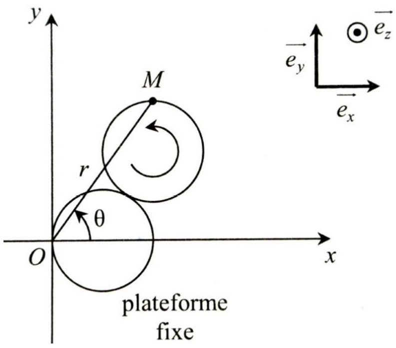
Mécanique en polaires

Exercice de cours

Considérons un oscillateur harmonique masse-ressort vertical. Schématiser la situation en introduisant un repérage adéquat. Rappeler, dans ce repérage, l'expression des énergies potentielles de pesanteur et élastique. Établir l'équation du mouvement **en utilisant une méthode énergétique**.

Exercice 1 : Manège



Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$, on définit un repère $Oxyz$ avec un axe (Oz) vertical ascendant. La figure ci-contre est une vue de dessus. Un manège est constitué de deux plateformes circulaires horizontales de même rayon R : l'une est immobile par rapport au référentiel terrestre, sa circonférence passe par l'origine O du repère et son centre est sur l'axe (Ox) ; l'autre peut rouler sans glisser autour de la première.

Un enfant, assimilé à un point M, a pris place sur le manège, en un point de la circonférence de la plateforme mobile. Il décrit alors une trajectoire contenue dans le plan horizontal (Oxy) et décrite par l'équation polaire $r = 2R(1+\cos\theta)$. On suppose de plus que la vitesse angulaire Ω est maintenue constante : on a $\theta = \omega t$ à partir de l'instant initial $t = 0$.

1 - Placer sur un schéma les quatre points de la trajectoire correspondant aux angles $\theta = 0$ (point A), $\theta = \pi/2$ (point B), $\theta = \pi$ (point C), $\theta = 3\pi/2$ (point D). En déduire l'allure de la trajectoire complète : cette courbe s'appelle une cardioïde. Représenter la base polaire au point D.

2 - Exprimer le vecteur vitesse dans la base polaire d'abord en fonction de θ et $\dot\theta$, puis de Ω et t. Dessiner ce vecteur au point D.

3 - Calculer la norme de la vitesse.

4 - En quel point l'enfant risque-t-il le plus d'être éjecté du manège (vitesse maximale), et dans quelle direction serait-il alors éjecté ?

5 - En quel point l'enfant pourra-t-il essayer de descendre du manège (vitesse nulle) ?

6 - Exprimer le vecteur accélération dans la base polaire. Dessiner ce vecteur au point D.

7 - Calculer la norme de l'accélération.

8 - Il n'existe pas de sensation absolue de vitesse, en revanche ce qu'on ressent fortement est l'accélération que l'on subit. En quel point l'enfant risque-t-il le plus de se sentir mal ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Cf. figure 1.

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{OM} = 2R(1+\cos\theta)\vec{e}_r$ d'où

$$\vec{v} = -2R\dot\theta\sin\theta\,\vec{e}_r + 2R(1+\cos\theta)\dot\theta\,\vec{e}_\theta\,.$$

soit en réintroduisant le temps

$$\boxed{\vec{v} = -2R\Omega\sin(\Omega t)\,\vec{e}_r + 2R(1+\cos(\Omega t))\Omega\,\vec{e}_\theta\,.}$$

$\boxed{3}$ Calcul de norme :

$$\begin{aligned} v^2 &= 4R^2\Omega^2\sin^2(\Omega t) + 4R^2(1+\cos(\Omega t))^2\Omega^2 \\ &= 4R^2\Omega^2\left[\sin^2(\Omega t) + 1 + 2\cos(\Omega t) + \cos^2(\Omega t)\right] \\ &= 8R^2\Omega^2(1+\cos(\Omega t)) \qquad = 8R^2\Omega^2 \times 2\cos^2\frac{\Omega t}{2} \end{aligned}$$

