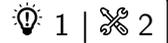




# Oscillateurs auto-entretenus

## Oscillateurs de relaxation

### Exercice 1 : Démarrage d'un multivibrateur



- ▷ Oscillateur de relaxation ;
- ▷ Période des oscillations.

⚠⚠⚠ **Attention !** L'ALI fonctionne en régime de saturation, il est donc non linéaire, et tous les raisonnements doivent se faire dans le domaine temporel. À la limite, on peut utiliser une fonction de transfert pour en déduire une relation différentielle, mais je trouve plus prudent de tout faire directement en temps.

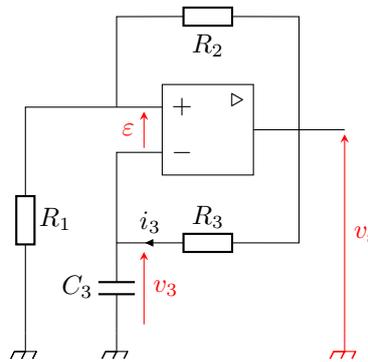


Figure 1 – Schéma des notations.

1 Comme  $\varepsilon > 0$  alors  $v_s = +V_{\text{sat}}$ .  $R_3$  et  $C_3$  sont traversés par le même courant car  $i_- = 0$  (ALI idéal). D'après la loi des mailles (notations figure 1),

$$v_3 + R_3 i_3 = V_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad v_3 + R_3 C_3 \frac{dv_3}{dt} = V_{\text{sat}}.$$

Les solutions de cette équation différentielle s'écrivent

$$v_3 = A e^{-t/\tau} + V_{\text{sat}},$$

et par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur,

$$v_3(0) = 0 = A + V_{\text{sat}}$$

$\uparrow$  CI       $\uparrow$  sol

d'où

$$v_3(t) = -V_{\text{sat}} e^{-t/\tau} + V_{\text{sat}}.$$

As-tu bien pensé à la solution particulière ?

2 Il y a basculement si  $\varepsilon$  change de signe. Exprimons  $v_+$  : comme  $i_+ = 0$  alors  $R_1$  et  $R_2$  sont parcourues par le même courant, et on peut utiliser un diviseur de tension,

$$\frac{v_+}{v_s} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{donc} \quad v_+ = \alpha v_s = \alpha V_{\text{sat}}.$$

Or  $v_3 = v_-$  augmente et tend vers  $+V_{\text{sat}} > \alpha V_{\text{sat}}$  : il y a donc bien un instant  $t_1$  où  $\varepsilon$  change de signe et devient négatif. L'instant  $t_1$  de basculement est tel que

$$v_3(t_1) = \alpha V_{\text{sat}} \quad \text{d'où} \quad e^{-t_1/\tau} = 1 - \alpha \quad \text{et} \quad \boxed{t_1 = -\tau \ln(1 - \alpha)}.$$

**3** Posons  $t' = t - t_1$  : l'instant  $t' = 0$  correspond à la bascule de l'ALI, ce qui allège largement les calculs. L'équation différentielle vérifiée par  $v_3$  s'obtient directement de la question précédente, seul change l'état de saturation de l'ALI :

$$v_3 + R_3 C_3 \frac{dv_3}{dt'} = -V_{\text{sat}}.$$

Ses solutions s'écrivent

$$v_3(t') = A e^{-t'/\tau} - V_{\text{sat}}$$

et d'après la condition initiale

$$v_3(t'=0) = v_3(t_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} \alpha V_{\text{sat}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} A - V_{\text{sat}}$$

d'où pour  $t > t_1$

$$\boxed{v_3(t') = (1 + \alpha)V_{\text{sat}} e^{-t'/\tau} - V_{\text{sat}}.}$$

**4** On inverse l'argument de la question 2 pour justifier l'existence de  $t_2$ , avec cette fois  $v_+ = -\alpha V_{\text{sat}}$  :  $v_3 = v_-$  diminue en tendant vers  $-V_{\text{sat}}$ , donc  $\varepsilon$  augmente et redevient positif. L'instant  $t'_2 = t_2 - t_1$  du basculement est tel que

$$(1 + \alpha)V_{\text{sat}} e^{-t'_2/\tau} - V_{\text{sat}} = -\alpha V_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad e^{-t'_2/\tau} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

et finalement

$$\boxed{t'_2 = t_2 - t_1 = \tau \ln \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}.}$$

