BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

Cours 1 – Électronique

Version prof

Systèmes linéaires

Plan du cours

I Système linéaire, continu et invariant temporellement **2**
- I.A Définitions . . . 2
- I.B Description temporelle d'un SLCI : équation différentielle . . . 3
- I.C Description fréquentielle d'un SLCI : fonction de transfert harmonique. . . . 5
- I.D Lien entre les descriptions temporelle et fréquentielle . . . 8

II Stabilité **9**
- II.A Définition . . . 9
- II.B Cas d'un système du premier ordre . . . 10
- II.C Cas d'un système du second ordre . . . 10

III Signal de sortie d'un SLCI en régime établi **12**
- III.A Décomposition de Fourier d'un signal quelconque . . . 12
- III.B Reconstruire le signal de sortie d'un SLCI . . . 13

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 2 « Électronique », bloc 1 « Stabilité des systèmes linéaires ».

Le bloc 1 s'intéresse aux propriétés des systèmes linéaires déjà abordés en première année. Les capacités relatives au filtrage et à la décomposition harmonique d'un signal périodique sont révisées sans ajout de nouvelles compétences. L'étude est complétée par une analyse de la stabilité des systèmes du premier et du second ordre en examinant le régime transitoire associé à la relation différentielle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Fonction de transfert d'un système entrée-sortie linéaire continu et invariant.	Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (relation différentielle).
Stabilité.	Étudier la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 à partir des signes des coefficients de la relation différentielle ou de la fonction de transfert.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : appendice 2 « Outils mathématiques », bloc 2 « Analyse de Fourier ».

Notions et contenus	Capacités exigibles
Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni. Utiliser un raisonnement par superposition.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Ces cinq dernières années au concours

- ▷ Écrit : épreuve A 2019, 2021 et 2023, souvent du filtrage au sein de parties d'électronique plus larges.
- ▷ Oral : filtrage régulièrement, le reste plus rarement.

Ce chapitre consiste essentiellement en des révisions, dont l'objectif est de (re)faire le lien entre les descriptions temporelle (équation différentielle) et fréquentielle (fonction de transfert) d'un système.

I - Système linéaire, continu et invariant temporellement

I.A - Définitions

On s'intéresse dans la suite à un système physique pouvant être sollicité par une **grandeur d'entrée**, ou **forçage**, notée $e(t)$. La réaction du système se traduit par la modification d'une **grandeur de sortie**, ou **réponse**, notée $s(t)$.

> ***Exemples :***
>
> *Circuit RC, pH-mètre (concentration en entrée et probablement tension en sortie), moteur électrique (fém en entrée et vitesse de rotation en sortie, etc.)*
>
> Espace 1

> ***Remarque :*** *les notions abordées dans ce chapitre se généralisent aux systèmes à plusieurs entrées et/ou sorties sans difficulté conceptuelle mais au prix d'une description matricielle.*

- **Différents types de régimes**

En fonction *du forçage* $e(t)$ on distingue :

▷ **Régime libre :**

le forçage est constamment nul, aucune énergie n'est apportée au sysème.

Espace 2

▷ **Régime forcé :**

le forçage n'est pas constamment nul, un générateur apporte de l'énergie au système.

Espace 3

En fonction *de la réponse* $s(t)$ on distingue :

▷ **Régime permanent** ou **établi** :

la réponse est du même type que le forçage, c'est-à-dire constant, ou sinusoïdal, ou périodique, ou ...

Espace 4

> ***Remarque :*** *Bien que l'abus de langage soit fréquent, régime permanent n'est pas forcément synonyme de régime constant ou stationnaire : un régime permanent sinusoïdal dépend du temps.*

▷ **Régime transitoire :**

régime qui suit un changement de forçage et qui précède le régime permanent.

Espace 5

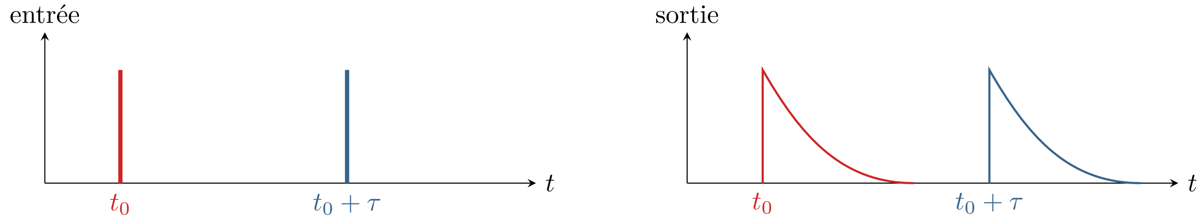
- **Caractérisation du système**

Un système est dit **linéaire** si pour une entrée (un forçage) $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ (λ_1, λ_2 deux constantes)
il donne une sortie (une réponse) $s = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$
avec s_1 et s_2 les sorties associées aux entrées e_1 et e_2 prises séparément.

Ainsi, par définition, un système linéaire vérifie le **principe de superposition**.