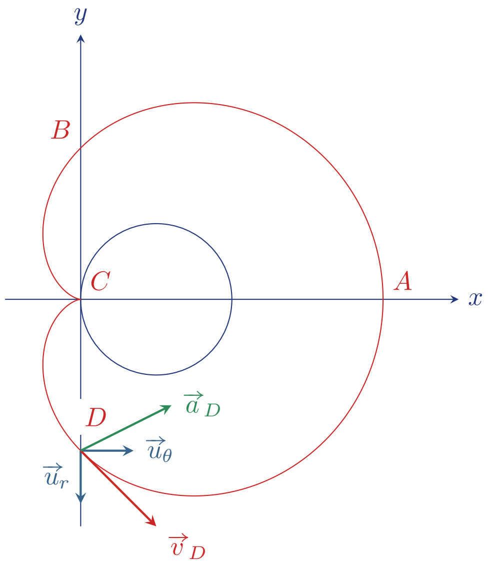


Figure 1 – Schéma complet.

d'où finalement

$$\boxed{v = 4R\Omega \left|\cos\frac{\Omega t}{2}\right| = 4R\Omega \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| .}$$

$\boxed{4}$ La vitesse est maximale en $\theta/2 = 0$ ou π ce qui correspond en fait au même point $\theta = 0$, c'est-à-dire le point A. La vitesse est alors porté par $\vec{e}_\theta$ uniquement, qui coïncide ici avec $\vec{e}_y$.

$\boxed{5}$ La vitesse s'annule quand $\theta = \pi$ ce qui correspond au point C.

$\boxed{6}$ Calcul de dérivée, sachant que $\ddot{\theta} = 0$ car $\Omega = \text{cte}$.

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= -2R\dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{e}_r - 2R\dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{e}_\theta - 2R\dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{e}_\theta - 2R(1+\cos\theta)\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r \\
&= \left[-2R\dot{\theta}^2\cos\theta - 2R\dot{\theta}^2(1+\cos\theta)\right]\vec{e}_r + \left[-2R\dot{\theta}^2\sin\theta - 2R\dot{\theta}^2\sin\theta\right]\vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} = -2R\Omega^2(1+2\cos\theta)\,\vec{e}_r - 4R\Omega^2\sin\theta\,\vec{e}_\theta .}$$

$\boxed{7}$ Calcul de norme :

$$\begin{aligned}
a^2 &= 4R^2\Omega^4(1+4\cos\theta+4\cos^2\theta) + 16R^2\Omega^4\sin^2\theta \\
&= 4R^2\Omega^4 + 16R^2\Omega^4\cos\theta + 16R^2\Omega^4(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \\
&= 20R^2\Omega^4 + 16R^2\Omega^4\cos\theta
\end{aligned}$$

$$\boxed{a = 2R\Omega^2\sqrt{5+4\cos\theta}}$$

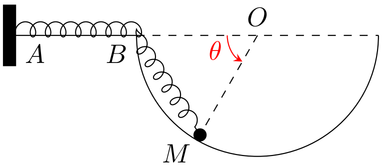
$\boxed{8}$ La norme est maximale en $\theta = 0$, c'est-à-dire au point de rebroussement.

Mécanique en polaires

Exercice de cours

Considérons un pendule simple de longueur L constante, dont la position est repéré par l'angle θ qu'il forme avec la verticale. Justifier que son mouvement est conservatif et exprimer son énergie potentielle en fonction de θ. À l'instant initial, il est lancé depuis $\theta_0 = 0$ mais avec une vitesse initiale $\dot{\theta}_0 \neq 0$. Quelle est la valeur maximale $\theta_{\max}$ qu'il atteint ?

Exercice 1 : Point matériel dans une rigole



Un point matériel M de masse m est astreint à se déplacer sans frottement dans le fond d'une rigole circulaire de centre O et de rayon $b = OB$. Il est fixé en un point A par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0. On suppose $AB = \ell_0$.

