Filtrage

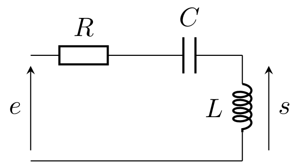
Calcul de concentration

Calculer la concentration des ions dans une solution de sulfate de fer (III) $Fe_2(SO_4)_3$ de concentration en soluté apporté $c = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.

Question de cours

Établir la courbe à tracer et analyser pour vérifier qu'une réaction admet un ordre par la méthode différentielle, c'est-à-dire sans formuler d'hypothèse sur la valeur de cet ordre.

Exercice 1 : Filtre passe-haut d'ordre 2



1 - Justifier que ce filtre est un filtre passe-haut. Définir sa pulsation caractéristique ω_0 et son facteur de qualité Q.

2 - Déterminer sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme

$$\underline{H} = \frac{\mathrm{j}Qx}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)} \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}\,.$$

3 - Déterminer la pente des asymptotes du diagramme de Bode en gain. Tracer qualitativement son allure en supposant que le facteur de qualité est tel que le circuit n'est pas résonant.

4 - Ce filtre peut-il avoir un comportement dérivateur ? intégrateur ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 Analysons qualitativement les régimes asymptotiques.

- à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil donc $\underline{S} = 0$;
- à très haute fréquence la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, ce qui empêche tout courant de parcourir le circuit. Comme par le condensateur est équivalent à un fil, on déduit de la loi des mailles $\underline{S} = \underline{E}$.

Conclusion : il s'agit bien d'un **filtre passe-haut**.

2 D'après la relation du pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega} = \frac{\mathrm{j}\dfrac{L}{R}\omega}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega} + \mathrm{j}\dfrac{L}{R}\omega}$$

Pour faire apparaître la forme souhaitée, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $1 = \omega_0/\omega_0$, ce qui permet d'écrire

$$\underline{H} = \frac{\mathrm{j}\dfrac{L\omega_0}{R}x}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega_0 x} + \mathrm{j}\dfrac{L\omega_0}{R}x}$$

Comme pour ce circuit RLC série $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, on en identifie

$$\frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = Q \qquad \text{et} \qquad RC\omega_0 = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}\,.$$

ce qui permet enfin de faire apparaître la forme souhaitée,

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\mathrm{j}Qx}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$$

$\boxed{3}$ Simplifions la fonction de transfert dans les deux limites asymptotiques. À très basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$ ou $x \ll 1$),

$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}Qx}{-\mathrm{j}Q/x} \sim -x^2 \qquad \text{donc} \qquad G_{\mathrm{dB}} \sim 20 \log x^2 = 40 \log x$$

La pente de l'asymptote très basse fréquence est donc de +40 dB/décade. De même, dans la limite très haute fréquence $x \gg 1$,

$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}Qx}{\mathrm{j}Qx} \sim 1 \qquad \text{donc} \qquad G_{\mathrm{dB}} \sim 0$$

L'asymptote très haute fréquence est donc horizontale. Le diagramme de Bode asymptotique et le diagramme de Bode réel (tracé pour $Q = 1/2 < 1/\sqrt{2}$) sont représentés figure 1.

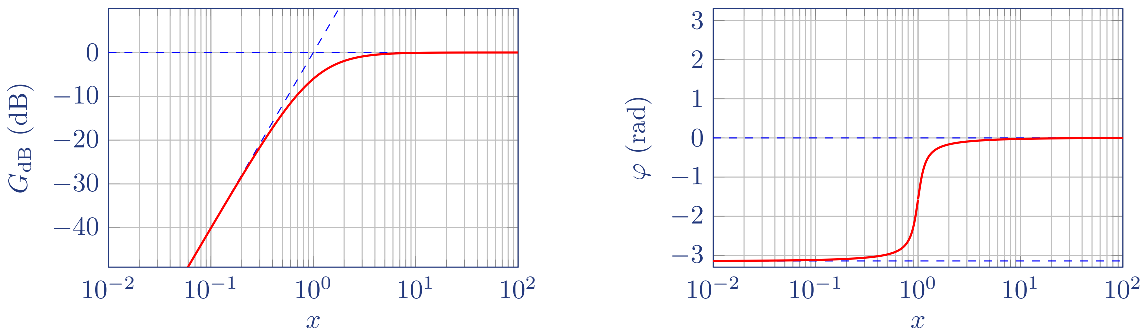


Figure 1 – Diagramme de Bode du filtre RLC passe-haut d'ordre 2. Tracé pour $Q = 1/2$, diagramme de Bode en phase ajouté pour information.