Un système est dit **continu** lorsqu'il traite des grandeurs analogiques, c'est-à-dire qui varient dans le temps de façon continue en pouvant prendre « n'importe quelle » valeur. Par opposition, on distingue les systèmes **numériques**, cf. chapitre dédié.

Enfin, un système est dit **invariant temporellement** si ses caractéristiques n'évoluent pas au cours du temps. Traduit mathématiquement, cela signifie que si $s(t)$ est la réponse à l'entrée $e(t)$ alors pour tout τ, $s'(t) = s(t-\tau)$ est la réponse à l'entrée $e(t-\tau)$. Qualitativement, cela signifie que le système donne toujours la même sortie pour une entrée donnée, quel que soit l'instant auquel cette entrée est imposée.



> ***Remarque :*** *Un sytème réel vieillit, et ne reste donc pas invariant temporellement sur toute sa durée de vie … ceci dit, cela reste une excellente approximation sur de « courtes » durées.*

Les systèmes linéaires, continus, invariant temporellement sont souvent abrégés « SLCI » ou « SLIT » (on oublie le caratère continu), voire parfois « LTI » pour l'anglais *Linear Time Invariant*.

I.B - Description temporelle d'un SLCI : équation différentielle

Un système qui vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients constants est un SLCI.

En pratique, tous les SLCI que nous rencontrerons vérifieront une équation de ce type … mais ce n'est pas complètement général. En revanche, si un SLCI est décrit par une équation différentielle, alors elle est linéaire et à coefficients constants.

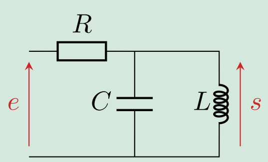
> ***Contre-exemple :*** *l'opérateur dit « de retard pur », défini par $s(t) = e(t-\tau)$ avec $\tau > 0$ n'est purement et simplement pas décrit par une équation différentielle.*

I.B.1 - Établir une équation différentielle

❶ Utiliser en alternance (une étape sur deux) les lois de Kirchoff et les lois de comportement des dipôles ;
❷ À chaque étape, remplacer les grandeurs inconnues et sans intérêt par les grandeurs connues et/ou intéressantes ;
❸ Si nécessaire, dériver l'équation de travail pour y insérer certaines lois de comportement ;
❹ Toutes les grandeurs qui apparaissent dans les équations doivent être légendées sur le schéma du circuit.

Pour arriver au résultat espéré en un temps raisonnable, **éviter absolument** de nommer toutes les tensions et tous les courants possibles puis d'écrire toutes les lois des nœuds et toutes les lois des mailles imaginables !

Application 1 : Exemple d'équation différentielle



Établir la relation différentielle entre s et e dans le circuit ci-contre.

Loi des nœuds : $$i = i_C + i_L$$

Dérivation : $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

Lois de comportement : $$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{s}{L}$$

Loi des mailles : $$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e-s) = C\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{s}{L}$$

Regroupement : $$C\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

On obtient une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Espace 6

I.B.2 - Résolution numérique d'une équation différentielle du premier ordre par la méthode d'Euler

Raisonnons sur un exemple simple : la tension aux bornes d'un condensateur d'un bête circuit RC régi par l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} u = \frac{1}{\tau} e \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \tau = RC \\ e(t) \text{ un forçage quelconque mais connu} \end{cases}$$

Comme il n'est pas possible de résoudre une équation différentielle « à tout instant » avec un ordinateur, il est nécessaire de passer par une résolution à N instants discrets $t_0, t_1, ..., t_n, ..., t_{N-1}$ en cherchant à ce que la valeur obtenue numériquement u_n soit aussi proche que possible de ce que donnerait la solution analytique $u(t_n)$. À notre niveau, le pas de temps Δt sera toujours pris constant : $t_n = n\,\Delta t$.

- **Schéma d'Euler explicite**

En pratique, il faut transformer l'équation différentielle en une relation de récurrence permettant de calculer u_{n+1} à partir uniquement de ce que l'on connaît, c'est-à-dire la tension aux instants passés $u_n, u_{n-1}, ...$, la tension de forçage à tout instant et les paramètres caractéristiques du système. La « recette » pour passer de l'équation différentielle à la relation de récurrence est appelée **schéma numérique**.

Schéma d'Euler explicite :

La dérivée est approximée par un taux de variation entre les instants t_n et t_{n+1}, et toutes les autres grandeurs sont prises à l'instant t_n.

Pour le circuit RC :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} + \frac{1}{\tau}\, u_n = \frac{1}{\tau}\, e(t_n) \qquad \text{soit} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{\tau}\big(e(t_n) - u_n\big)\,.$$

Espace 7

Bien sûr, il existe des schémas numériques plus astucieux, plus précis et/ou plus rapides, d'où l'intérêt d'utiliser des fonctions issues de bibliothèques, en particulier la fonction `odeint` du module `scipy.integrate` (cf. PTSI).

