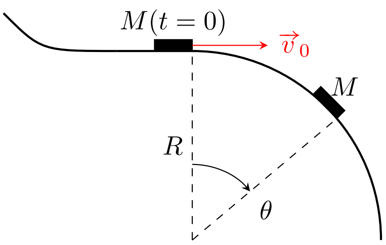
Énergie mécanique

Question de cours

On considère une particule de masse m et charge q en mouvement dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et stationnaire. Elle possède initialement une vitesse $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$. En admettant que le mouvement est circulaire uniforme, définir et calculer le rayon cyclotron.

Exercice 1 : Une luge sur une bosse



Une luge, modélisée par un point matériel M de masse m, arrive sur une bosse à profil circulaire avec une vitesse horizontale $\vec{v}_0$. Tant que la luge suit ce profil, sa trajectoire est circulaire de rayon R et sa position est repérée par l'angle θ. On néglige tout frottement.

1 - Déterminer la norme de la force de réaction $\vec{N}$ exercée par la piste sur la luge en fonction de sa position θ et de sa vitesse angulaire $\dot\theta$.

2 - En déduire l'expression de N en fonction de θ et de la vitesse initiale v_0.

3 - Montrer que la luge quitte la piste même si v_0 est faible. Exprimer l'angle de décollage θ_d.

4 - À quelle condition cet angle existe-t-il ? Identifier une vitesse limite v_lim. Que se passe-t-il si $v > v_\mathrm{lim}$?

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Appliquons la loi de la quantité de mouvement à la luge, en mouvement par rapport au référentiel terrestre que l'on considère galiléen. On se place dans le repère polaire de centre O défini figure 1. La luge est soumise son poids,

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\cos\theta\,\vec{e}_r + mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta\,,$$

et à la force de réaction de la piste,

$$\vec{N} = N\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad N > 0\,.$$

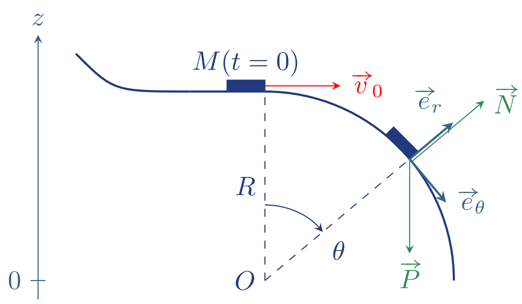


Figure 1 – **Schéma des notations.**

Ainsi, par application de la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre,

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{N}$$

ce qui donne en projetant sur $\vec{e}_r$

$$m(\ddot r - r\dot\theta^2) = -mR\dot\theta^2 = -mg\cos\theta + N \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{N = -mR\dot\theta^2 + mg\cos\theta\,.}$$

$\boxed{2}$ Pour faire apparaître la vitesse initiale au lieu de $\dot\theta$, utilisons la conservation de l'énergie mécanique. En effet, la luge n'est soumise qu'à une force conservative (son poids) et à une force qui ne travaille pas (la réaction de la piste). Exprimons l'énergie potentielle de pesanteur de la luge. Comme l'axe z est ascendant et en prenant l'origine des énergies potentielles en $z = 0$, alors

$$E_\mathrm{pp} = mgz = mgR\cos\theta\,.$$

De plus, la vitesse de la luge a pour norme $v = R\dot\theta$, donc son énergie cinétique vaut

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2} m R^2 \dot\theta^2 \,.$$

Finalement, son énergie mécanique vaut

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m R^2 \dot\theta^2 + mgR\cos\theta \,.$$

Cette quantité est constante, égale à sa valeur initiale,

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m {v_0}^2 + mgR$$

Par identification, on en déduit

$$\frac{1}{2} m {v_0}^2 + mgR = \frac{1}{2} m R^2 \dot\theta^2 + mgR\cos\theta$$

ce qui permet d'isoler le terme à remplacer dans l'expression de N,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m R^2 \dot\theta^2 &= \frac{1}{2} m {v_0}^2 + mgR(1-\cos\theta) \\ -mR\dot\theta^2 &= -\frac{m{v_0}^2}{R} + 2mg(\cos\theta - 1) \,. \end{aligned}$$

On en déduit finalement

$$\boxed{N = -\frac{m{v_0}^2}{R} + mg\left(3\cos\theta - 2\right) \,.}$$

3 La luge quitte la piste si la force de réaction s'annule, c'est-à-dire pour un angle θ_d tel que $N(\theta_\mathrm{d}) = 0$, soit

$$0 = -\frac{m{v_0}^2}{R} + mg\left(3\cos\theta_\mathrm{d} - 2\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\theta_\mathrm{d} = \arccos\left(\frac{{v_0}^2}{3gR} + \frac{2}{3}\right) \,.}$$

Si la vitesse de la luge est faible, à la limite $v_0 \simeq 0$, cet angle est bien défini et vaut $\arccos 2/3$. Ainsi, **la luge quitte la piste quelle que soit sa vitesse initiale.**

4 Pour que l'arccosinus soit défini, il faut que son argument soit inférieur à 1, c'est-à-dire

$$\frac{{v_0}^2}{3gR} + \frac{2}{3} \leq 1 \qquad \text{soit} \qquad {v_0}^2 \leq 3gR \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{v_0 < \sqrt{gR} = v_\mathrm{lim} \,.}$$