$\boxed{4}$ Le comportement intégrateur ou dérivateur d'un filtre se traduit en termes de diagramme de Bode par une asymptote de pente ±20 dB/décade, ce qui n'est pas le cas ici : **il n'existe aucun domaine de fréquence dans lequel ce filtre a un comportement d'intégrateur ou de dérivateur**.

Filtrage

Calcul de concentration

On mélange 40 mL d'une solution d'eau oxygénée H_2O_2 à la concentration $c_1 = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ et 60 mL d'une solution contenant des ions iodure I^- à la concentration $c_2 = 2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$. Calculer les concentrations après mélange et avant toute transformation.

Question de cours

Définir les méthodes de dégénérescence de l'ordre et de conditions initiales stoëchiométriques. Préciser ce que vaut l'ordre apparent dans chaque cas.

Exercice 1 : Mesure d'impédance par détection synchrone [oral TPE-EIVP]

On cherche à identifier un dipôle inconnu d'impédance $\underline{Z} = X + \mathrm{j}Y$, à l'aide du montage représenté figure 1 qui porte le nom de « montage de détection synchrone ».

Le bloc central est un multiplieur, dont l'impédance d'entrée est infinie et la tension de sortie proportionnelle aux deux tensions d'entrée : $V_3 = kV_1V_2$ avec k une constante connue. Les autres composants R_0, R_1 et C_1 sont connus. Le circuit est traversé par le courant $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

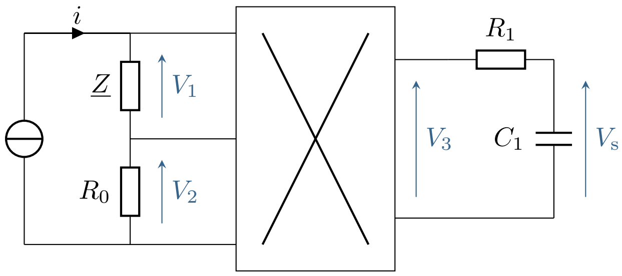


Figure 1 – Schéma du montage de détection synchrone.

1 - Quel type de filtre forme le bloc R_1, C_1 ? Rappeler les deux grandes utilités de ce type de filtre.

2 - Déterminer sa fonction de transfert.

3 - Tracer son diagramme de Bode asymptotique.

4 - Expliquer la différence entre

$$U_1 \cos(\omega t) \times U_2 \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Re}\left(U_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \times U_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}\right) .$$

5 - Montrer que l'on peut trouver une condition sur R_1 et C_1 telle que V_s soit quasiment constante. En déduire comment déterminer X.

6 - On remplace R_0 par un condensateur C_0. Montrer que l'on peut trouver Y.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Passe-bas, qui peut éliminer les hautes fréquences du spectre d'un signal ou agir en intégrateur sur les signaux hautes fréquences.

$\boxed{2}$ cf. cours

$\boxed{3}$ cf. cours

$\boxed{4}$ Les deux expressions ne sont pas égales.

$$\cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}\left[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi\right]$$
$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}\right) = \cos(2\omega t + \varphi)$$

Étienne Thibierge, 17 février 2018, www.etienne-thibierge.fr

5 Compte tenu de l'expression de i alors $\underline{i} = I_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ réel. Comme l'impédance d'entrée du multiplieur est infinie, alors $\underline{Z}$ et R_0 sont traversés par le courant i, donc

$$\underline{V_1} = \underline{Z} I_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \text{soit} \qquad v_1(t) = \mathrm{Re}\,\underline{V_1} = X I_0 \cos(\omega t) - Y I_0 \sin(\omega t)\,.$$

