BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

Cours 9 – Mécanique des fluides *Version prof*

Statique des fluides

Plan du cours

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 1 « Thermodynamique et mécanique des fluides », bloc 1 « Éléments de statique des fluides dans un référentiel galiléen ».

Cette partie introduit sur le support concret de la statique des fluides le principe du découpage d'un domaine physique (volume, surface) en éléments infinitésimaux et la sommation d'une grandeur extensive (force) pour ce découpage. La poussée d'Archimède est présentée comme la résultante des forces de pression.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Forces surfaciques, forces volumiques. Champ de pression.	Distinguer les forces de pression des forces de pesanteur.
Statique dans le champ de pesanteur uniforme.	Établir la relation entre la dérivée de la pression, la masse volumique et le champ de pesanteur. Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait. Comparer les variations de pression dans le cas de l'océan et de l'atmosphère.
Résultante de forces de pression. Poussée d'Archimède.	Exprimer la force de pression sur une surface élémentaire en fonction de la pression. Exprimer une surface élémentaire dans un système de coordonnées adaptées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
	Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante de forces de pression. Exprimer une résultante de forces de pression sur une paroi ou sur un objet immergé.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Au concours

▷ Écrit : épreuve A 2022 (deux questions), 2023 (deux questions) et 2024.
▷ Oral : occasionnellement.

Un fluide est un milieu déformable, dont la description est de ce fait plus compliquée que celle d'un solide. Nous abordons dans ce premier cours la statique des fluide, le plus simple des cas compliqués.

I - Plusieurs descriptions d'un fluide

I.A - Aux échelles macroscopique et microscopique

- **Échelle macroscopique**

L'**échelle macroscopique** est l'échelle globale relative à l'ensemble du système, souvent l'échelle humaine. La matière est continue, mais ses propriétés (température, masse volumique, etc.) peuvent être inhomogènes.

À l'échelle macroscopique, un fluide est un milieu matériel capable de se déformer et de s'écouler jusqu'à adopter la forme du récipient qui le contient.

> ***Remarque culturelle :*** *Cette définition peut parfois poser quelques difficultés : le dentifrice, le sable, le célèbre mélange eau-maïzena sont-ils des fluides ? Ces matériaux qui présentent un comportement hybride entre solide et fluide sont qualifiés de fluides complexes.*

- **Échelle microscopique**

L'**échelle microscopique** est celle des atomes et des molécules : la matière est discontinue, c'est le monde de la mécanique quantique et de la physique statistique.

Longueurs caractéristiques : distance intermoléculaire typique
▷ dans un solide cristallin :
paramètre de maille $a \sim 10^{-9} - 10^{-10}\,\mathrm{m}$

Espace 1 ;
▷ dans un fluide : **libre parcours moyen** $\ell^\star$ qui correspond à la distance parcourue par une molécule entre deux collisions successives.
$\ell^\star_{\mathrm{liq}} \sim 10^{-9}\,\mathrm{m}$ $\ell^\star_{\mathrm{gaz}} \sim 10^{-7}\,\mathrm{m}$ à $300\,\mathrm{K}$.

Espace 2

À l'échelle microscopique, un fluide est caractérisé par des interactions intermoléculaires suffisamment faibles par rapport l'agitation thermique pour que les molécules se déplacent les unes par rapport aux autres.

I.B - À l'échelle mésoscopique : modèle de la particule fluide

- **Échelle mésoscopique**

On appelle **échelle mésoscopique** une échelle intermédiaire entre microscopique et macroscopique : la longueur caractéristique est très faible devant la taille totale du système, mais très grande devant la distance intermoléculaire. À cette échelle, la matière est continue mais ses propriétés localement homogènes.

R

⇝ intérêt de l'échelle mésoscopique : étude des systèmes inhomogènes à l'échelle macroscopique, dont la température ou la pression varie en fonction du point d'observation.

Longueurs caractéristiques : fortement dépendantes du système étudié !

▷ modélisation des échanges thermiques dans le condenseur d'un frigo domestique : de l'ordre de quelques microns ;

▷ modélisation de la circulation atmosphérique à grande échelle pour l'étude du changement climatique : de l'ordre de la centaine de kilomètres.

On appelle **système mésoscopique** ou **infinitésimal** un système dont au moins une des trois dimensions est mésoscopiques.

> ***Exemple :*** *cylindre de rayon macroscopique mais de hauteur infinitésimale.*

- **Particule fluide**

On appelle **particule fluide** une portion de fluide mésocopique dans les trois dimensions et de masse constante.

R

Attention ! Compte tenu de la définition, une particule fluide contient un très grand nombre de molécules.

Une particule fluide peut être immobile ou en mouvement (si le fluide s'écoule). Sa masse est constante, mais son volume peut varier : une particule fluide est caractérisée par un nombre de molécules, pas par des dimensions.

> ***Remarque :*** *Une particule de fluide est mésoscopique dans les trois dimensions de l'espace. Il sera souvent utile pour les calculs de raisonner sur des systèmes mésoscopiques en une dimension seulement et macroscopique dans les deux autres : de tels systèmes ne sont pas des particules de fluide.*

- **Notations mésoscopiques**

▷ Grandeurs **extensives** : grandeurs physiques proportionnelles à la masse du système
  ⇝ les grandeurs extensives relatives à l'échelle mésoscopique sont notées par le symbole différentiel d, comme les dérivées ou les intégrales (ce qui n'est pas un hasard !) : la masse d'une particule fluide est par exemple notée dm.

▷ Grandeurs **intensives** : grandeurs physiques indépendantes de la masse du système.
  ⇝ les grandeurs intensives peuvent être définies localement, elles sont notées comme des fonctions du point d'observation M, par exemple $T(M)$ ou $P(M)$.

