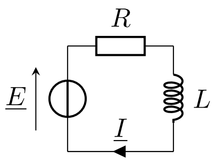
Analyse fréquentielle

Calcul de concentration

Calculer la concentration des ions dans une solution de sulfate de fer (III) $Fe_2(SO_4)_3$ de concentration en soluté apporté $c = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.

Exercice 1 : Circuit RL en régime sinusoïdal forcé



Considérons le circuit ci-contre en régime sinusoïdal forcé, le générateur imposant

$$e(t) = E_\mathrm{m} \cos(\omega t)\,.$$

1 - Exprimer l'impédance puis l'admittance complexe de l'association R, L.

2 - En déduire l'amplitude complexe $\underline{I}$ de l'intensité qui parcourt le circuit.

3 - Déterminer sa pulsation, son amplitude et sa phase initiale et écrire la représentation temporelle de $i(t)$.

4 - On souhaite que $i(t)$ ait une phase initiale nulle. En déduire sans calcul quelle doit être la phase initiale φ_e du forçage.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 $\underline{Z} = R + \mathrm{j}L\omega$ donc $\underline{Y} = 1/(R + \mathrm{j}L\omega)$.

2 $\underline{I} = \underline{Y}\,\underline{E}$.

3 Pulsation ω identique au forçage.

$$I_\mathrm{m} = |\underline{Y}|\, E_\mathrm{m} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} E_\mathrm{m} \qquad \text{et} \qquad \varphi_i = \arg \underline{Y} + \arg \underline{E} = -\arg(R + \mathrm{j}L\omega) = -\arctan \frac{L\omega}{R}$$

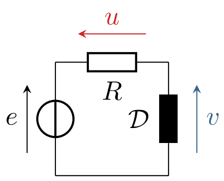
4 Déphasage inchangé donc $\varphi_e = -\varphi_i = +\arctan \dfrac{L\omega}{R}$

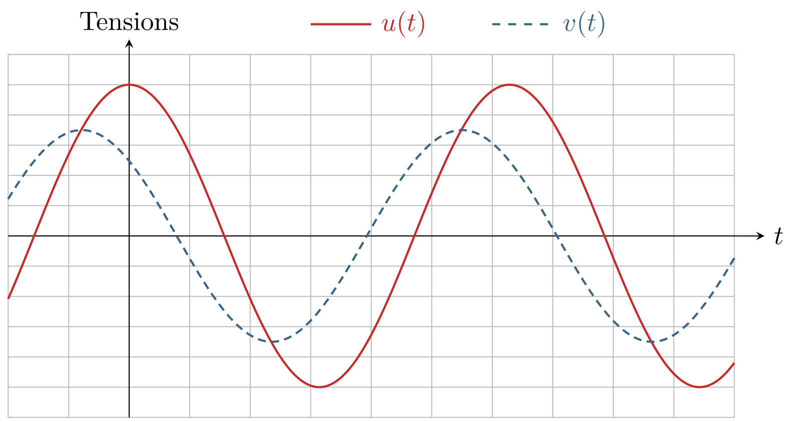
Exercice 2 : Identification d'un dipôle inconnu

Dans le montage représenté ci-dessous, le générateur délivre une tension e sinusoïdale de pulsation ω, $R = 100\,\Omega$ est une résistance et $\mathcal{D}$ un dipôle inconnu d'impédance complexe notée $\underline{Z} = X + \mathrm{j}Y$. On pose

$$u(t) = U_\mathrm{m} \cos(\omega t) \qquad \text{et} \qquad v(t) = V_\mathrm{m} \cos(\omega t + \varphi)$$

les tensions aux bornes respectivement de R et $\mathcal{D}$. En utilisant le mode mathématique de l'oscilloscope, on y affiche les tensions u et v reproduites sur la courbe ci-dessous. Les graduations sont respectivement de 10 ms/div en abscisse et 1 V/div en ordonnée.





1 - Pourquoi est-il impossible d'afficher simultanément u et v à l'oscilloscope sans avoir recours au mode mathématique ?

2 - Déterminer graphiquement l'amplitude et la pulsation des signaux représentés.

3 - La tension v est-elle en avance ou en retard de phase par rapport à la tension u ? En déduire le signe de φ, et déterminer sa valeur à partir de la courbe.

4 - Déterminer les valeurs de X et Y.