**5** Pour  $t > t_2$  on repart sur l'ALI en saturation haute, mais avec une condition initiale différente de la question 1. La résolution donne cette fois

$$v_3(t) = -(1 + \alpha)V_{\text{sat}} e^{-(t-t_2)/\tau} + V_{\text{sat}}$$

L'instant  $t_3$  où il y a basculement de l'ALI vaut

$$\boxed{t_3 = t_2 + \tau \ln \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}.}$$

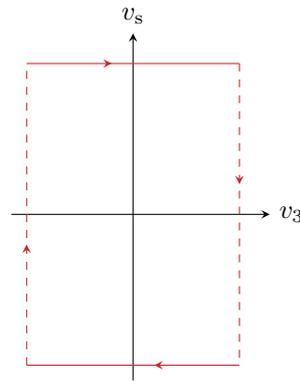
On retrouve alors **exactement la phase 2** étudiée plus haut : même état de saturation de l'ALI, même équation différentielle sur  $v_3$ , et surtout même condition initiale. Les signaux sont donc bien périodiques.

🚫🚫🚫 **Attention !** La phase étudiée question 1 est une phase de démarrage, autrement dit de régime transitoire. Elle ne fait pas partie du régime établi où les signaux sont périodiques.

**6** D'après les questions précédentes, une période s'étend de l'instant  $t_1$  à l'instant  $t_3$ , donc

$$T = t_3 - t_1 = t_3 - t_2 + t_2 - t_1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{T = 2\tau \ln \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}.}$$

**7** Dans la phase de saturation basse,  $v_s = -V_{\text{sat}}$  et  $v_3$  diminue continument de  $\alpha V_{\text{sat}}$  à  $-\alpha V_{\text{sat}}$ . Réciproquement, dans la phase de saturation haute,  $v_s = +V_{\text{sat}}$  et  $v_3$  augmente continument de  $-\alpha V_{\text{sat}}$  à  $+\alpha V_{\text{sat}}$ . On en déduit le cycle figure 2.

Figure 2 – Cycle  $v_s$  en fonction de  $v_3$ .

## Exercice 2 : Générateur de balayage

écrit PT 2017 | 💡 2 | ✂ 2 | ⚡

- 
 ▷ Oscillateur de relaxation ;  
 ▷ Période des oscillations.

- 1 Les courants d'entrée d'un ALI idéal sont **nuls**, et son gain est **infini**.

*Je pense que c'est la réponse attendue, ceci dit la question n'a pas lieu d'être car on peut aussi modéliser un ALI idéal par un système du premier ordre de gain fini.*

- 2 La rétroaction de l'ALI 2 ne se fait que sur son entrée  $\oplus$ , il fonctionne donc nécessairement en régime de saturation.

- 3 On constate sur l'oscillogramme que la tension  $u$  de sortie de l'ALI 1 est comprise entre  $-3$  et  $3$  V, or s'il fonctionnait en régime de saturation elle ne pourrait prendre que les valeurs  $\pm V_{\text{sat}} = \pm 15$  V. On en déduit que l'ALI 1 fonctionne en régime linéaire.

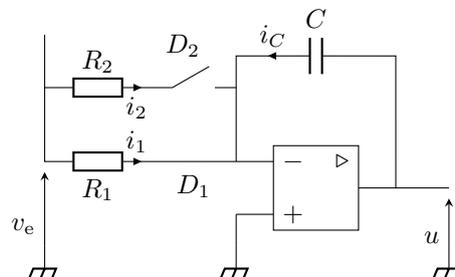


Figure 3 – Schéma partiel de l'ALI 1.

- 4 Utilisons la loi des nœuds à l'entrée  $\ominus$  de l'ALI 1, qui est idéal. Comme il fonctionne en régime linéaire,  $v_- = v_+ = 0$ . Avec les notations de la figure 3,

$$i_1 + i_2 + i_C = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} i_1 = \frac{v_e - v_-}{R_1} = \frac{V_0}{R_1} \\ i_2 = 0 \\ i_C = C \frac{d}{dt}(u - v_-) = C \frac{du}{dt} \end{cases}$$

⚡ ⚡ ⚡ **Attention !** Les dipôles doivent bien être orientés en convention récepteur !