1 - Montrer que la position d'équilibre $\theta_{\text{éq}}$ est telle que

$$\tan\theta_{\text{éq}} = \frac{mg}{kb}$$

2 - Établir l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

On s'intéresse maintenant aux petites oscillations autour de la position d'équilibre. On pose alors $\theta(t) = \theta_{\text{éq}} + \varepsilon(t)$, avec $\varepsilon \ll 1$. On rappelle les développements limités au premier ordre des fonctions trigonométriques,

$$\sin\varepsilon \simeq \varepsilon \qquad \cos\varepsilon \simeq 1 \qquad \tan\varepsilon \simeq \varepsilon$$

3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par ε et en déduire la période des petites oscillations.

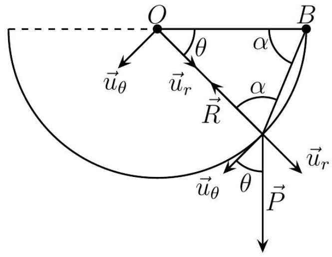
Éléments de correction de l'exercice 1 :

Voir le site professionnel de Matthieu Rigaut, exercice 14 du TD mécanique 1, PCSI programme 2002. Attention : le dispositif qu'il étudie est symétrique par rapport à celui que je vous propose, ce qui a l'inconvénient que la base du plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ n'est pas directe. Cela ne change que le schéma.

`http://www.matthieurigaut.net/public/sup/meca/cotdmeca01.pdf`

$\boxed{1.}$ *Ici la masse va avoir tendance à descendre en bas à cause du poids mais sera retenue par le ressort. La trajectoire est contrainte, ce qui va faciliter le repérage.*

Nous travaillons dans le référentiel du laboratoire. Le point M est soumis à trois forces : $\vec{P}$ son poids, $\vec{T}$ la tension exercée par le ressort et $\vec{R}$ la réaction exercée par la rigole.



Dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$, on a : $\vec{P} = P\,\sin\theta\,\vec{u}_r + P\,\cos\theta\,\vec{u}_\theta$, $\vec{R} = -R\,\vec{u}_r$ et $\vec{T} = +k\,\overrightarrow{MB}$ car B est le point où l'extrémité du ressort est au repos lorsqu'il est à vide. En écrivant $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$, nous trouvons $\vec{T} = k\,b\,[(\cos\theta - 1)\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta]$.

À l'équilibre, nous avons $\sum\vec{f} = \vec{0}$ et en projetant cette équation sur $\vec{u}_\theta$, nous obtenons après résolution : $\boxed{\tan\theta_0 = \dfrac{P}{k\,b}}$.

$\boxed{2.}$ En projetant le PFD $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\,\vec{a}(t)$ sur $\vec{u}_\theta$, nous arrivons à :

$$m\,b\,\ddot{\theta}(t) = m\,g\,\cos(\theta(t)) - k\,b\,\sin(\theta(t)) \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,\sin(\theta(t)) - \frac{g}{b}\,\cos(\theta(t)) = 0}$$

$\boxed{3.}$ Nous allons tout simplement remplacer $\theta(t)$ par $\theta(t) = \theta_0 + \varepsilon(t)$ dans l'équation différentielle régissant le mouvement. Il faut donc maintenant chercher à simplifier chacun des trois termes.

Tout d'abord nous avons $\ddot{\theta}(t) = \ddot{\varepsilon}(t)$.

Pour les autres, nous allons développer les formules trigonométriques. Par exemple :

$$\cos(\theta_0 + \varepsilon(t)) = \cos\theta_0\cos(\varepsilon(t)) - \sin\theta_0\sin(\varepsilon(t))$$

En considérant $|\varepsilon(t)| \ll 1$, cela donne $\cos\varepsilon = 1$ et $\sin(\varepsilon(t)) = \varepsilon(t)$ (car $\varepsilon(t) \ll 1$) puis :

$$\cos(\theta_0 + \varepsilon(t)) = \cos\theta_0 - \varepsilon(t)\sin\theta_0$$

Nous trouvons de même $\sin(\theta_0 + \varepsilon(t)) = \sin\theta_0\cos(\varepsilon(t)) + \sin(\varepsilon(t))\cos\theta_0 = \sin\theta_0 + \varepsilon(t)\cos\theta_0$.