- **Un exemple d'implémentation utilisant des listes**

```python
import numpy as np

R = 1e3          # en ohms
C = 1e-6         # en farad
tau = R*C        # en secondes

E0 = 2           # amplitude du forcage, en volts
f = 1e3          # fréquence, en hertz

dt = 2e-5        # pas de temps, en s
N = 500          # nbre de pas de temps

t = [n*dt for n in range(N)]       # tps, en secondes
e = [E0 * np.cos(2*np.pi*f*tn) for tn in t]
                                   # tension d'entrée, en volts
u = [None for n in range(N)]       # tension du condensateur, en V
                                   # tout est initialisé à None,
                                   # c-a-d "rien du tout"
u[0] = 0        # condition initiale u(0) = 0 V

for n in range(N-1):
    u[n+1] = u[n] + dt/tau * ( e[n] - u[n] )
```

I.C - Description fréquentielle d'un SLCI : fonction de transfert harmonique

I.C.1 - Rappels sur les signaux harmoniques

Un **signal harmonique**, aussi appelé **signal sinusoïdal** ou **signal monochromatique**, s'écrit

$u(t) = U_\mathrm{m} \cos(\omega t + \varphi)$
+ légender en nommant amplitude, pulsation phase + rappeler les unités

Espace 8

À ce signal est associé sa **représentation complexe**, définie par

$\underline{u} = U_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = \underline{U}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ avec $\underline{U} = U_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$
+ légender en nommant l'amplitude complexe

Espace 9

Les signaux harmoniques jouent un rôle fondamental dans l'étude des SLCI :

> Si le signal d'entrée d'un SLCI est un signal harmonique de pulsation ω,
> alors en régime permanent le signal de sortie est également harmonique de même pulsation ω,
> mais les deux signaux n'ont pas forcément la même amplitude et peuvent être déphasés.

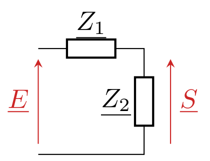
$\rightsquigarrow$ critère expérimental d'identification d'un SLCI.

I.C.2 - Fonction de transfert harmonique

> La **fonction de transfert harmonique** d'un SLCI est le rapport
> des amplitudes complexes des signaux d'entrée et de sortie en fonction de la pulsation,
> $$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}\,.$$

$|\underline{H}|$ est le rapport des amplitudes des signaux,
$\arg \underline{H}$ est le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

- **Établir une fonction de transfert**



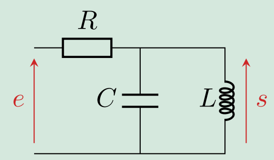
❶ Identifier des équivalences aux associations série et parallèle pour mettre le circuit sous la forme ci-contre ;
❷ Appliquer alors un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\,.$$

Cas particulier fréquent : pour écrire la fonction de transfert sous forme canonique, il est souvent judicieux d'utiliser l'admittance équivalente $\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2$,

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \times \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_2} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_1\,\underline{Y}_2}\,.$$

Application 2 : Exemple de fonction de transfert



Établir la fonction de transfert du circuit ci-contre, et l'écrire sous forme canonique

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

La bobine et le condensateur s'associent en une admittance

$$\underline{Y}_{\text{éq}} = \mathrm{j}C\omega + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}$$

On identifie alors un pont diviseur de tension, d'où

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{R + \underline{Z}_{\text{éq}}}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{éq}}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega + \dfrac{R}{\mathrm{j}L\omega}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega - \dfrac{\mathrm{j}R}{L\omega}}$$

et on identifie alors

$$\mathrm{j}RC\omega = \frac{\mathrm{j}Q\omega}{\omega_0} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{j}R}{L\omega} = \frac{\mathrm{j}Q\omega_0}{\omega}$$

d'où on déduit

$$RC = \frac{Q}{\omega_0} \qquad \text{et} \qquad \frac{R}{L} = Q\omega_0$$

puis en prenant le produit et le quotient on obtient

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad \text{et} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,.$$

- **Généralisation**

Un système dont la fonction de transfert est le quotient de deux polynômes en $\mathrm{j}\omega$ est un SLCI.

Les mêmes remarques que pour les équations différentielles tiennent toujours : bien que ce soit le cas le plus fréquent, il n'y a pas stricte équivalence. Ainsi, la fonction de transfert harmonique de l'opérateur de retard pur s'écrit $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}$ alors que c'est bien un SLCI.

I.C.3 - Diagramme de Bode

- **Définition**

Le diagramme de Bode d'un SLCI est une (double) représentation graphique de sa fonction de transfert en fonction de la pulsation :
▷ diagramme en gain : $G_{\mathrm{dB}} = 20 \log |\underline{H}|$ en fonction de ω ;
▷ diagramme en phase : $\arg \underline{H}$ en fonction de ω.
L'axe des pulsations est gradué en échelle logarithmique.

La définition du gain est à connaître dans les deux sens :
$G_{\mathrm{dB}} = 20 \log |\underline{H}| \iff |\underline{H}| = 10^{G_{\mathrm{dB}}/20}$

Espace 10

Plutôt qu'un tracé précis du diagramme de Bode on commence souvent par un **diagramme de Bode asymptotique**, construit à partir des limites basse et haute fréquence.