5 - Comment peut-on modéliser $\mathcal{D}$? Donner ses caractéristiques.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

1 Conflit de masse.

2 $U_\mathrm{m} = 5\,\mathrm{V}$, $V_\mathrm{m} = 3{,}5\,\mathrm{V}$ et $T = 63\,\mathrm{ms}$ donc $\omega = 100\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

3 v en avance donc $\varphi > 0$. Décalage temporel $\Delta t \simeq 0{,}75 \times 10\,\mathrm{ms}$ donc $\varphi = \omega\,\Delta t = 0{,}75\,\mathrm{rad} = \pi/4$.

4 Pas pratique car il faut passer par module et argument.

$$|\underline{Z}| = \left|\frac{\underline{V}}{\underline{I}}\right| = R\left|\frac{\underline{V}}{\underline{U}}\right| = R\frac{V_\mathrm{m}}{U_\mathrm{m}} \qquad \text{d'où} \qquad X^2 + Y^2 = R^2\frac{{V_\mathrm{m}}^2}{U_\mathrm{m}^2}$$

et d'autre part

$$\arg \underline{Z} = \arg \underline{V} - \arg \frac{\underline{U}}{R} = \varphi - 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{Y}{X} = \tan\varphi = 1$$

Finalement,

$$X = Y = \frac{1}{\sqrt{2}} R \frac{V_\mathrm{m}}{U_\mathrm{m}} = 50\,\Omega$$

5 Montage série d'une résistance de $50\,\Omega$ et d'une bobine d'inductance $L\omega = 49{,}5\,\Omega$ soit $L = 0{,}5\,\mathrm{H}$

Analyse fréquentielle

Calcul de concentration

On mélange 40 mL d'une solution d'eau oxygénée H_2O_2 à la concentration $c_1 = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ et 60 mL d'une solution contenant des ions iodure I^- à la concentration $c_2 = 2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$. Calculer les concentrations après mélange et avant toute transformation.

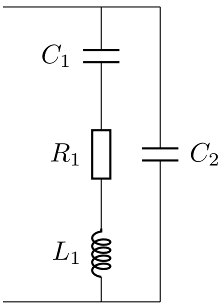
Question de cours

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1 s'écrit

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}}\,.$$

Établir l'équation de l'asymptote haute fréquence en gain.

Exercice 1 : Quartz piezo-électrique



Un cristal de quartz piézo-électrique est le siège d'un couplage électro-mécanique remarquable, découvert en 1880 par Jacques et Pierre Curie. L'application d'une tension entre deux faces métallisées du cristal entraîne une déformation mécanique dudit cristal, et réciproquement une déformation du cristal génère une tension entre ses faces. Un tel cristal peut se modéliser sur le plan électrique par le dipôle représenté ci-contre.

1 - Calculer l'admittance complexe $\underline{Y}$ du quartz en supposant sa résistance interne R_1 nulle.

2 - Définir physiquement puis exprimer les pulsations de résonance ω_r et d'anti-résonance ω_a du quartz. À quoi le circuit est-il équivalent à ces pulsations ?

3 - Représenter son module en fonction de ω. En raisonnant sur les circuits équivalents plutôt que sur les équations, indiquer les modifications induites par l'existence de la résistance interne R_1, non nulle mais très faible ?

4 - Les paramètres accessibles expérimentalement sont Q_1 le facteur de qualité de la branche 1 et M le rapport des intensités dans les branches 1 et 2 à la résonance. Relier ces deux grandeurs aux composants du modèle.

5 - Montrer que les pulsations de résonance et d'anti-résonance sont proportionnelles et exprimer le facteur de proportionnalité en fonction de M et Q_1.

6 - Des valeurs typiques sont $Q_1 \sim 10^4 - 10^5$ et $M \sim 10 - 100$. Conclure sur la facilité de l'étude expérimentale des résonances et anti-résonances du quartz.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Associations série et parallèle :

$$\underline{Y} = \mathrm{j}C_2\omega + \frac{1}{\mathrm{j}L_1\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}C_1\omega}} = \frac{\mathrm{j}\omega\left[C_1 + C_2(1 - L_1C_1\omega^2)\right]}{1 - L_1C_1\omega^2}$$

$\boxed{2}$ Pulsations caractéristiques :

▷ $\omega_r = 1/\sqrt{L_1C_1}$ où le dénominateur de l'admittance s'annule, branche 1 équivalente à un fil ;

▷ $\omega_a = \sqrt{(C_1 + C_2)/L_1C_1C_2}$ où le numérateur s'annule, ensemble du circuit équivalent à un interrupteur ouvert. Cas un peu plus subtil : les deux admittances des branches 1 et 2 sont égales mais de signe opposé, c'est-à-dire que le courant est opposé dans les deux branches.