En remplaçant dans l'équation différentielle précédente et en utilisant le fait que θ_0 est la position d'équilibre (*ie.* $\dfrac{m\,g}{b}\cos\theta_0 - k\,\sin\theta_0 = 0$) et en simplifiant l'expression obtenue, nous aboutissons à :

$$\boxed{\ddot{\varepsilon}(t) + \frac{k}{m\,\cos\theta_0}\,\varepsilon(t) = 0}$$

La masse oscille donc autour de sa position d'équilibre avec une pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m\,\cos\theta_0}}$ et une période $\boxed{T_0 = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{m\,\cos\theta_0}{k}}}$.

Mécanique en polaires

Exercice de cours

On considère un train en mouvement rectiligne à vitesse V_0. À partir de l'instant $t = 0$, le mécanicien freine, ce que l'on modélise par une force $\overrightarrow{F}$ constante s'appliquant au train. En ne prenant en compte que cette force, déterminer par application du théorème de l'énergie cinétique la distance d'arrêt du train.

Exercice 1 : Relèvement d'un virage [écrit E3a MP 2017]

On étudie le mouvement d'une voiture de masse m au cours d'un virage, modélisé par un arc de cercle horizontal de rayon R et de centre O. On ne tient pas compte des frottements de l'air.

1 - Rappeler les expressions de la vitesse et de l'accélération d'un mouvement circulaire en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'origine O et d'axe vertical Oz.

2 - On veut parcourir cette portion de route à vitesse constante v. Que peut-on dire de la vitesse angulaire de rotation sur l'arc de cercle ? En déduire l'expression de l'accélération du véhicule en coordonnées cylindriques.

3 - Exprimer la composante normale N de la réaction de la route.

4 - Montrer qu'il existe forcément une force radiale $\overrightarrow{T}$ au cours du mouvement. Exprimer sa norme en fonction de m, v et R.

Pour que le virage soit pris dans de bonnes conditions de sécurité, cette force doit correspondre à la composante tangentielle de la réaction de la route lorsqu'il n'y a pas glissement c'est-à-dire que sa norme T doit être inférieure à λN où N est la composante normale de la réaction et λ le coefficient de frottement.

5 - Montrer que pour qu'il en soit ainsi, la vitesse ne doit pas dépasser une valeur maximale $v_{\max}$ qu'on exprimera en fonction de λ, g et R. Donner sa valeur numérique sur route sèche avec $R = 50\,\mathrm{m}$ et $\lambda = 0{,}7$

6 - Si le virage est mouillé voire verglacé, que peut-on dire du coefficient de frottement ? de la vitesse maximale avec laquelle on peut aborder le virage ? Vers quelle limite tend $v_{\max}$ quand le frottement tend à s'annuler ?

Pour améliorer le contact pneu-route, on relève le virage d'un angle β, voir figure 1. La valeur de β est obtenue en cherchant à annuler l'accélération verticale. On suppose ici qu'il n'y a pas de frottement.

projection perpendiculaire à $\overrightarrow{u_z}$ projection perpendiculaire à $\overrightarrow{u_\theta}$

Figure 1 – Relèvement d'un virage.

7 - Dans ce cas, déterminer l'expression de la norme de la réaction normale N en fonction de m, g et β.

8 - Montrer que l'accélération radiale correspond à la composante horizontale de la réaction normale. En déduire la valeur de la vitesse constante v dans le virage en fonction de g, R et β. Donner sa valeur pour $\beta = 20°$ et $R = 50\,\mathrm{m}$.