❶ Étudier séparément les limites basse et haute fréquence ;
❷ Pour chaque limite, **commencer** par calculer la fonction de transfert équivalente en ne conservant que les termes dominants du numérateur et du dénominateur ;
❸ **Dans un second temps**, calculer le module et l'argument pour obtenir les équations des asymptotes ;
❹ Pour un deuxième ordre, l'allure du diagramme réel est précisée en calculant explicitement la valeur en $\omega = \omega_0$.

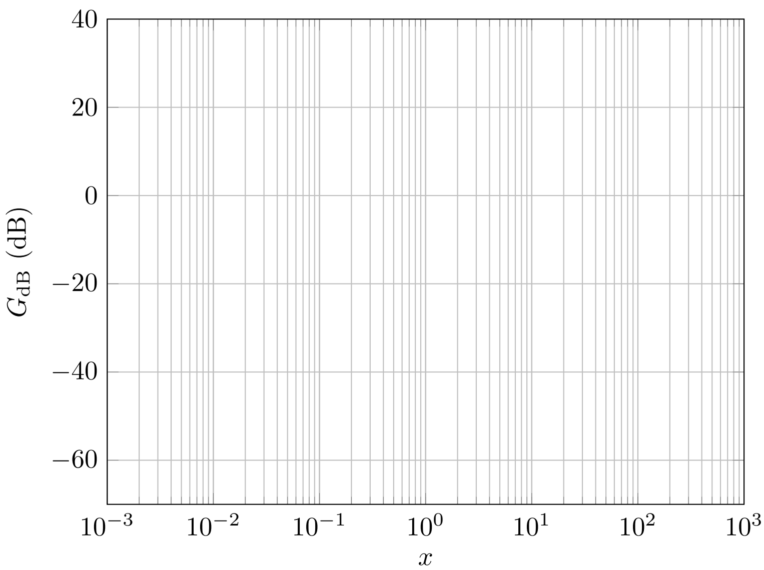
Attention ! Ne surtout pas inverser l'ordre des étapes sous peine de se heurter à des calculs bien plus compliqués que nécessaire.

Application 3 : De la fonction de transfert au diagramme de Bode

On considère la fonction de transfert obtenue exercice 2 et mise sous forme canonique,

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} .$$

Tracer le diagramme de Bode en gain pour $Q = 10$ et $Q = 0{,}1$ en fonction de la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.



▷ Limite basse fréquence :

Fonction de transfert équivalente $\underline{H} \sim \dfrac{1}{-\mathrm{j}Q\omega_0/\omega} = \dfrac{\omega}{\mathrm{j}Q\omega_0} = x/\mathrm{j}Q$ donc $|\underline{H}| = x/Q$
d'où on déduit le gain $G_{\mathrm{dB}} = 20\log x - 20\log Q$ ce qui permet de tracer pour les deux valeurs de Q

Espace 11

▷ Limite haute fréquence :

Fonction de transfert équivalente $\underline{H} \sim \dfrac{1}{\mathrm{j}Qx}$ donc $|\underline{H}| = 1/Qx$
d'où on déduit le gain $G_{\mathrm{dB}} = -20\log x - 20\log Q$ ce qui permet de tracer pour les deux valeurs de Q.

Espace 12

▷ Valeur exacte en $x = 1$ ($\log x = 0$) :
$\underline{H}(\omega_0) = 1$ d'où dans les deux cas $G_{\mathrm{dB}} = 0$

Espace 13

I.D - Lien entre les descriptions temporelle et fréquentielle

Comme les descriptions temporelle et fréquentielle d'un SLCI décrivent le même système, elles ne sont pas indépendantes l'une de l'autre.

- **Équation différentielle et fonction de transfert**

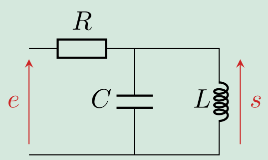
Pour donner un formalisme qui s'applique à tous les SLCI, on introduit également la **fonction de transfert opérationnelle** ou transmittance de Laplace $\mathcal{T}(p)$, celle que vous utilisez en SI.

L'équation différentielle, la fonction de transfert harmonique et la fonction de transfert opérationnelle se déduisent les unes des autres par les correspondances

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{j}\omega \quad \longleftrightarrow \quad p\,.$$

Remarque : *Ces correspondances sont démontrables, mais la démonstration nécessite des outils mathématiques que nous n'avons pas. La correspondance avec la transmittance de Laplace demande quelques précautions avec les conditions initiales : ici, elles sont (comme souvent en SI) supposées nulles.*

Application 4 : De la fonction de transfert à l'équation différentielle



On reprend le circuit ci-contre, où la fonction de transfert a été établie exercice 2 et s'écrit

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega - \dfrac{\mathrm{j}R}{L\omega}}\,.$$

Retrouver l'équation différentielle obtenue exercice 1.