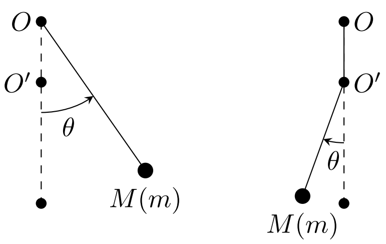
Si $v_0 > v_\mathrm{lim}$, les équations établies dans les questions précédentes indiquent que la norme de la force de réaction $\overrightarrow{N}$ serait toujours négative, quelle que soit la valeur de θ. Cela n'a pas de sens, et signifie que l'hypothèse utilisée pour les établir (contact entre la luge et la piste) est fausse. Par conséquent, on en déduit qu'il n'y a jamais de contact : **la luge quitte la piste dès $\boldsymbol{\theta = 0}$**, et elle suit une trajectoire parabolique (chute libre).

Énergie mécanique

Exercice de cours

On considère un train en mouvement rectiligne à vitesse V_0. À partir de l'instant $t = 0$, le mécanicien freine, ce que l'on modélise par une force $\vec{F}$ constante s'appliquant au train. En ne prenant en compte que cette force, déterminer par application du théorème de l'énergie cinétique la distance d'arrêt du train.

Exercice 1 : Pendule simple modifié



On considère un pendule simple modifié. Une masse, décrite par un point matériel M de masse m, est accrochée à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable dont l'autre extrémité est fixe en O. On néglige tout frottement.

On repère la position du pendule par l'angle θ qu'il forme avec la verticale. Lorsque $\theta > 0$, le système se comporte comme un pendule simple de centre O et de longueur de fil L. À la verticale et en dessous de O, un clou est planté en O' tel que $OO' = L/3$. Le clou bloque la partie haute du fil vers la gauche. Quand $\theta < 0$, le système se comporte donc comme un pendule simple de centre O' et de longueur de fil $2L/3$.

À l'instant $t = 0$, on abandonne le mobile M sans vitesse initiale en donnant au fil une inclinaison $\theta_0 > 0$. On note t_1 la date de la première rencontre du fil avec le clou et t_2 la date de la première annulation de la vitesse du mobile pour $\theta < 0$. À la date t_1^- immédiatement inférieure à t_1, le fil n'a pas encore touché le clou, et à la date t_1^+, immédiatement supérieure, le fil vient de toucher le clou.

1 - Par application du théorème de la puissance cinétique, étabir l'équation différentielle vérifiée par θ pour la première phase du mouvement. Simplifier cette équation dans l'hypothèse des oscillations de faible amplitude. On se place dans cette hypothèse tout au long de l'exercice.

2 - Sans résoudre d'équation, déterminer la durée δt_1 de la première phase du mouvement.

3 - En utilisant une méthode énergétique, déterminer la vitesse $v_1^- = v(t_1^-)$ de M à la date t_1^-. En déduire sa vitesse angulaire ω_1^-.

4 - Le blocage de la partie supérieure du fil par le clou ne s'accompagne d'aucun transfert énergétique. En déduire la vitesse $v_1^+ = v(t_1^+)$ de M à cette date ainsi que la vitesse angulaire ω_1^+.

5 - En utilisant les résultats des questions précédentes, donner **sans calcul** la durée δt_2 de la seconde phase entre t_1 et t_2.

6 - Déterminer l'expression de l'angle θ_2 à la date t_2.

7 - Décrire brièvement la suite du mouvement du système et déterminer sa période T.

8 - Dresser l'allure du portrait de phase.

Éléments de correction de l'exercice 1 :

$\boxed{1}$ Travail du poids : $m\vec{g}\cdot\vec{v} = -mgL\dot\theta\sin\theta$, force de tension du fil ne travaille pas. Finalement,

$$\ddot\theta + \frac{g}{L}\theta = 0\,.$$

$\boxed{2}$ δt_1 correspond à exactement un quart de la période du pendule simple, donc

$$\delta t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\,.$$

$\boxed{3}$ Conservation de l'énergie mécanique, donc

$$-mgL\cos\theta_0 = \frac{1}{2}m{v_1^-}^2 - mgL \qquad \text{d'où} \qquad v_1^- = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)} \qquad \text{et} \qquad \omega_1^- = \frac{v_1^-}{L} = \frac{2g(1-\cos\theta_0)}{L}$$

4 Conservation de l'énergie mécanique, donc ici de l'énergie cinétique, mais discontinuité de longueur du fil d'où

$$v_1^+ = v_1^- = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)} \qquad \text{et} \qquad \omega_1^+ = \frac{v_1^+}{2L/3} = \frac{3}{2}\frac{2g(1-\cos\theta_0)}{L}$$

5 Quart de période d'un pendule de longueur $2L/3$: $\delta t_2 = \frac{\pi}{2}\frac{2L}{3g}$.

6 Conservation de l'énergie mécanique,

$$\frac{1}{2}m{v_1^+}^2 - mgL = 0 - mg\left(-\frac{L}{3} - \frac{2L}{3}\cos\theta_2\right) \qquad \text{d'où} \qquad \cos\theta_2 = \frac{3\cos\theta_0 - 1}{2}\,.$$

7 $T = 2(\delta t_1 + \delta t_2)$

8 Deux demi-ellipses de tailles différentes.