9 - Calculer la valeur de β pour retrouver la vitesse $v_{\max}$ obtenue question 5.

10 - La valeur de β correspond à une vitesse v_{ref} donnée. Que se passe-t-il lorsque la vitesse est plus faible ? plus grande ?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

1 $r = R = \text{cte}$ donc $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$.

2 $\dot{\theta} = v/R = \text{cte}$ d'où $\vec{a} = -\dfrac{v^2}{R}\vec{u}_r$.

3 TRC projeté sur la verticale : $N = mg$

4 TRC avec cette force $\vec{T}$:

$$-m\frac{v^2}{R}\vec{u}_r = \vec{T} + \vec{P} + \vec{N} \qquad \text{d'où} \qquad \vec{T} = -m\frac{v^2}{R}\vec{u}_r\,.$$

5 $m\dfrac{v^2}{R} \leq \lambda mg$ donne $v \leq \sqrt{\lambda Rg} = 18{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

6 $v_{\max}$ diminue si λ diminue, et s'il n'y a plus de frottement on ne peut plus du tout tourner ... logique !

7 Pas de frottement implique $T = 0$ ce qui est bien incongru ! Le TRC s'écrit

$$-m\frac{v^2}{R}\vec{u}_r = \vec{P} + \vec{N}$$

L'absence d'accélération verticale implique en projection que $N\cos\beta = mg$.

8 Projection radiale donne

$$-m\frac{v^2}{R} = -N\sin\beta$$

et comme $N = mg/\cos\beta$ alors on obtient

$$v = \sqrt{Rg\tan\beta} = 13{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

9 $\sqrt{Rg\tan\beta} = \sqrt{\lambda Rg}$ donne $\beta = \arctan\lambda$.

10 Connaissant la vitesse v on peut déterminer la norme N via la projection radiale du TRC, puis ensuite le signe de l'accélération verticale via la projection verticale. Si $v < v_{\text{réf}}$ le véhicule descend la pente, sinon il la monte. Résultat qui a peu de sens physiquement car les frottements ont été négligés.

Mécanique en polaires

Exercice 1 : Piégeage d'un électron

Considérons le mouvement selon un axe (Oz) d'un électron de masse $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ et de charge $-e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ dans un dispositif de piégeage. Son énergie potentielle y vaut

$$E_\mathrm{p}(z) = \frac{e\,V_0}{2\,d^2} z^2$$

où $V_0 = 5{,}0\,\mathrm{V}$ et $d = 6{,}0\,\mathrm{mm}$.

En négligeant tout phénomène dissipatif, c'est-à-dire en supposant l'énergie mécanique conservée, calculer la fréquence des oscillations de l'électron dans le piège.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

L'énergie mécanique est simplement la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle,

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{e\,V_0}{d^2} z^2\,.$$

Comme elle est supposée conservée, alors sa dérivée temporelle est nulle, d'où

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{e\,V_0}{d^2} z\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Si l'électron oscille dans le piège, alors sa vitesse n'est pas constamment nulle. Pour calculer la fréquence des oscillations, on peut donc diviser par $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$. Diviser en outre par m conduit à

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{e\,V_0}{m\,d^2} z = 0\,.$$

L'équation différentielle que vérifie le mouvement de l'électron est donc celle d'un oscillateur harmonique, dont la fréquence propre vaut

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e\,V_0}{m\,d^2}} = 25 \cdot 10^6\,\mathrm{Hz} = 25\,\mathrm{MHz}}$$

Exercice 2 : Anneau sur une tige en rotation

Une tige $\mathcal{T}$ horizontale passant par O tourne autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire ω constante. Un anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, peut coulisser sans frottement sur la tige. Il est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) dans le plan (Oxy).

À l'instant $t = 0$, l'anneau est abandonné sans vitesse initiale par rapport à la tige à la distance r_0 de l'origine O. On suppose de plus qu'à ce même instant, la tige est confondue avec l'axe (Ox) : $\theta(t{=}0) = 0$.