On en déduit

$$\frac{du}{dt} = -\frac{V_0}{R_1 C} \quad \text{d'où} \quad u(t) = -\frac{V_0}{R_1 C} t + \text{cte.}$$

À l'instant initial,

$$u(0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{0} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{0} = \text{cte}$$

et finalement

$$u(t) = -\frac{V_0}{R_1 C} t.$$

**5** On applique de même la loi des nœuds à l'entrée  $\oplus$  de l'ALI 2. En orientant tous les courants vers l'entrée  $\oplus$  (et avec des notations évidentes!!),

$$i_3 + i_4 = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{u - V_+}{R_3} + \frac{v_s - V_+}{R_4} = 0$$

d'où on déduit

$$V_+ = \frac{\frac{u}{R_3} + \frac{v_s}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \quad \text{soit} \quad \boxed{V_+ = \frac{R_4 u + R_3 v_s}{R_3 + R_4}}.$$

On conserve  $v_s = V_0$  tant que  $V_+ > V_- = 0$ . Il y a donc basculement à  $t_1$  tel que

$$\frac{R_4 u(t_1) + R_3 V_0}{R_3 + R_4} = 0 \quad \text{soit} \quad u(t_1) = -\frac{R_3}{R_4} V_0.$$

D'après la question précédente,

$$\boxed{t_1 = \frac{R_1 R_3 C}{R_4}}.$$

**6** La tension aux bornes du condensateur, qui est toujours continue, est égale à  $u - v_- = u$ .

**7** Posons  $t' = t - t_1$ . Le raisonnement est identique à la question 4, mais comme  $v_s = -V_0$  alors c'est  $D_2$  qui est fermé et donc  $R_2$  qui intervient dans le calcul. La relation différentielle est donc

$$\frac{du}{dt'} = +\frac{V_0}{R_2 C} \quad \text{d'où} \quad u(t') = +\frac{V_0}{R_2 C} t' + \text{cte}'.$$

À l'instant  $t' = 0$  (c'est-à-dire  $t = t_1$ ), et par continuité,

$$u(t'=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} -\frac{R_3}{R_4} V_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} \text{cte}'.$$

Finalement,

$$\boxed{u(t') = \frac{V_0}{R_2 C} t' - \frac{R_3}{R_4} V_0 \quad \text{soit} \quad u(t) = \frac{V_0}{R_2 C} (t - t_1) - \frac{R_3}{R_4} V_0.}$$

Comme  $t_1 = R_1 R_3 C / R_4$ ,

$$\boxed{u(t) = \frac{V_0}{R_2 C} t - \frac{R_3}{R_4} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) V_0.}$$

La tension s'annule à l'instant

$$t_2 = \frac{C R_2}{V_0} \times \frac{R_3}{R_4} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) V_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{t_2 = \frac{R_3}{R_4} (R_1 + R_2) C.}$$

**8.a** Comme les oscillations sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (cf. l'oscillogramme) et par définition de  $t_2$  (deuxième annulation de  $u$ ),

$$\boxed{T = 2t_2 = 2 \frac{R_3}{R_4} (R_1 + R_2) C.}$$

**8.b** À l'instant  $t_1$ ,

$$u(t_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Q5}}}{=} -\frac{R_3}{R_4} V_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{graphe}}}{=} -3 \text{ V}$$

d'où on déduit

$$R_3 = -\frac{R_4 u(t_1)}{V_0} = 0,2 \text{ k}\Omega.$$

De plus,

$$t_1 = \frac{R_1 R_3 C}{R_4} = 1,8 \text{ ms}$$

$\uparrow$  Q5                       $\uparrow$  graphe

et ainsi

$$R_1 = \frac{R_4 t_1}{R_3 C} \simeq 10 \text{ k}\Omega.$$

Enfin, la période des oscillations vaut

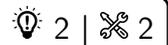
$$T = 2 \frac{R_3}{R_4} (R_1 + R_2) C = 5 \text{ ms}$$

$\uparrow$  Q8.a                       $\uparrow$  graphe

d'où on déduit

$$R_2 = \frac{T R_4}{2 R_3 C} - R_1 \simeq 3 \text{ k}\Omega.$$

### Exercice 3 : Astable I-2I



- ▷ Oscillateur de relaxation ;
- ▷ Période des oscillations.

1 Notons  $i$  le courant dans le condensateur orienté en convention récepteur. D'après la loi des nœuds,

$$2I_0 = I_0 + i \quad \text{soit} \quad i = I_0.$$

D'après la loi de comportement,

$$\frac{du}{dt} = \frac{I_0}{C} \quad \text{d'où} \quad u(t) = \frac{I_0}{C} t + \text{cte}.$$

2 La loi des nœuds donne cette fois

$$0 = I_0 + i \quad \text{soit} \quad i = -I_0$$

et ainsi

$$u(t) = -\frac{I_0}{C} t + \text{cte}'.$$

3 Le comparateur à hystérésis est inverseur, c'est-à-dire que lorsque  $u > U_0$  la sortie sature à la valeur basse, d'où le cycle de la figure 4.