Comme $v_2(t) = R_0 I_0 \cos(\omega t)$ alors

$$v_3(t) = k v_1(t) v_2(t) = k R_0 X {I_0}^2 \cos^2(\omega t) - k R_0 {I_0}^2 Y \cos(\omega t)\sin(\omega t)\,.$$

Or $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\omega t)\right)$ et $\cos(\omega t)\sin(\omega t) = \frac{1}{2}\sin(2\omega t)$, d'où

$$v_3(t) = \frac{1}{2} k R_0 X {I_0}^2 + \frac{1}{2} k R_0 X {I_0}^2 \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} k R_0 {I_0}^2 Y \sin(2\omega t)\,.$$

Si la pulsation de coupure $1/R_1C_1 \ll 2\omega$ alors le signal de sortie V_s ne conserve que la composante continue. Comme tout est connu, une mesure de son amplitude permet de déterminer X.

6 Si on met un condensateur C_0 à la place de R_0, alors

$$\underline{V_2} = \frac{1}{\mathrm{j} C_0 \omega} I_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \frac{I_0}{C\omega}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

ce qui permet d'écrire

$$v_2(t) = \frac{I_0}{C\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{I_0}{C\omega}\sin(\omega t)\,.$$

On a alors

$$v_3(t) = \frac{k X {I_0}^2}{C\omega}\cos(\omega t)\sin(\omega t) - \frac{Y {I_0}^2}{C\omega}\sin^2(\omega t)\,.$$

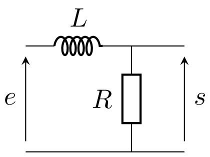
La logique est la même que tout à l'heure, puisque $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\omega t)\right)$.

Filtrage

Calcul de concentration

On mélange 50 mL d'une solution de NaCl à la concentration en soluté apporté $c_1 = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ et 50 mL d'une solution de KCl à la concentration en soluté apporté $c_2 = 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$. Calculer les concentrations en Na^+ et Cl^- dans la solution.

Exercice 1 : Filtre RL



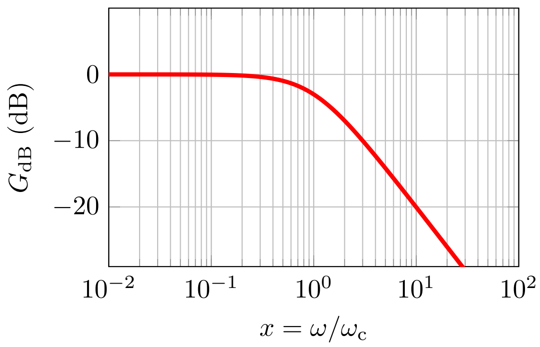
On considère le circuit ci-contre avec $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $L = 10\,\mathrm{mH}$.

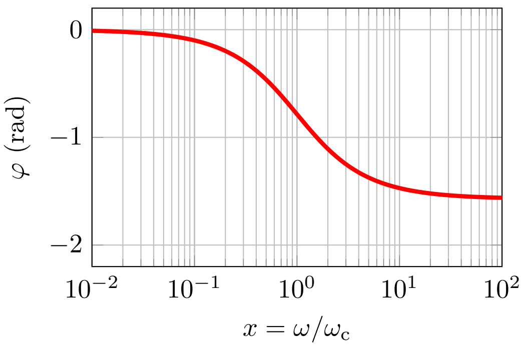
1 - Quel type de filtre ce circuit permet-il de réaliser ?

2 - Déterminer sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}.$$

3 - Le diagramme de Bode du filtre est représenté ci-dessous. Lire sur le diagramme la pente des asymptotes en gain et en phase et les retrouver à partir de la fonction de transfert.





4 - La tension e s'écrit sous la forme d'une somme de trois harmoniques de même amplitude, de même phase initiale, et de fréquences respectives $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$, $f_2 = 1\,\mathrm{kHz}$ et $f_3 = 10\,\mathrm{kHz}$. Donner la forme du signal d'entrée e puis du signal de sortie s.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Analyse asymptotique par équivalence :

▷ à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil, donc $\underline{S} = \underline{E}$;

▷ à très haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, donc le courant dans le filtre est nul et on déduit de la loi des mailles $\underline{S} = 0$.