Produit en croix :

$$\left(1 + \mathrm{j}RC\omega - \frac{\mathrm{j}R}{L\omega}\right)\underline{S} = \underline{E}$$

Passage en polynôme qui nécessite une multiplication par $\mathrm{j}\omega$:

$$\mathrm{j}\omega\underline{S} + (\mathrm{j}\omega)^2 RC\underline{S} + \frac{R}{L}\underline{S} = \mathrm{j}\omega\underline{E}$$

Identification :

$$C\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

Espace 14

Dans le cas (presque) général, l'équation différentielle et les fonctions de transfert s'écrivent

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} = \sum_{k=0}^{K} b_k \frac{\mathrm{d}^k e}{\mathrm{d}t^k} \quad \longleftrightarrow \quad \underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{K} b_k (\mathrm{j}\omega)^k}{\sum_{n=0}^{N} a_n (\mathrm{j}\omega)^n} \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{T}(p) = \frac{\sum_{k=0}^{K} b_k\, p^k}{\sum_{n=0}^{N} a_n\, p^n}\,.$$

On peut noter que le membre de gauche « sortie » de l'équation différentielle donne le dénominateur de la fonction de transfert, et le membre de droite « entrée » en donne le numérateur.

On peut montrer que la causalité impose d'avoir $N \geq K$. Cette valeur est appelée **ordre** du système.

- **Grandeurs caractéristiques**

Les grandeurs caractéristiques d'un SLCI (temps caractéristiques, pulsation propre, etc.) dans les représentations temporelle et fréquentielle sont directement reliées.

Exemples :
- ▷ *le temps caractéristique de charge d'un circuit RC vaut $\tau = RC$, alors que la pulsation de coupure d'un filtre RC est $\omega_c = 1/RC$;*
- ▷ *la pulsation des oscillations libres d'un système masse-ressort vaut $\sqrt{k/m}$, et c'est aussi sa pulsation de résonance en régime sinusoïdal forcé.*

II - Stabilité

II.A - Définition

Un SLCI est dit **stable** si sa réponse à un forçage borné est bornée, autrement dit sa sortie ne peut diverger que si l'entrée diverge elle aussi.

Remarque : *En pratique, aucun système réel ne peut être infiniment divergent. Un système instable aboutit plutôt sur un état de saturation, où la sortie ne varie plus quoi que fasse l'entrée et où le fonctionnement du système n'est donc plus linéaire.*

La solution d'une équation différentielle de type SLCI du premier ou du second ordre s'écrit comme la somme
- ▷ d'une solution particulière $s_\mathrm{p}(t)$, de la même forme que le forçage (constant, harmonique, etc.), et qui décrit physiquement le régime permanent ;
- ▷ d'une solution homogène $s_\mathrm{h}(t)$, dont la forme dépend de l'ordre du système, et qui décrit physiquement le régime transitoire.

⇝ si l'entrée est bornée, alors la solution particulière l'est aussi.

⇝ l'instabilité est associée à la solution homogène : si le système est stable, alors elle doit rester bornée, et en pratique elle tend presque toujours vers 0 : l'effet du transitoire n'est plus visible si l'on attend suffisamment.

Les critères de stabilité ne concernent que le membre de gauche « sortie » de l'équation différentielle, ou de façon équivalente le dénominateur de la fonction de transfert.

Espace 15

Attention ! Ne pas confondre instabilité et résonance.

▷ instabilité :
concerne le régime transitoire, qui s'amplifie infiniment au cours du temps au lieu de s'atténuer.

Espace 16

▷ résonance :

concerne la réponse en régime permanent sinusoïdal forcé, qui est d'amplitude maximale pour une certaine valeur de la pulsation de forçage.

Espace 17

⇝ l'instabilité est une notion *temporelle*, la résonance une notion *fréquentielle*.

II.B - Cas d'un système du premier ordre

- **Équation homogène**

En toute généralité, elle s'écrit
$$a\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + bs = 0\,,$$
avec a et b quelconques, en particulier du point de vue des signes.

- **Forme générale des solutions homogènes**

$s_\mathrm{h}(t) = A\exp\left(-\frac{b}{a}t\right)$ quels que soient a et b

Espace 18

La quantité $\tau = |a/b|$, homogène à un temps, est appelée **temps caractéristique** ou **temps de réponse** du système. Il renseigne sur la durée du régime transitoire. La pulsation associée $\omega_\mathrm{c} = 1/\tau = |b/a|$ est appelée **pulsation caractéristique** ou **pulsation de coupure** du système.

- **Critère de stabilité**

a et b doivent être de même signe.

Espace 19

- **Généralisation**

Un SLCI du premier ordre est stable si et seulement si tous les coefficients de l'équation différentielle homogène, ou du dénominateur de la fonction de transfert, sont de même signe.

Si le SLCI est stable, alors l'équation différentielle admet la forme canonique apprise en PTSI :
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}s = \text{des choses qui dépendent de } e\,,}$$
où τ a la signification discutée plus haut.

II.C - Cas d'un système du second ordre

En toute généralité, l'équation homogène d'un système d'ordre 2 s'écrit
$$a\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + cs = 0\,,$$
avec a, b, c trois coefficients quelconques. À cette équation est associé le **polynôme caractéristique**,
$$P(r) = ar^2 + br + c$$
dont le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ donne la forme de solution homogène. En revanche, la condition de stabilité est indépendante du discriminant.