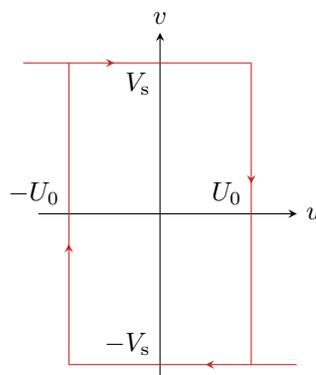


Figure 4 – Cycle du comparateur à hystérésis inverseur.

4 On suppose pour la figure 5 qu'à l'instant initial le comparateur à hystérésis est en saturation haute, donc  $v = +V_s$  et  $u$  est en phase de croissance. Comme il s'agit d'une tension aux bornes d'un condensateur,  $u$  est continue quoi qu'il arrive.

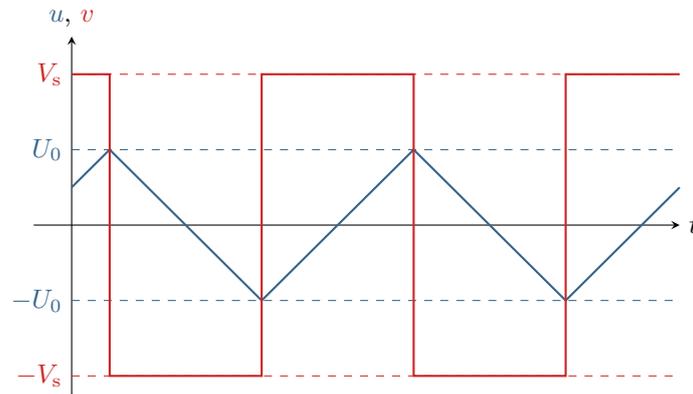


Figure 5 – Représentation temporelle des oscillations.

5 Il s'agit de déterminer la durée de chacune des deux phases d'oscillation.

- **Saturation haute** : Notons  $t = 0$  l'instant où le comparateur bascule en saturation haute. D'après la question 1,

$$u(t) = \frac{I_0}{C}t + \text{cte},$$

avec

$$u(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} -U_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} \text{cte}$$

et donc

$$u(t) = \frac{I_0}{C}t - U_0.$$

Cette phase cesse lorsque  $u$  atteint la tension de basculement, au bout d'un temps  $t_1$  tel que

$$u(t_1) = U_0 \quad \text{soit} \quad \frac{I_0}{C}t_1 = 2U_0 \quad \text{d'où} \quad t_1 = \frac{2U_0C}{I_0}.$$

- **Saturation basse** : De même, notons  $t' = 0$  l'instant où le comparateur bascule en saturation basse. D'après la question 2,

$$u(t) = -\frac{I_0}{C}t + \text{cte}' ,$$

avec

$$u(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} U_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} \text{cte}'$$

et donc

$$u(t) = -\frac{I_0}{C}t + U_0.$$

Cette phase cesse lorsque  $u$  atteint la tension de basculement, au bout d'un temps  $t'_2$  tel que

$$u(t'_2) = -U_0 \quad \text{soit} \quad -\frac{I_0}{C}t'_2 = -2U_0 \quad \text{d'où} \quad t'_2 = \frac{2U_0C}{I_0}.$$

- **Conclusion** :

$$T = t_1 + t'_2 \quad \text{soit} \quad \boxed{T = \frac{4U_0C}{I_0}}.$$

Pour avoir  $T = 1$  ms, on en déduit qu'il faut imposer

$$\boxed{U_0 = \frac{TI_0}{4C} = 25 \text{ V.}}$$

## Oscillateurs quasi-sinusoidaux

### Exercice 4 : Oscillateur de Wien



- ▷ Oscillateur quasi-sinusoidal ;
- ▷ Conditions d'oscillations ;
- ▷ Démarrage des oscillations ;
- ▷ Stabilité des oscillations.

Cf. cours.

### Exercice 5 : Oscillateur RLC à résistance négative



- ▷ Oscillateur quasi-sinusoidal ;
- ▷ Conditions d'oscillations ;
- ▷ Démarrage des oscillations.