> ***Exemples :***
> ▷ *Volume d'une particule fluide :* introduire $d\tau$ et μ
> $$dV = d\tau = \frac{dm}{\rho(M)} = \frac{dm}{\mu(M)}$$
>
> *Espace 3*
>
> ▷ *Équation d'état d'un gaz parfait appliquée à une particule de fluide :*
> $P(M)\,d\tau = dn\,RT(M)$.
>
> *Espace 4*

M

I.C - Sommer pour passer du mésoscopique au macroscopique

Application 1 : Masse d'air

Un modèle simple d'atmosphère à température uniforme, étudié dans la suite du cours, conduit à une évolution de la masse volumique avec l'altitude z selon

$$\rho(z) = \rho_0 \, \mathrm{e}^{-z/\delta} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \rho_0 = 1{,}3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}} \\ \delta = 8\,\mathrm{km} \end{cases}$$

En supposant ce modèle valable pour tout $z > 0$, calculer la masse de la colonne d'air que vous portez sur vos épaules.

M **Principe :** la masse est une grandeur additive, calculer la masse totale d'un système macroscopique $\mathcal{S}$ se fait en sommant la masse de chaque particule fluide appartenant à ce système.

$$m_{\text{tot}} = \sum_{\text{PF}\in\mathcal{S}} \mathrm{d}m = \iiint_{M\in\mathcal{S}} \rho(M)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Le même raisonnement s'applique pour tout découpage mésoscopique.

Contruction du découpage mésoscopique adapté : un découpage est adapté lorsqu'il est mésoscopique dans la (les) direction(s) où varient les grandeurs physiques et macroscopique dans les autres directions.

ici : la masse volumique dépend de l'altitude z, mais pas du tout des coordonnées x et y, donc le bon volume mésoscopique est une tranche de surface $S \sim 1\,\mathrm{m}^2$ (macroscopique) et de hauteur $\mathrm{d}z$ (mésoscopique). Faire un schéma en même temps que l'explication.

Espace 5

> ***Remarque :*** *Le volume $\mathrm{d}\tau$ ainsi construit est mésoscopique, mais il ne s'agit pas d'une particule fluide car il est macroscopique dans deux directions, et contient donc un grand nombre de particules fluides.*

Calcul de la masse :

Masse du volume mésoscopique :

$$\mathrm{d}m = \rho(z)\,\mathrm{d}V = \rho_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta} \times S\,\mathrm{d}z$$

Espace 6

Masse totale :

$$\begin{aligned} m &= \sum_{\text{tranches}} \mathrm{d}m \\ &= \int_0^{+\infty} \rho_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta} \times S\,\mathrm{d}z \\ &= \rho_0\,S \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{d}z \\ &= \rho_0\,S \left[-\delta\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\right]_0^{+\infty} \\ &= \rho_0\,S\delta\,(0+\delta) \end{aligned}$$

$$\boxed{m = \rho_0\,S\delta \simeq 10\,\text{tonnes}\,.}$$

Espace 7

II - Actions mécaniques dans un fluide

II.A - Classification des actions mécaniques

Les forces subies par un solide peuvent être classées en deux grandes catégories :

- les **forces à distance**, exercées par l'intermédiaire d'un champ :
  poids, force de Lorentz ;

Espace 8

- les **forces de contact**, qui nécessitent que l'opérateur touche le système :

  forces de frottement, réaction du support, ressort

Espace 9

En mécanique des fluides, cette classification prend une forme un peu différente, et on distingue plutôt :

- les **forces volumiques**, qui sont la résultante des forces à distance subies par chacune des molécules de la particule fluide ;
- les **forces surfaciques**, qui sont l'équivalent des forces de contact avec les particules fluides voisines ou avec les parois du récipient contenant le fluide.

II.B - Exemple de force volumique : le poids

Force de pesanteur subie par une particule fluide de masse $\mathrm{d}m$ située en M :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\mathrm{pes}} = \mathrm{d}m\,\overrightarrow{g} = \rho(M)\,\mathrm{d}\tau\,\overrightarrow{g}\,.$$

Espace 10

> ***Remarque :*** *pour ne pas confondre avec la pression, le poids d'une particule fluide ne se note jamais $\overrightarrow{\mathrm{d}P}$.*

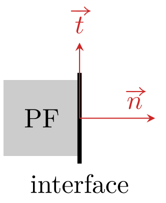
Pour approfondir : On appelle densité volumique de force (ou force volumique en raccourci), notée $\overrightarrow{f}$, le rapport entre la force $\mathrm{d}\overrightarrow{F}$ exercée sur une particule fluide et son volume $\mathrm{d}\tau$. Ainsi, la densité volumique de force de pesanteur s'écrit

$$\overrightarrow{f}_{\mathrm{pes}}(M) = \rho(M)\,\overrightarrow{g}\,.$$

La densité volumique de force est indépendante de la masse du système et définie localement, il s'agit donc d'une grandeur intensive, au contraire d'une force volumique qui est une grandeur extensive. ■

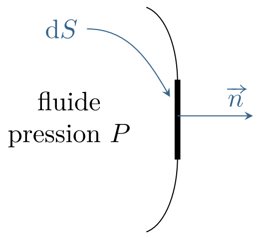
II.C - Exemple de force surfacique : la force de pression

- **Actions mécaniques de contact dans un fluide**



La force exercée par une particule fluide à une interface (avec une autre particule fluide ou avec un solide) se décompose sur deux directions orthogonales :
- ▷ dans la direction normale à la surface, on parle de **force pressante**, ou force de pression ;
- ▷ dans la direction tangentielle à la surface, on parle de **force visqueuse**, ou force de viscosité.

Les forces de viscosité seront abordées dans le prochain chapitre ... et pour cause : elles n'existent que si le fluide est en écoulement, et sont donc nulles dans un fluide au repos.



La force exercée par un fluide dans lequel règne une pression P
sur une surface mésoscopique $\mathrm{d}S$ centrée en M
est purement normale dans un fluide au repos et vaut

$$\mathrm{d}\vec{F}_P = P(M)\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}\,,$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$ est le **vecteur surface élémentaire**,
orthogonal à l'élément de surface, et dirigé du fluide vers l'extérieur.

