,.}$$

2 Au bout d'un temps infini, le régime permanent est atteint, donc les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts, si bien que

$$\boxed{i(\infty) = i'(\infty) = 0}$$

D'après la loi des mailles appliquée à la maille contenant C et $2R$,

$$E = 2Ri(\infty) + u(\infty) + R\left[i(\infty) + i'(\infty)\right] \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u(\infty) = E\,.}$$

De même, d'après la loi des mailles appliquée à la maille contenant $2C$,

$$E = u'(\infty) + R\left[i(\infty) + i'(\infty)\right] \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u'(\infty) = E\,.}$$

3 D'après la loi des mailles et la loi des nœuds,

$$E = 2Ri + u + R(i + i')$$

Puis d'après la loi de comportement, $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, donc

$$E = 2RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Ri'$$

Or toujours d'après la loi de comportement d'un condensateur, $i' = 2C\dfrac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}$, soit

$$E = 3RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u + 2RC\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}\,.$$

D'après la loi des mailles et la loi d'Ohm, $u' = u + 2Ri$, d'où

$$E = u + 3RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 4R^2C\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

et en utilisant une dernière fois la loi de comportement du condensateur,

$$E = u + 5RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 4R^2C^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

ce qui se réécrit

$$\boxed{4\tau^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 5\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = E \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC\,.}$$

> *C'est avec des équations de ce type qu'il n'est pas avantageux d'introduire la forme canonique : l'équation différentielle complète n'implique qu'un seul paramètre τ alors que la forme canonique en nécessite deux, ω_0 et Q. Mieux vaut donc travailler avec τ tout au long de l'exercice.*

4 Le polynôme caractéristique associé à cette équation différentielle s'écrit

$$4\tau^2\, r^2 + 5\tau\, r + 1 = 0\,.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = 25\tau^2 - 4 \times 4\tau^2 \times 1 = 9\tau^2\,.$$

Comme il est toujours positif, quelles que soient les valeurs de R et C, on en déduit que **u ne peut jamais atteindre un régime pseudo-périodique**.

5 ▷ Comme la trajectoire (a) ne passe pas par le point $(0,0)$ imposé par les conditions initiales, elle ne peut pas convenir.
▷ La trajectoire (c) décrit un régime pseudo-périodique et ne peut donc pas convenir.
▷ La dérivée est négative tout au long de la trajectoire (d), elle est donc parcourue de droite à gauche : on en déduit que la condition initiale est $u/E = 1$ soit $u = E$ et la valeur asymptotique est $u = 0$, ce qui ne correspond pas aux conditions initiales déterminées précédemment.
On en conclut donc que la vraie trajectoire de phase de u est **la trajectoire (b)**.

6 **Forme générale des solutions.** Comme le forçage est permanent, alors la solution particulière l'est aussi, et on remarque sur l'équation différentielle qu'elle vaut

$$u_\mathrm{p} = E\,,$$

ce qui est cohérent avec la valeur trouvée de $u(\infty)$. Par ailleurs, comme $\Delta > 0$ alors les racines du polynôme caractéristique valent

$$r_{1,2} = \frac{-5\tau \pm \sqrt{9\tau^2}}{2 \times 4\tau^2} = \frac{-5\tau \pm 3\tau}{8\tau^2} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} r_1 = -1/\tau \\ r_2 = -1/4\tau \end{cases}$$

Finalement, la solution homogène s'écrit

$$u_\mathrm{h}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + B\,\mathrm{e}^{-t/4\tau}\,,$$

et la solution complète a la forme

$$\boxed{u(t) = E + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + B\,\mathrm{e}^{-t/4\tau}\,,}$$

où les deux constantes A et B se déterminent à partir des conditions initiales.

Conditions initiales. Elles ont déjà été déterminées question 1,

$$u(0^+) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{i(0^+)}{C} = 0$$

Détermination des constantes. D'après la condition initiale sur u,

$$u(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} E + A + B \underbrace{=}_{\text{CI}} 0$$

En outre, pour $t > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{A}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - \frac{B}{4\tau}\,\mathrm{e}^{-t/4\tau}$$

donc la deuxième condition initiale donne

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} -\frac{A}{\tau} - \frac{B}{4\tau} \underbrace{=}_{\text{CI}} 0$$

ce qui se réécrit sous la forme

$$A + \frac{B}{4} = 0 \qquad \text{soit} \qquad B = -4A$$

En injectant ce résultat dans la première condition initiale, il vient

$$E + A - 4A = 0 \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{E}{3}$$

soit
$$B = -\frac{4}{3}E$$
Finalement,
$$\boxed{u(t) = E\left(1 + \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-t/4\tau}\right)\,.}$$

7 En utilisant les constantes trouvées pour remplacer dans l'expression de la dérivée, on trouve
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{E}{3\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{4E}{3\times 4\tau}\,\mathrm{e}^{-t/4\tau} = \frac{E}{3\tau}\left(-\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \mathrm{e}^{-t/4\tau}\right)$$
Or pour $t > 0$, $t/\tau > t/4\tau$ donc $-t/\tau < -t/4\tau$ donc $\mathrm{e}^{-t/\tau} < \mathrm{e}^{-t/4\tau}$ et $-\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \mathrm{e}^{-t/4\tau} > 0$, si bien qu'on a à tout instant
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} > 0$$
La tension u est bien strictement croissante au cours du temps.

8 Voir figure 1. Même si cela ne se voit pas tellement sur la figure, la tangente à l'origine est horizontale, conformément à la condition initiale sur la dérivée.

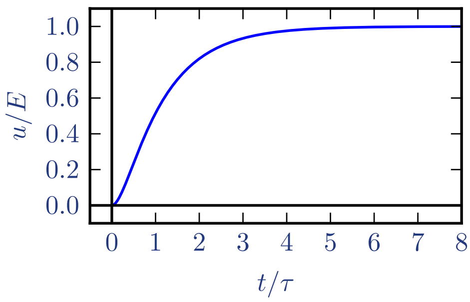


Figure 1 – Allure de la tension $u(t)$. Les tensions sont normalisées par la tension E, les abscisses par le temps τ.