**1** Par un pont diviseur de tension, la tension  $v$  est relié au potentiel  $v_s$  de sortie de l'ALI par

$$\frac{v}{v_s} = \frac{r}{r+r} \quad \text{soit} \quad v_s = 2v.$$

Par ailleurs, la loi d'Ohm appliquée à la résistance située au dessus de l'ALI sur le schéma donne

$$v_- - v_s = ri$$

et comme l'ALI fonctionne en régime linéaire alors  $v_- = v_+ = v$ , d'où

$$v - 2v = ri \quad \text{soit} \quad \boxed{v = -ri.}$$

**2** Orientons les trois dipôles en convention récepteur par rapport au courant  $i$ . On note  $\varepsilon = v_+ - v_- = 0$  car l'ALI est en régime linéaire. D'après la loi des mailles,

$$u_R + u_L + u_C + v - \varepsilon = 0$$

soit en dérivant

$$\begin{aligned} \frac{du_R}{dt} + \frac{du_L}{dt} + \frac{du_C}{dt} + \frac{dv}{dt} &= 0 \\ R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} + \frac{dv}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

On peut alors multiplier l'équation par  $-r$  et identifier  $v = -ri$ ,

$$R \frac{dv}{dt} + L \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{v}{C} - r \frac{dv}{dt} = 0.$$

En réorganisant les termes, il vient

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R-r}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = 0.}$$

**3** Des oscillations sinusoidales existent si l'équation ci-dessus s'identifie à celle d'un oscillateur harmonique, donc si le coefficient de la dérivée première est nul, soit

$$\boxed{r = R.}$$

**4** On constate que les oscillations démarrent de conditions initiales (quasiment) nulles, et s'amplifient, ce qui n'est pas le comportement d'un oscillateur harmonique. Il faut pour cela modifier  $r$  de telle sorte que l'équation différentielle devienne instable, ce qui est le cas si les coefficients sont de signe différent, soit

$$\boxed{r \gtrsim R.}$$

Il ne faut cependant pas choisir  $r$  trop grand pour que les oscillations en régime établi restent quasi-sinusoidales.

**5** La période des oscillations en régime établi est reliée à la pulsation propre de l'oscillateur harmonique, que l'on identifie sur l'équation différentielle

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{soit} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

L'amplitude des oscillations est limitée par la saturation de l'ALI, dont le potentiel de sortie ne peut dépasser  $V_{\text{sat}}$ . Or nous avons montré à la première question que  $v = v_s/2$ , d'où on déduit l'amplitude des oscillations

$$A = \frac{V_{\text{sat}}}{2}.$$

**6** Les paramètres  $\lambda$  et  $\omega'$  sont reliés aux racines  $x_{\pm}$  du polynôme caractéristique par

$$x_{\pm} = \lambda \pm j\omega' = \frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

en utilisant les notations traditionnelles des polynômes du second degré. On en déduit alors quasiment sans calcul

$$\lambda = -\frac{b}{2a} = -\frac{(R-r)}{2L} = \frac{r-R}{2L}.$$

On peut considérer la phase de croissance terminée à l'instant  $\tau_c$  tel que

$$A' e^{\lambda\tau_c} = A \quad \text{soit} \quad \lambda\tau_c = \ln \frac{A}{A'}$$

et finalement

$$\tau_c = \frac{2L}{r-R} \ln \frac{A}{A'}.$$

### Exercice 6 : Oscillateur sinus-cosinus

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Oscillateur quasi-sinusoidal ;
- ▷ Montages simples à ALI en régime linéaire ;
- ▷ Conditions d'oscillation.

**1** Comme l'ALI ① fonctionne en régime linéaire, alors  $V_{1\ominus} = V_{1\oplus} = V_3$ , aussi égal à la tension aux bornes de  $R_1$ . De plus, comme il est idéal,  $R_1$  et  $C_1$  sont parcourus par le même courant et forment donc un pont diviseur de tension. On en déduit

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} \quad \text{d'où} \quad \frac{V_1}{V_3} = \frac{1 + jR_1C_1\omega}{jR_1C_1\omega} \quad \text{soit} \quad \boxed{H_1 = \frac{1 + j\omega\tau_1}{j\omega\tau_1}}.$$

Bien sûr, utiliser la loi des nœuds en termes de potentiel à l'entrée  $\ominus$  de l'ALI ① conduit au même résultat en à peine plus de calculs.