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

2 - Déterminer la loi horaire $r(t)$ en fonction de r_0 et ω. Tracer l'allure de $r(t)$ pour $t \geq 0$.

3 - En déduire l'équation de la trajectoire $r(\theta)$ et la représenter.

Éléments de correction de l'exercice 2 :

On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$\boxed{1}$ L'anneau est soumis à
- ▷ son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u}_z$;
- ▷ la réaction de la tige $\overrightarrow{R}$ qui est normale à la tige puisqu'on néglige tout frottement. Cela signifie qu'elle ne comporte pas de composante radiale et qu'elle s'écrit ainsi $\overrightarrow{R} = R_\theta\,\overrightarrow{u}_\theta + R_z\,\overrightarrow{u}_z$.

Par ailleurs, on retrouve rapidement l'expression de l'accélération du point M :

$$\overrightarrow{OM} = r.\vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}.\vec{u}_r + \dot{r}(\dot{\theta}.\vec{u}_\theta) + \dot{r}\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\dot{\theta}(-\dot{\theta}.\vec{u}_r)$$

et avec $\dot{\theta} = \omega$ la vitesse angulaire constante ici, on aboutit à $\vec{a} = (\ddot{r} - \omega^2 r).\vec{u}_r + 2\omega\dot{r}.\vec{u}_\theta$.

On peut ainsi écrire le principe fondamental de la dynamique sous la forme :

$$m\vec{a} = \vec{p} + \vec{R} \Rightarrow m[(\ddot{r} - \omega^2 r).\vec{u}_r + 2\omega\dot{r}.\vec{u}_\theta] = -mg.\vec{u}_z + R_\theta.\vec{u}_\theta + R_z.\vec{u}_z$$

Par projection selon $\vec{u}_r$ de l'équation vectorielle précédente on obtient l'équation différentielle en $r(t)$:

$$m(\ddot{r} - \omega^2 r) = 0 \Rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r$$

la projection du PFD selon $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_\theta$ permet d'obtenir $R_z = mg$ et $R_\theta = 2\omega\dot{r}$.

2 La solution de l'équation différentielle du second ordre, à coefficients constants, de signes **différents** en $r(t)$ est de la forme $r(t) = A.\exp(\omega t) + B.\exp(-\omega t)$ où A et B sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales :

$$\left|\begin{array}{l} r(0) = r_0 \\ \dot{r}(0) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{ll} A + B = r_0 & (1) \\ \omega A - \omega B = 0 & (2) \end{array}\right. \text{ et } (1){+}(2)/\omega \Rightarrow 2A = r_0 \text{ soit } A = \frac{r_0}{2} = B$$

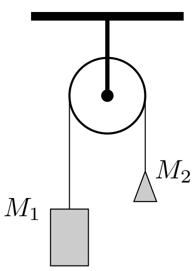
On en déduit finalement $r(t) = \frac{r_0}{2}[\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)] = r_0 \cosh(\omega t)$ (fonction cosinus hyperbolique) : $r(t)$ diverge.

3 Comme $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$, on en déduit $\theta = \omega t + 0$ en considérant $\theta(0) = 0$ et ainsi $r(t) = r_0 \cosh\theta$.

La trajectoire est donc une spirale exponentielle.

Mécanique en polaires

Exercice 1 : Machine d'Atwood



La machine d'Atwood est un appareil conçu pour l'étude de la chute libre par George Atwood (physicien anglais du XVIII[e] siècle) et longtemps amélioré pour se rapprocher davantage d'une véritable chute. L'intérêt de l'invention est de contourner la brièveté du temps de parcours en diminuant l'accélération des masses et de permettre par là la mesure du temps écoulé de bien meilleure façon que les plans inclinés déjà essayés par Galilée.