Conclusion : le filtre est **un filtre passe-bas.**

$\boxed{2}$ Utilisons un pont diviseur de tension en représentation complexe,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{R}{R + \mathrm{j}L\omega} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{L}{R}\omega} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}} \qquad \text{avec} \qquad \omega_\mathrm{c} = R/L}$$

$\boxed{3}$ Cf. paragraphe de cours sur le filtre RC passe-bas.

$\boxed{4}$ Comme les trois harmoniques sont de même amplitude et en phase

$$\boxed{e(t) = E_0\left[\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t)\right]}\,.$$

D'après les valeurs numériques données, la pulsation de coupure du filtre vaut

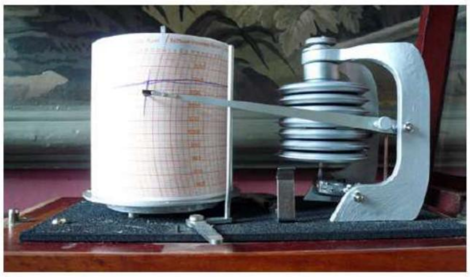
$$\omega_\mathrm{c} = \frac{R}{L} = 1{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} \qquad \text{soit} \qquad f_\mathrm{c} = \frac{\omega_\mathrm{c}}{2\pi} = 16\,\mathrm{kHz}\,.$$

Comme $x_1 = f_1/f_\mathrm{c} = 6 \cdot 10^{-3}$, la composante associée est parfaitement transmise. De même, la contribution de fréquence f_2 (soit $x_2 = 6 \cdot 10^{-2}$) est parfaitement transmise en amplitude, mais déphasée de $-0{,}2\,\mathrm{rad}$. Enfin $x_3 \simeq 0{,}6$, donc la composante associée est atténuée de 2 dB environ (facteur multiplicatif 0,8 en amplitude) et déphasée de $-0{,}7\,\mathrm{rad}$. Ainsi,

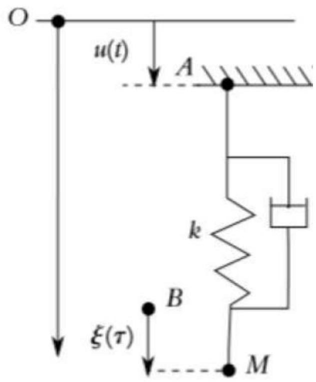
$$\boxed{s(t) = E_0 \cos(2\pi f_1 t) + E_0 \cos(2\pi f_2 t - 0{,}2) + 0{,}8 E_0 \cos(2\pi f_3 t - 0{,}7)}$$

Exercice 2 : Sismographe

Pour étudier les mouvements du sol dus à la sismicité, les géologues utilisent un appareil de mesure dont la fonction est de reproduire au mieux les vibrations du sol : le sismomètre ou sismographe. Cet appareil permet la détection et l'enregistrement des mouvements du sol à une dimension. On se limite ici à l'étude des mouvements verticaux.



Exemple de sismographe portatif



Représentation schématique

Figure 1 – Photo et schéma d'un sismographe.

On modélise le sismographe par un oscillateur constitué d'une masse m reliée à un point A d'un châssis. Le point O est un point fixe du référentiel d'étude supposé galiléen. Le châssis est solidaire du sol et entre en vibration. En l'absence de mouvement du sol, la masse se situe à sa position d'équilibre au point B. La liaison entre M et A est modélisée par une liaison élastique de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 associée à un frottement fluide caractérisé par la constante h. On note f_p la fréquence propre de l'oscillateur. On enregistre alors le mouvement de M au cours du temps. Le dispositif est correctement réglé si ce mouvement est proportionnel à celui du sol lors d'un séisme.

Le mouvement $\xi(t)$ de M est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\xi = -\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} \qquad \text{avec} \qquad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \qquad \text{et} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

On se place en régime sinusoïdal forcé et on pose $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$.

1 - Déterminer l'amplitude complexe $\underline{\xi}$. Comment se simplifie-t-elle dans la limite de mouvements très rapides ? très lents ? Interpréter.