Un SLCI du second ordre est stable si et seulement si tous les coefficients de l'équation différentielle homogène, ou du dénominateur de la fonction de transfert, sont de même signe.

Si le SLCI est stable, alors l'équation différentielle admet la forme canonique apprise en PTSI :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 s = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 2\xi\omega_0\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 s = \text{des choses qui dépendent de } e\,,}$$

- ω_0 est la **pulsation propre** du système, elle renseigne à la fois sur la pulsation des oscillations libres et la pulsation de résonance des oscillations forcées du système ;
- Q est le **facteur de qualité** et ξ le **facteur d'amortissement** du système, ils renseignent à la fois sur le nombre d'oscillations du système pendant le transitoire et sur l'existence (et la largeur) d'une résonance en régime sinusoïdal forcé.

Démonstration — Même si le résultat final n'en dépend pas, la démonstration est à adapter en fonction de la forme de solution homogène.

Avant de commencer, il s'avère que les critères de stabilité vont être simples à exprimer en fonction des racines du polynôme caractéristique, mais pas directement en fonction des coefficients a, b et c ... ce qui est pourtant ce qui est « lisible » sur l'équation différentielle. Pour passer des racines aux coefficients, le plus rapide est de se souvenir qu'un polynôme du second degré peut s'écrire

$$P(X) = a(X^2 - sX + p)$$

avec $s = -b/a$ la somme des racines et $p = c/a$ leur produit.

- *Cas d'un discriminant strictement positif*

Les racines du polynôme caractéristique s'écrivent

$$r_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et les solutions homogènes sont donc de la forme

$$s_\mathrm{h}(t) = A\,\mathrm{e}^{r_+ t} + B\,\mathrm{e}^{r_- t}\,.$$

Une telle solution est stable à condition qu'aucune des deux exponentielles ne diverge, ce qui impose aux deux racines d'être négatives. Ainsi, leur somme est négative, d'où on déduit que a et b sont de même signe, et leur produit est positif, ce qui indique que a et c sont de même signe. On en conclut que les trois coefficients doivent être de même signe.

- *Cas d'un discriminant strictement négatif*

Les racines du polynôme caractéristique s'écrivent cette fois

$$r_\pm = \frac{-b \pm \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2a} \equiv \mu \pm \mathrm{j}\omega_\mathrm{p}$$

et les solutions homogènes sont de la forme

$$s_\mathrm{h}(t) = [A\cos(\omega_\mathrm{p} t) + B\sin(\omega_\mathrm{p} t)]\,\mathrm{e}^{\mu t}\,.$$

Pour qu'une telle solution soit stable, la partie réelle $\mu = -b/2a$ des racines doit être négative, ce qui impose à a et b d'être de même signe. Par ailleurs, comme les deux racines sont complexes conjuguées alors leur poduit est positif puisqu'il s'agit du module carré : on en déduit que a et c sont de même signe. On retrouve de nouveau que les trois coefficients doivent être de même signe pour que la solution soit stable.

- *Cas d'un discriminant nul*

Le polynôme caractéristique admet alors comme racine double

$$r = -\frac{b}{2a}$$

et les solutions homogènes sont de la forme

$$s_\mathrm{h}(t) = (At + B)\,\mathrm{e}^{rt}$$

Par croissance comparée, c'est l'exponentielle qui fixe le comportement aux temps longs : pour que la solution soit stable il faut avoir $r < 0$ quels que soient les constantes d'intégration A et B. On déduit alors de l'expression de r que a et b doivent être de même signe. Par ailleurs, puisque $b^2 > 0$, le discriminant ne peut être nul que si a et c sont de même signe. On retrouve donc une nouvelle fois que les trois coefficients doivent être de même signe pour que la solution soit stable. ■

> ***Remarque :*** *La similitude des critères de stabilité pour les SLCI d'ordre 1 et 2 donne bien sûr envie de généraliser à tout ordre ... mais il n'en est rien, et le critère sur le signe des coefficients n'est plus valable pour les systèmes d'ordre 3 et plus.*

III - Signal de sortie d'un SLCI en régime établi

III.A - Décomposition de Fourier d'un signal quelconque

Tout signal u périodique de fréquence f et de forme quelconque
peut se décomposer en une somme de signaux harmoniques de fréquences multiples de f.

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(2\pi\, n f\, t + \varphi_n) \qquad \text{avec} \qquad U_n \geq 0 \text{ et } \varphi \in \mathbb{R}$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi\, n f\, t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi\, n f\, t) \qquad \text{avec} \qquad A_n \text{ et } B_n \text{ quelconques}$$

Cette écriture est appelée **développement en série de Fourier** ou **décomposition de Fourier** de $u(t)$.

L'ensemble des fréquences de la décomposition de Fourier de u définissent son **spectre**.

- **Vocabulaire**

▷ Terme constant U_0 : composante continue, elle donne la valeur moyenne du signal.

Espace 20

▷ Terme $n = 1$: fondamental, sa fréquence est égale à la fréquence du signal.