> ***Remarque :*** *ce résultat constitue en fait la définition mésoscopique de la pression.*

Attention ! Le vecteur unitaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est orienté *du fluide vers l'extérieur*. Qualitativement et de manière très générale, la force de pression exercée par une portion de fluide est toujours orientée dans le sens qui conduirait le fluide à s'étaler.

> **Pour approfondir :** On constate que la force pressante est proportionnelle à la surface $\mathrm{d}S$ de l'interface considérée. Par analogie avec la définition d'une force volumique, on constate ainsi que la pression peut s'interpréter comme la *densité surfacique* de force pressante. ■

- **Interprétation microscopique**

Les molécules d'un gaz ou d'un liquide sont en mouvement permanent sous l'effet de l'**agitation thermique**. La force pressante, définie aux échelles méso et macroscopique, s'interprète à l'échelle microscopique comme étant la résultante des forces dues aux collisions des molécules de fluide sur la paroi solide.

Toutefois, on peut vite se rendre compte que cette image n'est qu'à moitié convaincante : la matière est supposée discrète pour le fluide (molécules) et continue pour le solide (paroi). Il est donc rapidement nécessaire de recourir à des modèles microscopiques plus précis ... mais plus compliqués.

- **Continuité de la pression**

La pression est toujours continue à l'interface entre deux fluides, qu'ils soient au repos ou en écoulement.

> ***Remarque culturelle :*** *Les phénomènes de tension de surface (ménisque, capillarité, etc.) font que cette propriété n'est en fait qu'une approximation.*

- **Unités de pression**

Travailler avec les unités de pression peut vite devenir assez laborieux. L'unité de pression dans le système international est le **pascal Pa**, évidemment en l'honneur de notre lycée [1] ☺ :

$$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}\,.$$

Le pascal a l'inconvénient d'être une « petite unité » (c'est-à-dire que 1 Pa est une faible pression), on utilise couramment des unités dérivées, et notamment le **bar**, qui correspond à l'ordre de grandeur de la pression atmosphérique :

$$\boxed{1\,\mathrm{bar} = 1\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\,.}$$

En effet, au niveau de la mer,

$$P_{\mathrm{atm}} = 1{,}013\,\mathrm{bar}\,.$$

1. Blaise Pascal (1623-1662) a vécu dans le quartier Saint-Sever entre 1640 et 1647, et y a fait un certain nombre d'expériences fondatrices. Nous y reviendrons !

Complément culturel : *D'autres unités du langage courant ou historique se rencontrent également.*

- *Les pressions peuvent être exprimées en atmosphère atm, c'est-à-dire en multiples de la pression atmosphérique ;*
- *En météorologie, les pressions sont usuellement exprimées en hectopascal : 1 bar correspond à 1000 hPa.*
- *Les premiers baromètres fonctionnaient par mesure du niveau de mercure dans un tube : l'unité historique de pression était donc le millimètre de mercure mmHg,*

$$1\ \text{mmHg} = 133\ \text{Pa} \qquad \text{soit} \qquad 1\ \text{atm} = 760\ \text{mmHg}\,.$$

- *Dans l'industrie l'usage est parfois d'exprimer les pressions en kilogramme ou kilogramme-force ... mais cette unité est franchement maladroite du point de vue de la physique, puisqu'il s'agit en fait de kilogramme-force par cm^2. Comme 1 kgf = 9,81 N (poids d'une masse de 1 kg),*

$$1\,\text{kgf/cm}^2 = 0{,}981\,\text{bar}\,.$$

Ainsi, les pressions exprimées en kilogramme s'identifient quasiment aux pressions exprimées en bar.

III - Champ de pression dans un fluide au repos

On appelle **champ de pression** la donnée de la pression en fonction du point M. Il s'agit d'une donnée locale, qui se calcule donc avec une approche locale, c'est-à-dire mésoscopique. Comme la pression est une force, on utilise une approche mécanique.

$\rightsquigarrow$ application du théorème de la résultante cinétique (TRC) à un système mésoscopique en équilibre.

III.A - Principe de Curie

Le principe de Curie est un postulat qualitatif permettant de simplifier l'étude mathématique d'un problème physique par une étude préalable des symétries du système étudié. Il a été formulé par Pierre Curie à la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle. Sa formulation moderne est la suivante :

> Lorsque certaines causes produisent certains effets,
> les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

Le terme « élément de symétrie » est à entendre au sens large : il peut s'agir de plans ou d'axes de symétrie, mais aussi d'invariances sous certaines transformations géométriques comme les translations ou les rotations.

III.B - Relation de la statique des fluides dans le champ de pesanteur

On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et on note (Oz) un axe vertical ascendant.

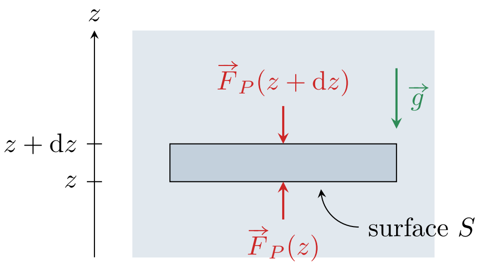
Étude des invariances :

Le fluide et le champ de pesanteur sont invariant par translation de vecteur directeur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, donc d'après le ppe de Curie la pression $P(M)$ en un point M ne dépend pas des coordonnées x et y de ce point. Ainsi, le champ de pression ne dépend que de z : $P(M) = P(z)$.

Espace 11

Remarque : *On pourrait croire qu'il y a aussi invariance par translation selon Oz car $\vec{g}$ ne dépend pas de z, mais ce n'est en fait pas le cas : l'énergie potentielle de pesanteur $E_{\text{pp}} = mgz$ dépend de z, et n'est donc pas invariante par ces translations.*

Choix du système :



Méso dans le direction z mais macro dans les directions x et y. On raisonne donc sur une tranche mésoscopique de fluide à l'équilibre, de surface S et hauteur infinitésimale $\mathrm{d}z$, délimitée par les plans d'ordonnée z et $z+\mathrm{d}z$.