$\boxed{3}$ Comportement linéaire pour ω petit, divergence à la résonance, annulation (exacte) à l'anti-résonance, comportement linéaire pour ω grand. Si on prend en compte la résistance interne, il n'y a plus ni annulation stricte ni divergence : les admittances ne sont plus imaginaires pures toutes les deux ... et en toute rigueur les pulsations sont légèrement décalées.

$\boxed{\textbf{4}}$ $Q_1 = \dfrac{1}{R_1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}$. Rapport des intensités :

$$M = \left|\frac{\underline{I_1}}{\underline{I_2}}\right| = \left|\frac{\underline{Y_1}\underline{U}}{\underline{Y_2}\underline{U}}\right| = \left|\frac{\underline{Y_1}}{\underline{Y_2}}\right|$$

avec à la résonance $\omega = \omega_\mathrm{r}$ donc $\underline{Y_1} = 1/R_1$ et $\underline{Y}_2 = \mathrm{j}C_2\omega_\mathrm{r} = \mathrm{j}C_2/\sqrt{L_1C_1}$ soit

$$M = \frac{\sqrt{L_1C_1}}{R_1C_2}$$

$\boxed{\textbf{5}}$ Plus simple de travailler sur des carrés.

$$\frac{\omega_\mathrm{a}^2}{\omega_\mathrm{r}^2} = 1 + \frac{M}{Q_1}$$

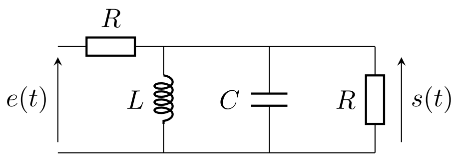
$\boxed{\textbf{6}}$ Difficile ! Pulsations très proches et résonances très aigues.

Analyse fréquentielle

Calcul de concentration

On mélange 50 mL d'une solution de NaCl à la concentration en soluté apporté $c_1 = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ et 50 mL d'une solution de KCl à la concentration en soluté apporté $c_2 = 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$. Calculer les concentrations en Na^+ et Cl^- dans la solution.

Exercice 1 : Circuit en régime sinusoïdal forcé



On s'intéresse au circuit ci-contre alimenté par la tension

$$e(t) = E_\mathrm{m} \cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{avec} \qquad f = 1{,}0\,\mathrm{kHz}$$

1 - Définir et calculer numériquement la période et la pulsation de $e(t)$.

2 - Donner la représentation complexe et l'amplitude complexe de e.

3 - Calculer l'admittance complexe $\underline{Y}$ puis l'impédance complexe $\underline{Z}$ de l'association formée par les trois dipôles en parallèle.

4 - Exprimer l'amplitude complexe $\underline{S}$ de la tension s en fonction de $\underline{Z}$ puis de $\underline{Y}$.

5 - Les deux tensions e et s peuvent-elles être en phase ? en opposition de phase ? en quadrature de phase ? Préciser le cas échéant la pulsation, et laquelle des deux tensions est en avance de phase. Répondre à cette question demande des manipulations simples sur les nombres complexes, mais il n'est pas nécessaire de calculer explicitement un argument.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 La période est l'inverse la fréquence,

$$\boxed{T = \frac{1}{f} = 1{,}0\,\mathrm{ms}}$$

La pulsation vaut

$$\boxed{\omega = 2\pi\, f = 6{,}3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}}$$

2 La représentation complexe de la tension e s'écrit

$$\boxed{\underline{e} = E_\mathrm{m}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t + \mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}$$

Son amplitude complexe vaut

$$\boxed{\underline{E} = E_\mathrm{m}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}\,.}$$

3 L'admitance complexe de l'association parallèle s'écrit

$$\underline{Y} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega + \frac{1}{R} = \frac{R + (\mathrm{j}C\omega)\,(\mathrm{j}L\omega)\,R + \mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}LR\omega} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{Y} = \frac{1 - LC\omega^2 + \mathrm{j}\frac{L}{R}\omega}{\mathrm{j}L\omega}}$$

On en déduit alors

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{1 - LC\omega^2 + \mathrm{j}\frac{L}{R}\omega}}$$

Étienne Thibierge, 24 janvier 2018, www.etienne-thibierge.fr

Diviser numérateur et dénominateur par R permet de faire apparaître des quantités adimensionnées ... mais ne pas le faire n'est évidemment pas faux.