La machine se compose de deux solides M_1 et M_2, de masses respectives m_1 et m_2, reliés par un fil et suspendus de part et d'autre d'une poulie. La poulie est fixée à un bâti. Pour simplifier l'étude, le fil et la poulie sont supposés idéaux et transmettent parfaitement les efforts.

Déterminer les accélérations des deux solides ainsi que la force exercée par le fil sur M_1 et M_2.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

Menons l'étude dans le référentiel terrestre, considéré galiléen.

- **Analyse qualitative**

Les deux solides sont en mouvement de translation rectiligne vertical : il suffit donc d'introduire un axe z vertical, par exemple orienté vers le haut, pour repérer la position des deux solides.

Par ailleurs, les deux solides sont liés par une corde tendue inextensible : si M_1 (qui sur le schéma semble le plus lourd, on suppose donc $m_1 > m_2$) descend de Δz alors M_2 monte d'autant. Ils ont donc un vecteur vitesse de même norme, de même direction, mais de sens opposé. On comprend aussi qu'il en est de même pour les accélérations, on pose donc

$$\vec{a} = \vec{a}_1 = -\vec{a}_2 = -a\,\vec{e}_z$$

où a est la norme de l'accélération.

- **Mise en équation**

Appliquons maintenant le TRC au système composé du solide M_1 seul. Ce solide est soumis à son poids et à la tension de la corde $\vec{T}_1 = +T_1\,\vec{u}_z$ où T_1 désigne la norme. Ainsi,

$$m_1\,\vec{a} = m_1\,\vec{g} + \vec{T}_1 \qquad \text{soit} \qquad -m_1 a = -m_1 g + T_1$$

en projection sur l'axe z. De même, le solide M_2 est soumis à son poids et à la tension $\vec{T}_2 = +T_2\,\vec{u}_z$ de la corde, donc

$$m_2\,\vec{a}_2 = -m_2\,\vec{a} = m_2\,\vec{g} + \vec{T}_2 \qquad \text{soit} \qquad m_2 a = -m_2 g + T_2$$

en projetant.

> *Appliquer le TRC à un système composé des deux solides M_1 et M_2 serait une mauvaise idée : la loi de la quantité de mouvement s'applique au centre d'inertie, mais comme l'un des solides monte alors que l'autre descend, le mouvement du centre d'inertie ne renseigne en rien sur le mouvement de chacun des solides. Le même raisonnement vaut aussi pour les systèmes qui incluraient le fil et les poulies.*

On a à ce stade un système de deux équations ... mais à trois inconnues. Pour s'en sortir, il faut revenir à la modélisation du dispositif. L'énoncé indique que « la corde et la poulie transmettent parfaitement les efforts », ce qui revient à dire que la norme de la force de tension de la corde est la même tout au long de la corde et de part et d'autre de la poulie,

$$T_1 = T_2 = T\,.$$

Le système se simplifie donc en

$$\begin{cases} -m_1 a = -m_1 g + T \\ m_2 a = -m_2 g + T \end{cases}$$

En soustrayant les deux lignes, on peut isoler a,

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g \qquad \text{donc} \qquad \boxed{a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,g\,.}$$

On remarque que $a < g$, la chute est donc bien ralentie par rapport au cas de la chute libre. En les multipliant par « l'autre » masse et en les sommant, on peut en déduire T,

$$0 = -2m_1 m_2 g + (m_1 + m_2)T \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g\,.}$$

Enfin, terminons par tester la vraisemblance de la solution. Premier point à vérifier, a et T sont des normes et sont bien toujours positives (rappelons qu'on a supposé $m_1 > m_2$). Deuxième test possible, on peut noter que si les deux masses sont égales alors elles restent en équilibre si elles sont initialement immobiles.

> *L'expression de T permet de constater que contrairement à l'intuition qu'on peut en avoir, $T \neq m_2 g$, ou autrement dit M_2 ne retient pas M_1 de tout son poids. Cela n'a rien d'un problème : une force de liaison est toujours inconnue a priori.*