Comme l'ALI ② est idéal, la loi des nœuds en termes de potentiel à l'entrée  $\ominus$  s'écrit

$$\frac{V_1 - 0}{R_2} + \frac{V_2 - 0}{1/jC_2\omega} = 0$$

car  $V_{2\ominus} = V_{2\oplus} = 0$  grâce au fonctionnement linéaire. On en déduit

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{1}{jR_2C_2\omega} \quad \text{soit} \quad \boxed{H_2 = -\frac{1}{j\omega\tau_2}}.$$

Enfin, comme l'ALI ③ est idéal alors la loi des nœuds en termes de potentiel à l'entrée  $\oplus$  donne

$$\frac{0 - V_3}{1/jC_3\omega} + \frac{V_2 - V_3}{R_3} = 0.$$

Ainsi,

$$jC_3\omega V_3 + \frac{V_3}{R_3} = \frac{V_2}{R_3} \quad \text{soit} \quad \frac{V_3}{V_2} = \frac{1}{jR_3C_3\omega + 1} \quad \text{donc} \quad \boxed{H_3 = \frac{1}{1 + j\omega\tau_3}}.$$

Une autre possibilité de démonstration (plus subtile) est d'identifier un diviseur de tension entre  $C_3$  et  $R_3$ , qui donne directement

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{1/jC_3\omega}{1/jC_3\omega + R_3}.$$

En revanche, une mauvaise idée serait d'exprimer  $\underline{H}_3 = 1/\underline{H}_1\underline{H}_2$  : cela reviendrait à supposer l'existence d'oscillations à la pulsation  $\omega$ , et donc à utiliser sans s'en rendre le critère de Barkhausen. Une autre façon de constater le problème serait de réaliser que ni la résistance  $R_3$  ni le condensateur  $C_3$  n'interviennent à aucun endroit du calcul, ce qui voudrait dire qu'ils ne jouent aucun rôle dans le montage ... avouez que ce serait surprenant !

Par ailleurs, on constate que l'on obtient une fonction de transfert de type passe-bas du premier ordre. Pour le comprendre, on peut imaginer redessiner le montage en « déplaçant » la résistance  $R_3$  à l'horizontale devant le condensateur  $C_3$ . On trouve alors que le bloc n'est autre qu'un filtre RC passe-bas.

**2** Supposons qu'il y ait oscillations à pulsation  $\omega$ . En combinant les fonctions de transfert,

$$\underline{V}_3 = \underline{H}_3 \underline{V}_2 = \underline{H}_3 \underline{H}_2 \underline{V}_1 = \underline{H}_3 \underline{H}_2 \underline{H}_1 \underline{V}_3$$

ce qui redonne le critère de Barkhausen

$$\underline{H}_3 \underline{H}_2 \underline{H}_1 = 1$$

et en remplaçant

$$\frac{1}{1 + j\tau_3\omega} \times \frac{-1}{j\tau_2\omega} \times \frac{1 + j\tau_1\omega}{j\tau_1\omega} = 1.$$

On réduit à une équation algébrique,

$$-(1 + j\tau_1\omega) = -\tau_1 \tau_2 \omega^2 (1 + j\tau_3\omega)$$

et on peut alors identifier deux conditions, sur les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} 1 = \tau_1 \tau_2 \omega^2 \\ \tau_1 \omega = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \omega^3 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \tau_1 \tau_2 \omega^2 = 1 \\ \tau_2 \tau_3 \omega^2 = 1 \end{cases}$$

On déduit de ces deux équations

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_2 \tau_3}},$$

ce qui impose comme condition d'oscillation

$$\tau_1 = \tau_3.$$

Pour revenir sur le raisonnement mené pour déterminer  $\underline{H}_3$ , on constate ici que la relation  $\underline{H}_3 \underline{H}_2 \underline{H}_1 = 1$  n'est pas toujours vraie, mais seulement si  $\tau_1 = \tau_3$ . On comprend donc d'autant mieux qu'il est faux de l'utiliser a priori pour calculer  $\underline{H}_3$  en toute généralité.

**3** Le déphasage  $\Delta\varphi$  entre les tensions  $V_2$  et  $V_1$  est égal à l'argument de la fonction de transfert

$$\underline{H}_2 = \frac{V_2}{V_1} = -\frac{1}{j\omega\tau_2} = \frac{j}{\omega\tau_2}.$$

Il s'agit d'un imaginaire pur à partie imaginaire positive, son argument vaut donc

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Or  $\cos x = \sin(x + \pi/2)$  : si l'une des tensions est décrite par un cosinus, l'autre l'est par le sinus, ce qui justifie le nom du montage.

## Exercice 7 : Oscillateur à contrôle automatique du gain

inspiré oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 3


- ▷ Lien entre les représentations fréquentielle et temporelle ;
- ▷ Oscillateur quasi-sinusoidal ;
- ▷ Conditions d'oscillations.

**1** L'ALI fonctionnant en régime linéaire, on travaille en représentation complexe. L'idée est d'exprimer les deux potentiels  $v_+$  et  $v_-$  en fonction de  $s$ , puis d'identifier les deux expressions grâce à l'hypothèse de régime linéaire.