Bilan des forces : Compléter le schéma au fur et à mesure

▷ son poids $\mathrm{d}\vec{P} = \rho\,\mathrm{d}V\,\vec{g} = -\rho\,S\,\mathrm{d}z\,g\,\vec{e}_z$;
▷ la force pressante exercée par la tranche mésoscopique immédiatement en dessous, $\vec{F}_P(z) = P(z)\,S\,\vec{e}_z$;
▷ la force pressante exercée par la tranche mésoscopique immédiatement au dessus, $\vec{F}_P(z+\mathrm{d}z) = P(z+\mathrm{d}z)\,S\,(-\vec{e}_z)$
▷ d'autres forces pourraient être prises en compte mais on suppose conformément au programme qu'il n'y en a pas.

Espace 12

TRC et projection :

$$0 = -\rho\,\mathrm{d}V\,g + P(z)\,S - P(z+\mathrm{d}z)\,S\,.$$

Comme $\mathrm{d}z$ est infinitésimal, on peut faire un développement limité en utilisant la formule de Taylor-Young :

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + o(h)$$
$$P(z+\mathrm{d}z) \simeq P(z) + \mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$$

En physique il est presque toujours sous-entendu qu'on se limite au premier ordre.
En injectant dans l'équation issue du TRC, on en déduit

$$0 = -\rho\,\mathrm{d}V\,g - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z\,S\,.$$

Simplifier par $\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}z$ conduit finalement à l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho\,g\,.}$$

Espace 13

Relation de la statique des fluides dans le seul champ de pesanteur :

En tout point d'un fluide au repos dans le seul champ de pesanteur,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \pm \rho g$$

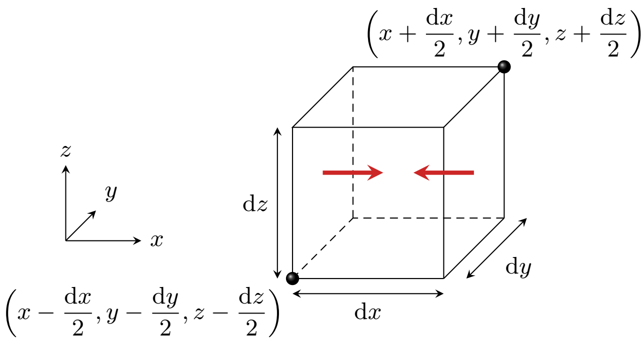
Signe $-$ si l'axe z est ascendant et $+$ s'il est descendant.

R D

Attention ! Si le fluide est compressible (= un gaz), ρ dépend de P et donc de z.

Remarque : *Le signe se retrouve en sachant que la pression diminue toujours avec l'altitude.*

Pour approfondir : Considérons un cas plus général où la pression dépend des trois variables d'espace : $P = P(x, y, z)$. Raisonnons sur une particule fluide de volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ centré sur le point $M(x, y, z)$.



La force de pression résultante sur cette particule fluide compte alors trois composantes. Exprimons la composante $\mathrm{d}F_{P,x}$, les deux autres se calculant de manière analogue :

$$\mathrm{d}F_{P,x} = P\left(x - \frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - P\left(x + \frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

La pression dépendant de trois variables, les développements limités font intervenir des dérivées partielles, ce qui donne

$$\mathrm{d}F_{P,x} = \left(\cancel{P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} + \frac{-\mathrm{d}x}{2}\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right) - \left(\cancel{P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}x}{2}\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right) = -\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Le même raisonnement s'applique aux autres composantes et conduit à

$$\mathrm{d}\vec{F}_P = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e}_z\right)\mathrm{d}\tau\,.$$

On reconnaît alors l'expression du gradient du champ de pression P, introduit en PTSI et que nous retrouverons bientôt :

$$\mathrm{d}\vec{F}_P = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Ainsi, les forces pressantes à l'échelle d'une particule fluide sont équivalentes à une force volumique de densité $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$. On peut en déduire une expression générale de la relation de la statique des fluides, en considérant la particule fluide soumise à son poids, les forces de pression et éventuellement d'autres forces volumiques $\mathrm{d}\vec{F}_i = \vec{f}_i\,\mathrm{d}\tau$ de densité volumique de force $\vec{f}_i$. D'après le théorème de la résultante cinétique,

$$\vec{0} = \rho\,\mathrm{d}\tau\,\vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau + \sum_i \vec{f}_i\,\mathrm{d}\tau$$

d'où on déduit l'écriture générale tridimensionnelle de la relation de la statique des fluides

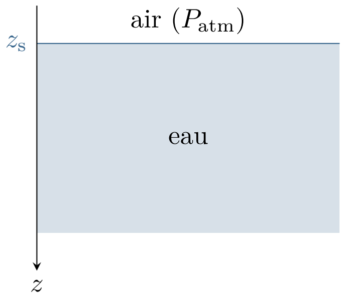
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \rho\vec{g} + \sum_i \vec{f}_i\,.$$

Cette écriture a l'avantage d'être applicable dans n'importe quel système de coordonnées ... à condition d'utiliser la bonne expression du gradient. ■

III.C - Champ de pression hydrostatique dans un fluide incompressible

Le domaine de l'hydrostatique concerne la statique des liquides incompressibles, de masse volumique ρ_0 constante.