4 L'impédance équivalente $\underline{Z}$ et la résistance R forment un pont diviseur de tension, donc

$$\boxed{\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}}{R+\underline{Z}} = \frac{1}{1+R\underline{Y}}}$$

Exactement comme les lois de comportement avec les impédances complexes, la relation du pont diviseur de tension s'applique aussi bien aux représentations complexes qu'aux amplitudes complexes, puisque

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{S}\,\mathrm{e}^{j\omega t}}{\underline{E}\,\mathrm{e}^{j\omega t}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}\,.$$

On l'écrit donc habituellement directement en termes d'amplitude complexe.

5 Remplaçons $\underline{Y}$ par son expression dans la fonction de transfert,

$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1+R\dfrac{R-RLC\omega^2+\mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}LR\omega}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}L\omega+R-RLC\omega^2+\mathrm{j}L\omega} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{(R-RLC\omega^2)+2\mathrm{j}L\omega}$$

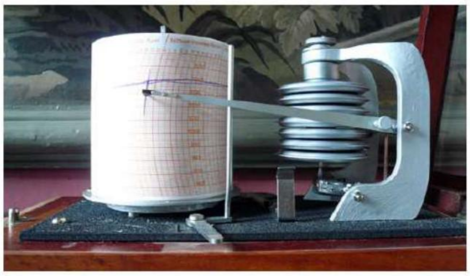
Les deux tensions s et e sont en phase ou en opposition de phase si le rapport de leurs amplitudes complexes, c'est-à-dire ici la fonction de transfert, est un nombre réel. Si ce nombre est positif, elles sont en phase, et s'il est négatif elles sont en opposition de phase. Comme le numérateur de la fonction de transfert est un imaginaire pur, il faut que le dénominateur soit un imaginaire pur également. C'est le cas si

$$R-RLC\omega^2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

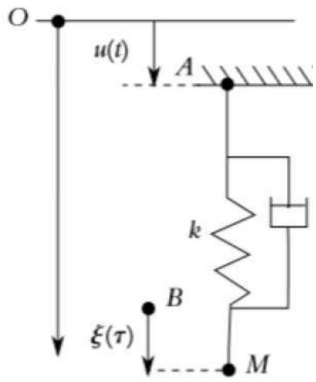
La fonction de transfert vaut alors $1/2$, et ne peut pas prendre de valeurs négatives. On en déduit que **les tensions sont en phase si $\omega = 1/\sqrt{LC}$, et elles ne peuvent jamais être en opposition de phase**. De même, les tensions sont en quadrature de phase si la fonction de transfert est un imaginaire pur. Comme le numérateur est déjà un imaginaire pur, c'est le cas si le dénominateur est un réel. Cependant, comme la partie imaginaire du dénominateur est toujours positive (sauf en $\omega = 0$, mais alors $s = 0$ et parler de déphasage n'a plus de sens), cette condition ne peut jamais être atteinte. On en conclut que **les tensions s et e ne peuvent jamais être en quadrature de phase**.

Exercice 2 : Sismographe

Pour étudier les mouvements du sol dus à la sismicité, les géologues utilisent un appareil de mesure dont la fonction est de reproduire au mieux les vibrations du sol : le sismomètre ou sismographe. Cet appareil permet la détection et l'enregistrement des mouvements du sol à une dimension. On se limite ici à l'étude des mouvements verticaux.



Exemple de sismographe portatif



Représentation schématique

Figure 1 – Photo et schéma d'un sismographe.

On modélise le sismographe par un oscillateur constitué d'une masse m reliée à un point A d'un châssis. Le point O est un point fixe du référentiel d'étude supposé galiléen. Le châssis est solidaire du sol et entre en vibration. En l'absence de mouvement du sol, la masse se situe à sa position d'équilibre au point B. La liaison entre M et A est modélisée par une liaison élastique de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 associée à un frottement fluide caractérisé par la constante h. On note f_{p} la fréquence propre de l'oscillateur. On enregistre alors le mouvement de M au cours du temps. Le dispositif est correctement réglé si ce mouvement est proportionnel à celui du sol lors d'un séisme.

Le mouvement $\xi(t)$ de M est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\xi = -\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} \qquad \text{avec} \qquad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \qquad \text{et} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

On se place en régime sinusoïdal forcé et on pose $u(t) = U_0\cos(\omega t)$.