- **Expression de  $v_-$**  : par un pont diviseur de tension,

$$\frac{v_-}{\underline{s}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

- **Expression de  $v_+$**  : l'association série de  $R$  et  $C$  équivaut à un dipôle d'impédance

$$\underline{Z}_s = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega},$$

alors que l'association parallèle équivaut à un dipôle d'admittance

$$\underline{Y}_p = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R}.$$

Par un pont diviseur,

$$\frac{v_+}{\underline{s}} = \frac{\underline{Z}_p}{\underline{Z}_p + \underline{Z}_s} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_s \underline{Y}_p} \quad \text{soit} \quad \frac{v_+}{\underline{s}} = \frac{1}{1 + \frac{(1 + jRC\omega)^2}{jRC\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{(1 + j\omega\tau)^2}{j\omega\tau}}.$$

- **Conclusion** : l'ALI fonctionnant en régime linéaire, on a  $\underline{v}_+ = \underline{v}_-$ , ce qui donne ici

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{s} &= \frac{1}{1 + \frac{(1 + j\omega\tau)^2}{j\omega\tau}} \underline{s} \\ \left(1 + \frac{(1 + j\omega\tau)^2}{j\omega\tau}\right) \underline{s} &= \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \underline{s} \\ \underline{s} + \frac{1 + 2j\omega\tau + (j\omega)^2 \tau^2}{j\omega\tau} \underline{s} &= \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \underline{s} \\ j\omega\tau \underline{s} + \underline{s} + 2j\omega\tau \underline{s} + (j\omega)^2 \tau^2 \underline{s} &= j\omega\tau \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \underline{s} \\ (j\omega)^2 \tau^2 \underline{s} + j\omega\tau \left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right) \underline{s} + \underline{s} &= 0 \end{aligned}$$

On peut alors identifier l'équation différentielle

$$\tau^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + \tau \left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{ds}{dt} + s = 0.$$

**2** Les oscillations sont sinusoidales si cette équation s'identifie à celle d'un oscillateur harmonique, c'est-à-dire si le terme devant la dérivée première est nul. C'est le cas pour

$$R_1 = \frac{R_2}{2}.$$

En pratique, cette inégalité est impossible à atteindre : si  $R_1$  est trop grand, l'équation différentielle est stable et donc  $s$  tend vers 0, qui correspond à la solution particulière. Si  $R_1$  est trop faible, l'équation différentielle est instable et la tension  $s$  croit jusqu'à ce que l'ALI atteigne la saturation.

3 En reprenant la loi  $R_1(T)$ , on trouve

$$R_0 (1 + \alpha(T_{\text{éq}} - T_0)) = \frac{R_2}{2}$$

$$\alpha(T_{\text{éq}} - T_0) = \frac{R_2}{2R_0} - 1$$

$$T_{\text{éq}} = T_0 + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{R_2}{2R_0} - 1 \right).$$

4 La lampe est soumise à une tension égale à  $v_-$ , donc en reprenant le calcul précédent, le courant qui la traverse est relié à la tension  $s$  par

$$i = \frac{1}{R_1 + R_2} s.$$

Ainsi, si l'amplitude des oscillations de  $s$  est plus faible que la valeur d'équilibre, c'est le cas aussi du courant. Il y a donc moins de puissance libérée par effet Joule et donc  $T < T_{\text{éq}}$ . Par conséquent, la résistance  $R_1$  est plus faible que  $R_2/2$ , et on se trouve dans le cas d'instabilité : l'**amplitude de  $s$  augmente**, et ce jusqu'à ce que le filament atteigne la température d'équilibre.

5 Réciproquement, si l'amplitude de  $s$  est plus grande que sa valeur d'équilibre, alors il y a davantage d'effet Joule, donc la résistance  $R_1$  augmente. On se trouve alors dans le cas de stabilité : l'**amplitude de  $s$  diminue**, et ce jusqu'à ce que le filament retrouve la température d'équilibre.

6 Les questions précédentes ont permis de montrer qualitativement que la lampe a pour effet de **stabiliser l'amplitude des oscillations**, et si celle-ci est adaptée de supprimer les phases de fonctionnement non-linéaires. En revanche, elle ne permet pas un contrôle simple de la valeur de cette amplitude : c'est justement le rôle de  $R_2$ . Fixer  $R_2$  impose la température d'équilibre du filament, donc l'effet Joule nécessaire pour la lampe atteigne cette température, et donc l'amplitude du courant et de la tension  $s$ . On ne peut pas la choisir librement, car la température d'équilibre doit pouvoir être atteinte sans que l'ALI ne sature.