Espace 21

▷ Termes $n > 2$: harmonique de rang n

Espace 22.

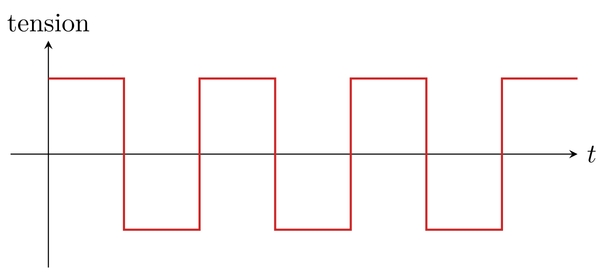
> ***Remarque mathématique :*** *On peut généraliser à un signal non périodique, la somme est alors remplacée par une intégrale.*

> ***Remarque physique :*** *Tout signal réel a de toute façon une durée finie. En le reproduisant par la pensée à l'identique au delà de cette durée, on le transforme mathématiquement en un signal périodique.*

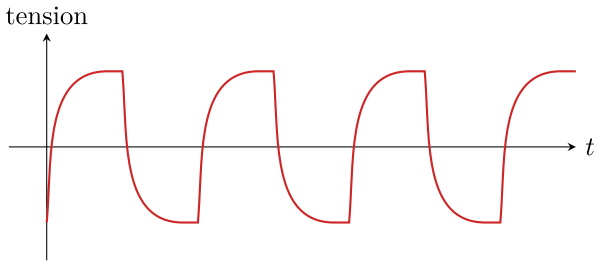
- **Contenu physique des harmoniques en fonction de leur fréquence**

Considérons pour comprendre le filtrage d'un signal créneau non-bruité : l'expérience sera réalisée dans le TP « Filtrage analogique ». On se limite ici à des considérations qualitatives, en particulier rien n'est précisé sur la fréquence de coupure et l'ordre des filtres envisagés qu'on suppose simplement « bien choisis ».

▷ **Signal d'entrée :**



▷ **Effet d'un filtre passe-bas :**



Domaine spectral :

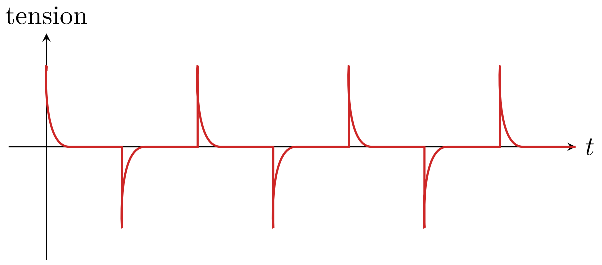
harmoniques BF préservées, harmoniques HF atténuées

Espace 23

Domaine temporel :
allure générale du signal préservée mais les discontinuités sont lissées

Espace 24

▷ **Effet d'un filtre passe-haut :**



Domaine spectral :

harmonique HF préservées, harmoniques BF atténuées

Espace 25

Domaine temporel :
l'allure générale du signal est perdue, mais ses discontinuités sont préservées

Espace 26

▷ **Généralisation :**

Les harmoniques de faible fréquence codent l'information sur l'allure globale du signal ;
les harmoniques de haute fréquence celle sur les variations brutales.

Le cas échéant, un éventuel bruit se traduisant par des fluctuations rapides et aléatoires du signal est également codé dans les harmoniques haute fréquence, et donc éliminé par un filtre passe-bas.

III.B - Reconstruire le signal de sortie d'un SLCI

Pour étudier la réponse d'un SLCI à un forçage quelconque dépendant du temps,
il suffit de connaître la décomposition de Fourier du forçage
et la réponse du système à tout forçage harmonique.

La réponse totale s'obtient en additionnant la réponse à chaque composante harmonique du forçage.

⇝ c'est le principe de l'**analyse fréquentielle**.

> ***Remarque :*** *On peut en déduire que le spectre des signaux d'entrée et de sortie d'un SLCI contiennent les mêmes fréquences, ce qui est un critère expérimental d'identification.*

❶ Écrire le développement de Fourier du signal d'entrée,

$$e(t) = E_0 + \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n^{(\mathrm{e})})\,.$$

❷ En traitant **séparément** chaque harmonique du signal d'entrée, déterminer avec la fonction de transfert l'amplitude et la phase de chaque harmonique du signal de sortie,

$$S_n = |\underline{H}(\omega_n)|\,E_n = 10^{G_{\mathrm{dB}}(\omega_n)/20} E_n \qquad \text{et} \qquad \varphi_n^{(\mathrm{s})} = \varphi_n^{(\mathrm{e})} + \arg \underline{H}(\omega_n)$$

❸ Par linéarité, le signal de sortie est la somme (= la superposition) de ces harmoniques que l'on vient de déterminer,

$$s(t) = S_0 + \sum_n S_n \cos(\omega_n t + \varphi_n^{(\mathrm{s})})\,.$$

Attention ! Il est indispensable de traiter séparément les différentes harmoniques avant de sommer.

