








# Équations de Maxwell

## Énergie électromagnétique

-  Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
-  Difficulté technique et calculatoire ;
-  Exercice important.



Flasher ce code pour accéder au corrigé

Ceinture		Proposition de parcours d'entraînement
	Ceinture blanche	Questions de cours + exercices 1
	Ceinture jaune	Questions de cours + exercices 1 et 4
	Ceinture rouge	Questions de cours (★) + exercices 2 à 5
	Ceinture noire	Questions de cours (★) + exercices 2 à 6

### Questions et applications de cours

Seuls les étudiants du groupe PT\* seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

19.1 - Énoncer les équations de Maxwell sous forme locale et intégrale.

(★) 19.2 - Énoncer le bilan d'énergie pour un volume de contrôle macroscopique en l'expliquant qualitativement. En déduire l'équation locale de Poynting.


19.3 - Considérons un conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$ , longueur  $\ell$  et rayon  $a$ . On impose un champ  $\vec{E}$  uniforme, ce qui crée un courant de densité  $\vec{j}$  uniforme, et par suite un champ magnétique

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{a^2} I \vec{e}_\theta.$$

Calculer la puissance totale dissipée par effet Joule dans l'échantillon, le vecteur de Poynting, et la puissance rayonnée. Interpréter physiquement.

### Exercice 1 : Chauffage par induction



-  ▷ Équations de Maxwell ;
- ▷ Puissance volumique d'effet Joule ;
- ▷ Intégration de dérivées partielles.

On étudie dans cet exercice un dispositif modèle permettant de chauffer un cylindre métallique par induction électromagnétique, potentiellement jusqu'à une température supérieure à sa température de fusion. Il s'agit d'une bobine parcourue par un courant alternatif  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$  de forte intensité. Au centre de cette bobine est placé un cylindre conducteur, qui est le métal à chauffer, de conductivité électrique  $\gamma$ . Ce principe est par exemple utilisé dans des dispositifs de soudure électromagnétique.

1 - Faire un schéma du dispositif. Donner sans calcul l'expression du champ créé par la bobine. Pour simplifier, on se place dans l'ARQS magnétique et on néglige tout effet de bord, ce qui revient à assimiler la bobine à un solénoïde infini.

2 - Justifier qu'un champ électrique apparaît au sein de la bobine. En déduire qualitativement pourquoi le métal placé au centre chauffe.

3 - On peut montrer que le champ électrique induit dans le métal est de la forme  $\vec{E} = E_\theta(r, t) \vec{e}_\theta$ . En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, établir son expression en fonction notamment de  $r$  et  $I_0$ .

4 - En déduire la densité de courant induite dans le matériau, puis l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule. Où le métal va-t-il fondre en premier ?

$$\text{Donnée : } \text{rot } \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

## Exercice 2 : Manipulation des équations de Maxwell

💡 1 | ✂ 2



▷ Équations de Maxwell.

On suppose que règne dans l'espace le champ électromagnétique

$$\begin{cases} \vec{E}(M, t) = f(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x \\ \vec{B}(M, t) = g(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y \end{cases}$$

où  $\tau$  est une constante de temps et  $f, g$  deux fonctions que l'on cherche à déterminer. On suppose que l'espace est vide de charges et de courants.

- 1 - Vérifier que la forme de ces deux champs est compatible avec les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.
- 2 - Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une relation entre  $g(z)$  et  $f'(z)$ .
- 3 - Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une relation entre  $f(z)$  et  $g'(z)$ .
- 4 - En déduire une équation différentielle vérifiée par  $f$ . La résoudre en supposant que  $\vec{E}(z=0, t=0) = E_0 \vec{e}_x$  et que le champ électrique est nul en  $z \rightarrow +\infty$  à tout instant.
- 5 - En déduire l'expression complète du champ électromagnétique.

## Exercice 3 : Solénoïde dans l'ARQS

💡 2 | ✂ 2



▷ ARQS magnétique ;  
▷ Bilan d'énergie.

Un solénoïde d'axe ( $Oz$ ), de longueur  $H$ , de rayon  $a$ , compte  $n$  spires jointives par unité de longueur. Il est parcouru par un courant  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ . Les effets de bord sont négligés.

$$\text{Donnée : } \text{rot } \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

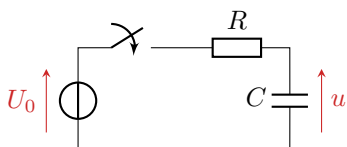
- 1 - À quelle condition sur  $\omega$  le solénoïde peut-il être étudié dans l'ARQS magnétique ? Donner sans démonstration l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace dans cette hypothèse.
- 2 - On admet qu'un plan de symétrie de  $\partial \vec{B} / \partial t$  est un plan d'antisymétrie pour le champ électrique : en déduire que  $\vec{E}$  est porté par  $\vec{e}_\theta$ . Justifier de plus que  $\vec{E}$  ne dépend ni de  $z$  ni de  $\theta$ . En déduire finalement l'expression du champ électrique en tout point de l'espace.
- 3 - Exprimer l'énergie magnétique  $\langle U_m \rangle$  et l'énergie électrique  $\langle U_e \rangle$  moyennes contenues dans le solénoïde. Que dire du rapport  $\langle U_e \rangle / \langle U_m \rangle$  ? Commenter.
- 4 - Exprimer le vecteur de Poynting. Comparer la puissance rayonnée au travers du solénoïde à la variation de son énergie électromagnétique. Commenter.