- **Évolution de la pression avec la profondeur**



Axe z descendant, donc la RSF s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = +\rho_0 g$$

On procède ensuite par séparation des variables entre la surface z_s et un z quelconque,

$$\int_{P_{\text{atm}}}^{P(z)} \mathrm{d}P = \rho_0 g \int_{z_s}^{z} \mathrm{d}z$$

ce qui donne

$$P(z) = P_{\text{atm}} + \rho_0 g (z - z_s)$$

Loi de pression hydrostatique :

Dans un liquide incompressible, la pression ne dépend que de la profondeur et évolue linéairement

$$P(z) = P_{\text{atm}} \pm \rho_0 g (z - z_s)$$

où z_s est la coordonnée de la surface libre, et le signe dépend du sens de l'axe (Oz).

La différence de pression entre deux points ne dépend que de l'écart de profondeur,

$$\Delta P = \rho_0 \, g \, \Delta z$$

En particulier, en un point situé sous une hauteur h de liquide,

$$P = P_{\text{atm}} + \rho_0 g h \,.$$

- **Ordres de grandeur**

Masse volumique de l'eau : $\rho_0 = 1 \cdot 10^3 \,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

▷ Pression au fond de la Seine à Rouen (profondeur moyenne d'environ 9 m) :

$P = 1{,}9\,\mathrm{bar}$

Espace 14

▷ Pression au fond de la fosse des Mariannes (lieu le plus profond de l'océan, environ 11 km, au large des Philippines) :

$P = 1{,}1 \cdot 10^8\,\mathrm{bar} = 1100\,\mathrm{atm}$

Espace 15

Dans l'eau, la pression augmente d'un bar tous les dix mètres de profondeur.
Usuellement, on peut la supposer uniforme sur des distances de l'ordre de quelques dizaines de centimètres.

- **Application : expérience historique du tonneau, faite par Blaise Pascal à Rouen en 1646**

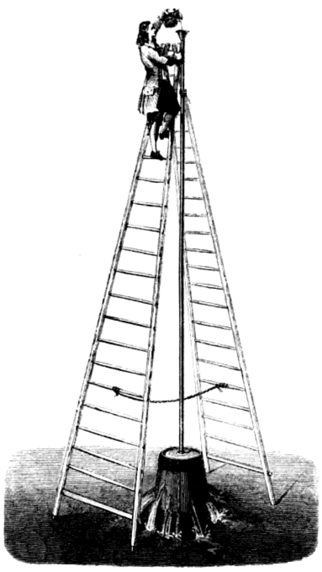


Fig. 45.—Hydrostatic paradox. Pascal's experiment.

Un fin tube de verre ouvert à ses deux extrémités est plongé dans un tonneau hermétiquement fermé rempli d'eau, puis rempli à son tour. Bien que la masse d'eau contenue dans le tube soit négligeable devant celle contenue dans le tonneau, elle suffit à faire éclater le tonneau.

En ordre de grandeur, le tube mesure une dizaine de mètres. Il est ouvert à son extrémité : la pression en haut du tube est égale à la pression atmosphérique. Par conséquent, la pression dans le tonneau est de l'ordre de

$$P = 10^5 + 10^3 \times 10 \times 10 = 2\,\mathrm{bar}$$

Ainsi, la petite colonne d'eau suffit à doubler la pression dans le tonneau (même avec une masse qui ne double pas du tout), ce qui peut suffire à le faire éclater.

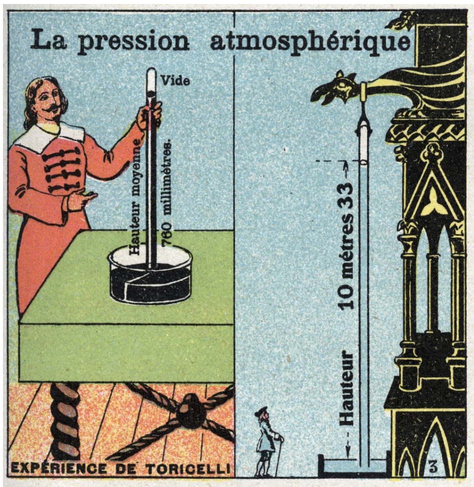
Espace 16

Moralité :

La pression est reliée à la *hauteur* d'eau au dessus du point d'intérêt,
mais pas directement à la masse !

$\rightsquigarrow$ si un deuxième tonneau avait été connecté au premier par un tuyau et placé 1 m au dessus, ni l'un ni l'autre n'auraient explosé.

- **Application : expérience historique des liqueurs, faite par Blaise Pascal à Rouen en 1647**



L'expérience est d'une certaine façon le symétrique de l'expérience précédente. Elle a été réalisée par Evangelista Toricelli en 1643 avec du mercure, et reproduite par Blaise Pascal avec de l'eau en 1647. Il la réalise en public en divers endroits de Rouen, notamment devant l'abbatiale Saint-Ouen et la côte Sainte-Catherine, pour disposer de grande hauteur.

Un tube de verre d'une quinzaine de mètres de haut, fermé à une extrémité et bouché à l'autre, est rempli d'eau (ou plus exactement de vin rouge pour que l'expérience soit bien visible) puis dressé à la verticale. L'extrémité basse est alors plongée dans un baquet puis débouchée. On observe alors le vin descendre le long du tube, vidant un large espace au sommet, puis s'arrêter à une hauteur d'environ 10 m au dessus de l'eau.

La pression est égale à P_{atm} à la surface libre du baquet, et nulle en haut du tube. La hauteur de la colonne de fluide est telle que

$$P_{\mathrm{atm}} - \rho_0 g h = 0 \qquad \text{soit} \qquad h = \frac{P_{\mathrm{atm}}}{\rho_0 g} = 10\,\mathrm{m}$$

Le tube de Toricelli est plus petit car le mercure est beaucoup plus dense que l'eau.

Espace 17

III.D - Champ de pression atmosphérique dans le modèle isotherme

Il est bien connu des sportifs qu'il est plus difficile de respirer sur les sommets que dans les vallées, car la pression atmosphérique diminue en altitude. Cet effet a été mis en évidence par Blaise Pascal en 1648 sur le Puy de Dôme, au dessus de Clermont-Ferrand. Nous allons l'interpréter par un modèle très simple, en décrivant l'atmosphère comme un gaz parfait de température T_0 uniforme.