2 - Étudier les variations de $|\underline{\xi}|$ en fonction de ω. Pour cela, écrire $|\underline{\xi}|^2$ sous la forme ${U_0}^2/f(y)$ avec $y = (\omega_0/\omega)^2$. À quelle condition existe-t-il un phénomène de résonance ? À quelle pulsation ? Tracer $|\underline{\xi}|$ en fonction de ω avec et sans résonance.

Le concepteur du sismomètre doit définir les valeurs à donner aux deux paramètres ω_0 et Q. Il doit valider le cahier des charges suivant :

(1) La bande passante doit correspondre à la gamme de fréquence des vibrations sismiques à détecter. Les autres perturbations ne doivent idéalement pas donner lieu à un mouvement du sismographe.

(2) Parmi les fréquences contenues dans la bande passante, aucune ne doit être privilégiée.

(3) Le régime transitoire doit être le plus court possible.

3 - Comment faut-il choisir le facteur de qualité pour répondre au point (3) du cahier des charges ?

4 - Que penser de l'existence d'une résonance compte tenu du point (2) du cahier des charges ? Que peut-on en déduire sur le facteur de qualité ? Ce résultat est-il compatible avec le précédent ?

On étudie la surveillance sismique d'un site nucléaire situé en bord de mer. La composante verticale détectée lors d'un séisme a une fréquence allant de 0,5 à 15 Hz. Cependant, les oscillations du sol sont de diverses natures. On peut énumérer la liste suivante, non exhaustive :

▷ Les phénomènes de marée, dus à la présence de la Lune et du Soleil, de période une demi-journée.
▷ La houle qui est un train régulier de vagues formées au large. Ces vagues exercent une action par gravité sur le fond marin, détectable par un sismomètre ultra-sensible. La période du phénomène va de quelques secondes à quelques dizaines de secondes.
▷ L'oscillation propre de la Terre de période 53 minutes.
▷ L'ensemble des perturbations liées aux activités humaines : circulation de véhicules, travaux, etc. Dans le cas de la centrale, la rotation des alternateurs se fait à 3000 tours par minute.

5 - Représenter sur un diagramme en échelle logarithmique, les fréquences des phénomènes mis en jeu.

6 - Compte tenu des remarques précédentes comment doit-on choisir la fréquence propre de l'oscillateur ? Ce choix a-t-il des conséquences sur la qualité du signal reçu ?

Éléments de correction de l'exercice 2 :

$\boxed{1}$

$$\underline{\xi} = \frac{\omega^2 U_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \dfrac{\mathrm{j}\omega\omega_0}{Q}}$$

Limite TBF : $\underline{\xi} = \dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2} U_0 \to 0$ c'est-à-dire que le sismographe ne bouge quasiment pas.

Limite THF : $\underline{\xi} = -U_0$ c'est-à-dire que le sismographe suit exactement les mvts du cadre.

$\boxed{2}$

$$\underline{\xi} = \frac{U_0}{(y-1) + \dfrac{\mathrm{j}\sqrt{y}}{Q}} \qquad \text{donc} \qquad \left|\underline{\xi}^2\right| = \frac{{U_0}^2}{(y-1)^2 + \dfrac{y}{Q^2}}$$

On pose $f(y) = (y-1)^2 + y/Q^2$. On cherche si sa dérivée $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = 2(y-1) + 1/Q^2$ s'annule pour $y > 0$. C'est le cas en

$$y = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

donc seulement si $Q > 1/\sqrt{2}$, et dans ce cas la pulsation de résonance vaut

$$\omega_\mathrm{r} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}}$$

$\boxed{3}$ $Q = 1/2$.

$\boxed{4}$ Il ne faut pas de résonance, donc $Q < 1/\sqrt{2}$: impossible de conciler les deux exigences.

$\boxed{5}$ Fréquences associées :
▷ marées : $2 \cdot 10^{-5}$ Hz ;
▷ houle : 0,1 à 1 Hz ;
▷ oscillation de la Terre : $3 \cdot 10^{-4}$ Hz
▷ rotation des alternateurs : 50 Hz

$\boxed{6}$ $f_\mathrm{p} \leq 0{,}5$ Hz Pas idéal car on subit les perturbations de la houle et des alternateurs, mais il n'y a pas vraiment le choix.