### Exercice 8 : Oscillateur d'ordre 4

oral Centrale PSI | 💡 3 | ✂ 2

- ▶ Oscillateur quasi-sinusoïdal ;
- ▶ Montages simples à ALI en régime linéaire ;
- ▶ Conditions d'oscillation.

#### 1 • Nature du filtre :

- ▶ Le montage à ALI est un simple suiveur : on a directement  $V_s = V_{\oplus}$ .
- ▶ Limite basse fréquence : le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert, donc aucun courant ne circule dans  $R$  et ainsi  $V_s = V_{\oplus} = 0$ .
- ▶ Limite haute fréquence : le condensateur équivaut à un fil, donc  $V_s = V_{\oplus} = V_e$ .
- ▶ Conclusion : le filtre est un passe-haut.

#### • Fonction de transfert :

L'ALI est idéal, donc aucun courant n'entre dans la borne  $\oplus$  :  $R$  et  $C$  sont parcourus par le même courant, d'où

$$\frac{V_{\oplus}}{V_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}.$$

Comme déjà indiqué, on reconnaît ensuite un suiveur à ALI, si bien que  $V_s = V_{\oplus}$ , et ainsi

$$\underline{H} = \frac{V_s}{V_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}.$$

#### 2 • Limite basse fréquence :

$$\underline{H} \underset{\text{TBF}}{\sim} \frac{jRC\omega}{1} = jRC\omega \quad \text{donc} \quad G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \omega + 20 \log(RC),$$

ce qui explique la pente de l'asymptote de +20 dB/décade. De plus, la fonction de transfert équivalente est imaginaire pure à partie imaginaire positive, ce qui explique la phase de 90°.

• **Limite haute fréquence :**

$$\underline{H}_{\text{THF}} \sim \frac{jRC\omega}{jRC\omega} = 1 \quad \text{donc} \quad G_{\text{dB}} = 0,$$

ce qui explique l'asymptote horizontale et la phase égale à 0°.

• **Pour  $\omega = \omega_c = 1/RC$  :**

$$\underline{H}(\omega_c) = \frac{j}{1+j}$$

qui est un complexe de module

$$|\underline{H}(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{d'où} \quad G_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{2} = -3 \text{ dB},$$

et d'argument

$$\arg \underline{H}(\omega_c) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

ce qui permet d'en déduire  $\omega_c = 1 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  soit  $RC = 1 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ .

**3** Le suiveur à ALI a une impédance d'entrée infinie, ce qui permet de raisonner comme si tous les filtres  $\mathcal{F}$  étaient en sortie ouverte et donc de multiplier leurs fonctions de transfert ou sommer leurs diagrammes de Bode.

**4** Le montage à ALI où interviennent  $R'$  et  $R$  est un amplificateur inverseur. La loi des nœuds appliquée à l'entrée  $\ominus$  de l'ALI donne, en orientant tous les courants vers cette entrée,

$$i + i' = 0 \quad \text{soit} \quad R(V_1 - V_{\ominus}) + R'(V_2 - V_{\ominus}) = 0.$$

En supposant le régime linéaire,  $V_{\ominus} = V_{\oplus} = 0$  d'où on déduit

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{R}{R'}.$$

La condition d'oscillations est donnée par la condition de Barkhausen, en tenant compte des quatre filtres  $\mathcal{F}$ . À la pulsation  $\omega_0$  des oscillations, on a nécessairement

$$-\frac{R}{R'} \times \underline{H}(\omega_0)^4 = 1.$$

En termes d'argument,

$$-\pi + 4 \arg \underline{H}(\omega_0) = 0 \quad \text{soit} \quad \arg \underline{H}(\omega_0) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

Or, quel hasard, ce déphasage est obtenu pour  $\omega_0 = 1/RC$ . On en déduit que **les oscillations ont une pulsation de  $1 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$** , ce qui impose une valeur

$$R = \frac{1}{C\omega_0} = 1 \cdot 10^3 \Omega.$$

En termes de module, la condition de Barkhausen donne

$$\frac{R}{R'} \times |\underline{H}(\omega_0)|^4 = 1 \quad \text{soit} \quad R' = R |\underline{H}(\omega_0)|^4.$$

D'après les questions précédentes,  $|\underline{H}(\omega_0)| = 1/\sqrt{2}$  d'où on déduit

$$R' = \frac{R}{4} = 250 \Omega.$$