- **Lien entre pression et masse volumique**

Attention ! La masse volumique d'un gaz n'est pas constante, mais elle dépend de la pression.

M !

$$P\frac{V}{m} = \frac{n}{m}RT_0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{P}{\rho} = \frac{RT_0}{M} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\rho = \frac{PM}{RT_0}\,.}$$

Espace 18

- **Profil de pression dans l'atmosphère isotherme**

D

D'après la RSF avec z ascendant

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{PM}{RT_0}g$$

ce qui s'écrit sous forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \frac{1}{\delta}P = 0 \qquad \text{avec} \qquad \delta = \frac{RT_0}{Mg} \simeq 8\,\mathrm{km}\,.$$

Forme générale des solutions : solution particulière nulle, donc

$$P(z) = A\,\mathrm{e}^{-z/\delta}$$

Condition aux limites :

$$P(0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CL}}}{=} P_0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A$$

Finalement :

$$\boxed{P(z) = P_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,.}$$

Espace 19

Q

Dans l'atmosphère isotherme, la pression décroît exponentiellement avec l'altitude.

- **Ordres de grandeur**

▷ Rapport des pressions entre le niveau de la mer et le sommet de l'Everest : $h \simeq 8848\,\mathrm{m}$, donc

$$\frac{P_{\text{Everest}}}{P_{\text{mer}}} = \frac{P_0\,\mathrm{e}^{-h/\delta}}{P_0} = 0{,}33\,.$$

▷ Rapport des pressions entre la salle de cours et la salle de TP :

$$\frac{P_{\text{TP}}}{P_{\text{cours}}} = \frac{P_0\,\mathrm{e}^{-z_{\text{TP}}/\delta}}{P_0\,\mathrm{e}^{-z_{\text{cours}}/\delta}} = \exp\left(-\frac{(z_{\text{TP}} - z_{\text{cours}})}{\delta}\right) = 0{,}9995 \qquad \text{avec} \qquad z_{\text{TP}} - z_{\text{cours}} \simeq 4\,\mathrm{m}\,.$$

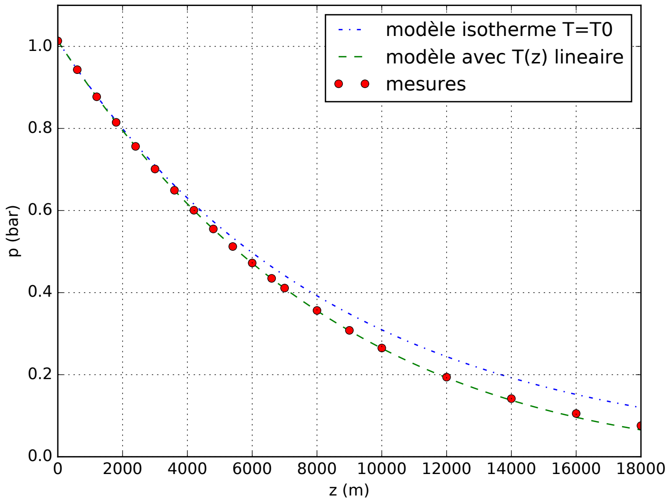
La pression varie de manière bien plus importante dans un liquide que dans un gaz.

On peut la supposer uniforme sur des distances très inférieures à δ, soit quelques centaines de mètres.

Q

⇝ à échelle humaine, la pression atmosphérique peut toujours être supposée uniforme.

- **Pertinence du modèle**



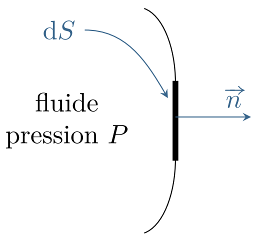
Points rouges : mesures de pression dans l'atmosphère.

Courbe bleue : modèle isotherme à $T_0 = 273\,\mathrm{K}$.

Courbe verte : modèle à profil de température linéaire, aussi appelé modèle polytropique, qui postule une évolution de la forme $T = T_0(1 - \alpha z)$.

⇝ le modèle isotherme est qualitativement cohérent, mais peu précis numériquement au delà de quelques kilomètres d'altitude.

IV - Résultante des forces de pression subies par un solide



Rappel : la force pressante subie par un élément mésoscopique de surface dS s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{F}_P = P(M)\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$ est le vecteur surface élémentaire, dirigé du fluide vers la paroi.

Attention ! Ne pas se tromper sur le sens de $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$. De façon générale, la force de pression est toujours orientée dans le sens qui conduirait la particule fluide à s'étaler.

IV.A - Préambule : expression du vecteur surface élémentaire

Au même titre que le vecteur déplacement élémentaire vu en mécanique en PTSI a une expression propre à chaque système de coordonnées, la surface élémentaire dS et le vecteur surface élémentaire (et également le volume élémentaire) ont aussi une expression dans chaque système de coordonnées. Elle s'obtient à partir du vecteur déplacement élémentaire : le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S_z}$ d'une surface de normale $\vec{e}_z$ s'obtient en multipliant les deux composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$ selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.

M !

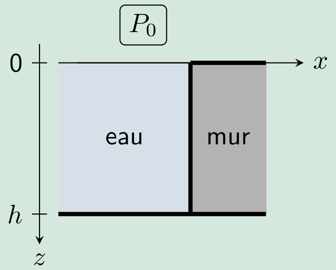
Faire un schéma. $\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$ donc $\overrightarrow{\mathrm{d}S_z} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\vec{e}_z$

Espace 20

IV.B - Exemple : paroi plane soumise à la pression hydrostatique

M

Application 2 : Force pressante exercée sur le mur d'une piscine



On s'intéresse à un pan de mur vertical d'une piscine profonde de $h = 4\,\mathrm{m}$. Le pan de mur est large de $L = 10\,\mathrm{m}$ dans la direction (Oy).

Calculer la force de pression subie par le mur.