1 - Déterminer l'amplitude complexe $\underline{\xi}$. Comment se simplifie-t-elle dans la limite de mouvements très rapides ? très lents ? Interpréter.

2 - Étudier les variations de $\left|\underline{\xi}\right|$ en fonction de ω. Pour cela, écrire $\left|\underline{\xi}\right|^2$ sous la forme ${U_0}^2/f(y)$ avec $y = (\omega_0/\omega)^2$. À quelle condition existe-t-il un phénomène de résonance ? À quelle pulsation ? Tracer $\left|\underline{\xi}\right|$ en fonction de ω avec et sans résonance.

Le concepteur du sismomètre doit définir les valeurs à donner aux deux paramètres ω_0 et Q. Il doit valider le cahier des charges suivant :

(1) La bande passante doit correspondre à la gamme de fréquence des vibrations sismiques à détecter. Les autres perturbations ne doivent idéalement pas donner lieu à un mouvement du sismographe.

(2) Parmi les fréquences contenues dans la bande passante, aucune ne doit être privilégiée.

(3) Le régime transitoire doit être le plus court possible.

3 - Comment faut-il choisir le facteur de qualité pour répondre au point (3) du cahier des charges ?

4 - Que penser de l'existence d'une résonance compte tenu du point (2) du cahier des charges ? Que peut-on en déduire sur le facteur de qualité ? Ce résultat est-il compatible avec le précédent ?

On étudie la surveillance sismique d'un site nucléaire situé en bord de mer. La composante verticale détectée lors d'un séisme a une fréquence allant de 0,5 à 15 Hz. Cependant, les oscillations du sol sont de diverses natures. On peut énumérer la liste suivante, non exhaustive :

- ▷ Les phénomènes de marée, dus à la présence de la Lune et du Soleil, de période une demi-journée.
- ▷ La houle qui est un train régulier de vagues formées au large. Ces vagues exercent une action par gravité sur le fond marin, détectable par un sismomètre ultra-sensible. La période du phénomène va de quelques secondes à quelques dizaines de secondes.
- ▷ L'oscillation propre de la Terre de période 53 minutes.
- ▷ L'ensemble des perturbations liées aux activités humaines : circulation de véhicules, travaux, etc. Dans le cas de la centrale, la rotation des alternateurs se fait à 3000 tours par minute.

5 - Représenter sur un diagramme en échelle logarithmique, les fréquences des phénomènes mis en jeu.

6 - Compte tenu des remarques précédentes comment doit-on choisir la fréquence propre de l'oscillateur ? Ce choix a-t-il des conséquences sur la qualité du signal reçu ?

Éléments de correction de l'exercice 2 :

1

$$\underline{\xi} = \frac{\omega^2 U_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \dfrac{\mathrm{j}\omega\omega_0}{Q}}$$

Limite TBF : $\underline{\xi} = \dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}U_0 \to 0$ c'est-à-dire que le sismographe ne bouge quasiment pas.

Limite THF : $\underline{\xi} = -U_0$ c'est-à-dire que le sismographe suit exactement les mvts du cadre.

2

$$\underline{\xi} = \frac{U_0}{(y-1) + \dfrac{\mathrm{j}\sqrt{y}}{Q}} \qquad \text{donc} \qquad \left|\underline{\xi}^2\right| = \frac{{U_0}^2}{(y-1)^2 + \dfrac{y}{Q^2}}$$

On pose $f(y) = (y-1)^2 + y/Q^2$. On cherche si sa dérivée $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = 2(y-1) + 1/Q^2$ s'annule pour $y > 0$. C'est le cas en

$$y = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

donc seulement si $Q > 1/\sqrt{2}$, et dans ce cas la pulsation de résonance vaut

$$\omega_\mathrm{r} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}}$$

3 $Q = 1/2$.

4 Il ne faut pas de résonance, donc $Q < 1/\sqrt{2}$: impossible de conciler les deux exigences.

5 Fréquences associées :
- marées : $2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Hz}$;
- houle : 0,1 à 1 Hz ;
- oscillation de la Terre : $3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Hz}$
- rotation des alternateurs : 50 Hz

6 $f_\mathrm{p} \leq 0{,}5\,\mathrm{Hz}$ Pas idéal car on subit les perturbations de la houle et des alternateurs, mais il n'y a pas vraiment le choix.