Parfois, il est plus simple de comparer qualitativement le spectre du signal d'entrée aux fréquences caractéristiques du filtre pour identifier un comportement « global » moyenneur, intégrateur, dérivateur, etc.

▷ Moyenneur :
filtre passe-bas, fréquence du signal $f \gg f_c$ donc seule la composante continue passe

Espace 27

▷ Intégrateur :

toutes les harmoniques sont dans un domaine de fréquences où la pente du diagramme en gain vaut -20 dB/décade, typiquement domaine haute fréquence d'un passe-bas du premier ordre.

Espace 28

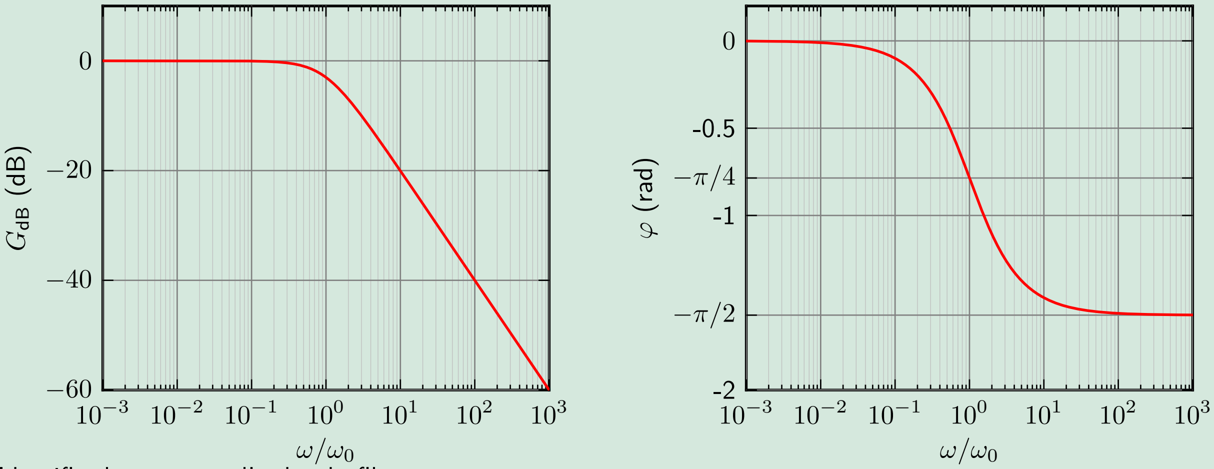
▷ Dérivateur :

toutes les harmoniques sont dans un domaine de fréquences où la pente du diagramme en gain vaut +20 dB/décade, typiquement domaine basse fréquence d'un passe-haut du premier ordre

Espace 29

Application 5 : Signal de sortie d'un SLCI

Considérons le filtre dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous.



1 - Identifier la nature et l'ordre du filtre.

2 - On envoie en entrée du filtre le signal $e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t) + E_3 \cos(\omega_3 t)$ avec $\omega_1 = \omega_0/100$, $\omega_2 = \omega_0$ et $\omega_3 = 100\,\omega_0$. Donner le signal de sortie.

3 - On envoie en entrée un signal créneau de pulsation $\omega_0/1000$. Prévoir qualitativement l'allure et l'amplitude du signal de sortie.

4 - Même question si le signal a une pulsation $100\,\omega_0$.

$\boxed{1}$ Passe bas du premier ordre car la pente est de $-20\,\mathrm{dB}$/décade.

$\boxed{2}$ On traite les composantes séparémment.

▷ Composante 1 : $G_{\mathrm{dB}}(\omega_1) = 0$ donc $|\underline{H}(\omega_1)| = 1$ et $\varphi^{(\mathrm{s})}(\omega_1) = 0$
d'où $s_1(t) = E_1 \cos(\omega_1 t)$;

▷ Composante 2 : $G_{\mathrm{dB}}(\omega_2) = -3\,\mathrm{dB}$ donc $|\underline{H}(\omega_2)| = 10^{-3/20} = 1/\sqrt{2}$ et $\varphi^{(\mathrm{s})}(\omega_2) = -\pi/4$
d'où $s_2(t) = \dfrac{E_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_2 t - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

▷ Composante 3 : $G_{\mathrm{dB}}(\omega_3) = -40\,\mathrm{dB}$ donc $|\underline{H}(\omega_3)| = 10^{-40/20} = 1/100$ et $\varphi^{(\mathrm{s})}(\omega_3) = -\pi/2$
d'où $s_3(t) = \dfrac{E_3}{100} \cos\left(\omega_3 t - \dfrac{\pi}{2}\right)$;

et on somme tout ça

$$s(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{E_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E_3}{100} \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right) .$$

$\boxed{3}$ Domaine très basse fréquence du filtre, donc le signal n'est presque pas modifié sauf au niveau des variations brutales où se manifestent les hautes fréquences. Tracer l'allure.

$\boxed{4}$ Domaine très haute fréquence du filtre, donc le signal est très atténué, et dans le domaine où le filtre agit en intégrateur. C'est donc un signal triangle. Tracer l'allure.