Uniformité de la pression ?

Il faut tenir compte des variations de pression car h n'est pas négligeable devant $10\,\mathrm{m}$. On utilise l'hydrostatique avec z descendant et la surface en $z = 0$, soit $P(z) = P_0 + \rho_0 g z$.

Espace 21

Expression du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$:

Le vecteur normal à la paroi est $\vec{e}_x$, la surface élémentaire est le produit des deux composantes restantes, d'où $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_x$.

Espace 22

Calcul de la force pressante :

$$\begin{aligned}
\vec{F}_P &= \iint P(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_x \\
&= \left(\int_0^L \mathrm{d}y\right) \times \left(\int_0^h (P_0 + \rho g z)\,\mathrm{d}z\right)\vec{e}_x \\
&= L\left(\int_0^h (P_0 + \rho g z)\mathrm{d}z\right)\vec{e}_x \\
&= L \times \left[P_0 z + \rho g \frac{z^2}{2}\right]_0^h
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F}_P = \left(P_0 + \frac{\rho g h}{2}\right) L h\,\vec{e}_x\,.}$$

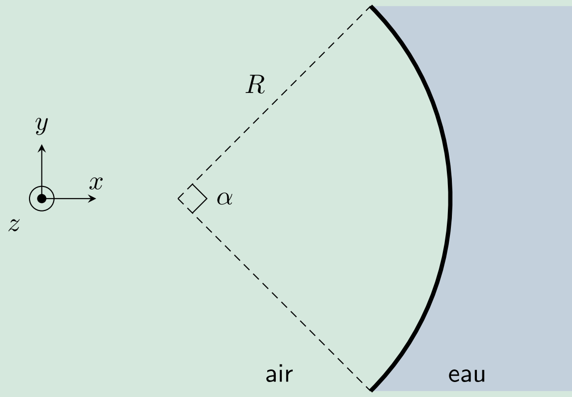
Espace 23

IV.C - Exemple : paroi cylindrique soumise à la pression hydrostatique

Application 3 : Barrage voûte

M

Un barrage voûte est ainsi nommé en raison de sa forme arquée caractéristique. La forme courbe de ces barrages permet de reporter les efforts dus à la poussée de l'eau sur chaque côté des rives. Un tel barrage fonctionne sur le même principe que les voûtes des cathédrales : pour ces dernières, la charge se concentre sur les piliers des voûtes, alors que pour les barrages, l'effort se concentre aux points d'appuis sur les rives. Ce type de barrage est donc adapté aux vallées étroites disposant de versant très rigides. On modélise un tel barrage par un quart de cylindre de hauteur $H = 135\,\mathrm{m}$, rayon R et d'ouverture $\alpha = \pi/2$.



1 - On se place en coordonnées cylindiques d'axe (Oz) ascendant dont l'origine coïncide avec le fond du barrage. Exprimer le champ de pression dans l'eau.

2 - Déterminer sans calcul la direction de la résultante $\vec{F}_{\text{tot}}$ des forces pressantes subies par le barrage.

3 - Calculer cette force.

Attention ! Le barrage subit ici des forces pressantes exercées par **deux** fluides : l'eau d'un côté ... et l'air de l'autre !

IV.C.1 - Champ de pression

Faire un schéma ! On repart de la relation de l'hydrostatique avec axe ascendant et surface en $z = H$, ce qui donne en intégrant

$$P(z) = P_{\text{atm}} - \rho_0 g (z - H)\,.$$

Espace 24

IV.C.2 - Direction des forces pressantes

Conséquence pratique du principe de Curie :

Si le système réunissant le fluide et le solide qui subit la force admet un plan de symétrie, alors la résultante des forces pressantes est incluse dans ce plan.

Le plan (xOz) est plan de symétrie du barrage. Par conséquent, la résultante des forces pressantes est incluse dans ce plan :

$$\vec{F}_{\text{tot}} = F_x\,\vec{e}_x + F_z\,\vec{e}_z\,.$$

De plus, la force élémentaire est en tout point normale au barrage, donc la composante verticale z est nulle. On en déduit

$$\overrightarrow{F}_{\text{tot}} = F_x \, \overrightarrow{e}_x \,.$$

Enfin, la pression côté eau étant supérieure à celle côté air, on en déduit que la résultante des forces de pression est **dirigée selon $-\overrightarrow{e}_x$** c'est-à-dire que la composante F_x est négative.

Espace 25

IV.C.3 - Calcul de la force totale

Uniformité de la pression atmsophérique ?

La pression dans l'air varie sur une échelle de quelques kilomètres : on peut donc la supposer constante à l'échelle du barrage, notée P_{atm}.

Espace 26

Force subie par un élément de surface du barrage :

Ne pas oublier qu'il y a l'eau et l'air ! Le dessiner et dessiner $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S \, \overrightarrow{e}_r$ sur le schéma.

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F}_P = \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{eau}} + \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{air}} = P(z)(-\overrightarrow{\mathrm{d}S}) + P_{\text{atm}}\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \rho_0 g(z - H)\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Espace 27

> ***Remarque :*** *À ce stade, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ peut être orienté dans un sens ou l'autre, mais il faudra en tenir compte dans son expression.*

Expression du vecteur surface élémentaire :

Déplacement élémentaire en cylindrique : $\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}r \, \overrightarrow{e}_r + r \, \mathrm{d}\theta \, \overrightarrow{e}_\theta + \mathrm{d}z \, \overrightarrow{e}_z$
Vecteur normal : $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est dirigé selon $\overrightarrow{e}_r$.
Conclusion : le barrage a pour rayon $r = R$, donc $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = R \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z \, \overrightarrow{e}_r$

Espace 28

Calcul de la force : Pour éviter les calculs d'intégrales inutiles, on ne calcule évidemment pas les composantes dont on sait par symétries qu'elles sont nulles ... mais attention à ne pas confondre projection et norme : le produit scalaire introduit souvent un cosinus supplémentaire.