## Exercice 4 : Échanges énergétiques lors de la charge d'un condensateur

💡 2 | ✂ 2



▷ Équations de Maxwell ;  
▷ Bilan d'énergie électromagnétique.



Le but de l'exercice est d'étudier le bilan énergétique du circuit ci-contre par une approche électromagnétique. Le condensateur est initialement déchargé, et l'interrupteur est fermé à l'instant  $t = 0$ .

- 1 - Déterminer l'évolution de  $u(t)$  par une approche électrocinétique.

Le condensateur est modélisé par deux disques parallèles de rayons  $a$ , d'axe ( $Oz$ ), séparés une épaisseur  $e \ll a$ , de sorte que l'on puisse considérer que le condensateur est un plan chargé infiniment grand. Le milieu entre les armatures est assimilé au vide. On suppose la charge suffisamment lente pour pouvoir généraliser les résultats obtenus en électrostatique :  $C = \varepsilon_0 \pi a^2 / e$  et dans l'espace inter-armatures

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \vec{e}_z.$$

2 - Exprimer  $\vec{E}$  en fonction de  $u$  dans l'espace inter-armatures.

3 - Quelles sont les sources de champ magnétique entre les armatures ? Justifier à partir d'une équation de Maxwell que les propriétés de symétrie de  $\vec{j}$  et de  $\partial \vec{E} / \partial t$  ont les mêmes conséquences sur le champ magnétique. En déduire que  $\vec{B} = B_\theta \vec{e}_\theta$ .

4 - En utilisant les équations de Maxwell-Thomson et Maxwell-Ampère, déterminer  $\vec{B}$  en fonction de  $u$  dans l'espace inter-armatures.

5 - Exprimer le vecteur de Poynting à l'intérieur du condensateur. En déduire l'expression de la puissance rentrant dans le volume entre les armatures. D'où vient cette puissance ?

6 - Réécrire la puissance entrante comme la dérivée temporelle d'une fonction de  $C$  et  $u$ . Commenter le résultat obtenu.

7 - En déduire l'expression de l'énergie électromagnétique qui est entrée dans le condensateur pendant la charge en fonction de  $C$  et  $U_0$ .

Donnée :

$$\triangleright \operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\triangleright \operatorname{rot} \vec{B} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

### Exercice 5 : Décharge d'un cylindre dans un autre

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | ☒



▷ Équations de Maxwell.

Considérons deux cylindres de même axe ( $Oz$ ), de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ . Le cylindre de rayon  $R_1$  porte initialement une charge  $Q_0$  en surface. Pour  $t < 0$ , l'espace entre les cylindres est assimilé au vide. À  $t = 0$  on introduit entre les deux cylindres un fluide de conductivité  $\gamma$ , qui entraîne la décharge du cylindre de rayon  $R_1$ . On note  $Q(t)$  la charge portée par ce cylindre.

1 - Déterminer la direction du champ électrique  $\vec{E}$  et déterminer la variable dont dépend sa norme.

2 - Montrer que le champ magnétique est nul.

3 - Exprimer  $\vec{E}$  en fonction de  $Q(t)$ .

4 - En utilisant une équation de Maxwell, déterminer une équation différentielle vérifiée par  $Q(t)$ . En déduire un temps caractéristique de décharge.

5 - Que se serait-il passé si c'était le cylindre de rayon  $R_2$  qui avait été initialement chargé ?

### Exercice 6 : Décharge d'une boule chargée dans l'air

💡 3 | ✂ 2



▷ Équations de Maxwell ;

▷ Bilan d'énergie électromagnétique.

Une boule porte une charge uniformément répartie sur sa surface. Cette boule se trouve dans l'air, gaz légèrement conducteur, au travers duquel la boule se décharge progressivement.

On rappelle l'équation de Poynting (bilan local d'énergie électromagnétique) :

$$\operatorname{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

- 1 - Analyser les symétries du problème. Conclure sur les champs.
- 2 - Interpréter physiquement chaque terme de l'équation de Poynting. En déduire le champ électrique à l'extérieur de la boule à tout instant.
- 3 - Déterminer la charge portée par la boule à tout instant.
- 4 - Déterminer l'énergie dissipée dans le milieu au cours du processus. Interpréter le résultat.