La composante utile de la force de pression subie par le barrage est donc

$$\mathrm{d}F_{P,x} = \rho_0 g(z-H)\overrightarrow{\mathrm{d}S}\cdot\vec{e}_x = \rho_0 g(z-H)R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_r\cdot\vec{e}_x = \rho_0 g(z-H)R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\cos\theta$$

La composante utile de la résultante est donc

$$\begin{aligned}F_{P,x} &= \iint_{\text{barrage}} \rho_0 g(z-H)R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\\ &= \rho_0 g R\times\int_{z=0}^{z=H}(z-H)\mathrm{d}z\times\int_{\theta=-\pi/4}^{\theta=\pi/4}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \rho_0 g R\times\left[\frac{z^2}{2}-zH\right]_0^H\left[\sin\theta\right]_{\theta=-\pi/4}^{\theta=\pi/4}\\ &= \rho_0 g R\times\left(\frac{H^2}{2}-H^2\right)\times 2\sin\frac{\pi}{4}\\ &= -\frac{R\,\rho\,g\,H^2}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Les autres composantes étant nulles, on en conclut

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{R\,\rho\,g\,H^2}{\sqrt{2}}\,\vec{e}_x\,,}$$

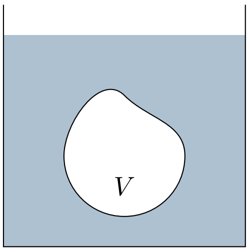
qui est bien dirigée selon $-\vec{e}_x$ comme prévu initialement.

Espace 29

IV.D - Cas d'un solide totalement immergé : poussée d'Archimède

On appelle **poussée d'Archimède** $\overrightarrow{\Pi}_\mathrm{A}$ la force exercée par un fluide au repos sur un solide totalement immergé.
Cette force est la résultante des forces de pression subies par le solide.

- **Démonstration qualitative**

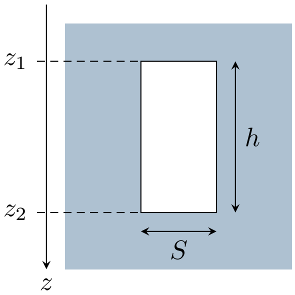


Considérons un solide totalement immergé au sein d'un fluide au repos. Les raisonnements autour de la relation de la statique des fluides ne font jamais intervenir de conditions aux limites aux parois ou sur des obstacles, ainsi le champ de pression dans le fluide est le même que le solide soit présent ou absent. Par conséquent, le solide subit exactement la même force pressante que celle que subissait la portion de fluide dont il a pris la place.

Or cette portion de fluide remplacé était précédemment au repos, ce qui signifie que cette force pressante compensait exactement son poids. Ainsi, la poussée d'Archimède est l'opposé du poids du volume de fluide remplacé :

$$\overrightarrow{\Pi}_\mathrm{A} = -m_\mathrm{fl\ rpl}\,\overrightarrow{g} = -\rho_\mathrm{fl} V\,\overrightarrow{g}\,.$$

- **Démonstration mathématique sur un exemple**



Considérons le cylindre ci-contre, totalement immergé dans un liquide de masse volumique ρ_liq. Calculons la résultante des forces de pression subies par le cylindre.

Le calcul de la force de pression se décompose en trois domaines : les deux faces planes et la face cylindrique. Par symétrie, $\overrightarrow{F}_\mathrm{cyl} = \overrightarrow{0}$. On a ensuite

$$\overrightarrow{F}_\mathrm{haut} = (P_0 + \rho_\mathrm{liq} g z_1) S \overrightarrow{e}_z \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{F}_\mathrm{bas} = -(P_0 + \rho_\mathrm{liq} g z_2) S \overrightarrow{e}_z$$

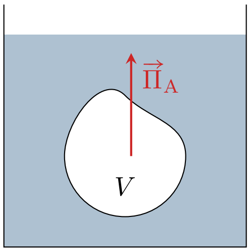
En sommant les trois contributions,

$$\overrightarrow{F}_P = \rho_\mathrm{liq} g (z_1 - z_2) S \overrightarrow{e}_z = -\rho_\mathrm{liq} g S h \overrightarrow{e}_z\,,$$

On voit apparaître le volume du cylindre Sh.

Espace 30

- **Généralisation : théorème d'Archimède**



La poussée d'Archimède subie par un solide dont un volume V_{imm} est immergé est égale à l'opposée du poids d'un volume V_{imm} de ce fluide,

$$\overrightarrow{\Pi}_{\mathrm{A}} = -\rho_{\mathrm{fl}}\, V_{\mathrm{imm}}\, \overrightarrow{g}$$

où ρ_{fl} est la masse volumique du fluide.
Elle s'applique au centre de poussée, qui est le centre de masse du volume immergé.

R

> ***Remarque :*** *Comme le montre clairement l'exemple du cylindre, ce sont les variations de pression avec l'altitude qui expliquent la poussée d'Archimède. Si on suppose la pression uniforme autour du corps immergé, alors $\overrightarrow{\Pi}_{\mathrm{A}} = \overrightarrow{0}$. La poussée d'Archimède est dirigée vers le haut car la pression est toujours plus importante sous l'objet qu'au dessus.*

- **Deux cas particuliers fréquents**

▷ Lorsque le solide flotte à l'interface entre deux fluides, il subit une poussée d'Archimède de la part de chaque fluide, correspondant à la proportion de volume immergé dans chaque fluide. À l'interface entre un liquide et un gaz, la poussée d'Archimède exercée par le gaz est presque toujours négligeable (masse volumique très inférieure).

▷ Lorsque le solide est posé sur le fond du récipient, il n'est pas « totalement immergé » : sa face inférieure ne subit pas une force de pression mais une force de réaction exercée par le fond du récipient, qui est a priori inconnue. Le théorème d'Archimède est alors inutilisable et il faut calculer « à la main » la résultante des forces de pression.