Cours 10 – Mécanique des fluides *Version prof*

Description des écoulements

Plan du cours

I Deux approches pour décrire un écoulement **2**
I.A Description lagrangienne . . . 2
I.B Description eulérienne . . . 3
I.C Écoulement stationnaire . . . 4
I.D Représenter le champ des vitesses d'un écoulement stationnaire . . . 4
II Débits **6**
II.A Débit massique . . . 6
II.B Débit volumique . . . 8
II.C Conservation du débit . . . 10
III Viscosité **12**
III.A Force surfacique de viscosité . . . 12
III.B Écoulements parfaits ou visqueux . . . 13
III.C Vitesse d'un fluide au contact d'une paroi solide . . . 14
IV Quelques propriétés des écoulements stationnaires **14**
IV.A Écoulement laminaire ou turbulent . . . 14
IV.B Écoulement incompressible et divergence du champ de vitesse . . . 17
IV.C Écoulement tourbillonnaire et rotationnel du champ de vitesse . . . 19

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 1 « Thermodynamique et mécanique des fluides », bloc 4 « Description d'un fluide en écoulement stationnaire dans une conduite ».

Cette partie introduit le point de vue eulérien pour l'étude des écoulements. Il s'agit de décrire simplement un écoulement en identifiant des tubes de courant sur lesquels des bilans pourront ensuite être effectués.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Grandeurs eulériennes. Régime stationnaire.	Décrire localement les propriétés thermodynamiques et mécaniques d'un fluide à l'aide des grandeurs intensives pertinentes.
Lignes et tubes de courant. Débit massique.	Exprimer le débit massique en fonction de la vitesse d'écoulement. Exploiter la conservation du débit massique.
Débit volumique.	Justifier l'intérêt d'utiliser le débit volumique pour l'étude d'un fluide de volume massique uniforme en écoulement.
Écoulements laminaires et turbulents. Nombre de Reynolds.	Relier le régime d'écoulement au nombre de Reynolds.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : partie 1 « Thermodynamique et mécanique des fluides », bloc 5 « Énergétique des fluides en écoulement laminaire stationnaire dans une conduite ».

Notions et contenus	Capacités exigibles
Fluides parfaits. Fluides newtoniens. Notion de viscosité.	Citer des ordres de grandeur de viscosité dynamique de gaz et de liquides (air, eau et lubrifiant). Relier l'expression de la force surfacique de cisaillement au profil de vitesse dans le cas d'un écoulement parallèle. Exploiter les conditions aux limites du champ de vitesse d'un fluide dans une conduite.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Au concours

- Écrit : épreuve A 2021, 2023 et 2024 ; épreuve B 2023.
- Oral : occasionnellement.

Le but de ce chapitre est de donner des outils de description des écoulements, sans se préoccuper pour le moment de leurs causes.

On distingue usuellement les **écoulements internes**, c'est-à-dire à l'intérieur d'une **conduite**, par opposition aux **écoulements externes** qui ont lieu autour d'un obstacle. Le programme de PT est restreint aux écoulements internes, mais une large part des notions abordées dans ce chapitre est valable également pour les écoulements externes.

I - Deux approches pour décrire un écoulement

R

On appelle **particule fluide** une portion de fluide mésoscopique dans les trois dimensions et de masse constante.

Attention ! Compte tenu de la définition, une particule fluide contient un très grand nombre de molécules.

Sa masse est constante, mais son volume peut varier : une particule fluide est caractérisée par le nombre de molécules qu'elle contient, mais ni par sa forme ni par ses dimensions.

I.A - Description lagrangienne

L'**approche lagrangienne** consiste à suivre au cours du temps les particules fluides P_1, P_2, P_k, etc. individuellement.

Les grandeurs physiques sont attachées à chaque particule fluide et ne dépendent que du temps.

> ***Exemples :*** *position de la particule k* $\overrightarrow{OP_k}(t)$, *vitesse* $\vec{v}_k(t)$, *masse volumique* $\rho_k(t)$, *etc.*

Cette description se rapproche de celle utilisée en mécanique des solides. Elle est naturellement associée à la notion de trajectoire des particules fluides. Expérimentalement, on les visualise en ajoutant des traceurs (colorant, fumée, bulles, etc.) et en photographiant avec un temps de pose très long.

Illustration : Faire un dessin de trajectoire de PF en indiquant les vitesses à deux instants $\vec{v}_k(t_1)$, $\vec{v}_k(t_2)$.

Cette approche est nécessaire pour faire de la mécanique des fluides au sens premier du terme, c'est-à-dire appliquer le théorème de la résultante cinétique à une particule fluide, ce qui mène à l'**équation de Navier-Stokes**, l'équation fondamentale de la mécanique des fluides. Ces aspects ne sont pas développés dans le programme de PT.

I.B - Description eulérienne

- **Définition**

L'**approche eulérienne** consiste à raisonner sur des volumes mésoscopiques fixés, centrés sur les points M_1, M_2, M_n, etc. et à enregistrer les caractéristiques des particules fluides qui y passent au cours du temps.

Les grandeurs physiques sont des champs, dépendant des coordonnées d'espace et du temps.

R

> ***Exemples :*** *champ des vitesses $\vec{v}(M,t)$, champ de pression $P(M,t)$, champ de température $T(M,t)$, champ de masse volumique $\rho(M,t)$, etc.*

Illustration : Faire un dessin avec deux PF k et k' passant par le même point à deux instants différents

Lien entre les deux approches : $\vec{v}(M,t_1) = \vec{v}_k(t_1)$ et $\vec{v}(M,t_2) = \vec{v}_{k'}(t_2)$

Espace 1

> ***Remarque :*** *Le formalisme permettant de passer rigoureusement d'une approche à l'autre (dérivation particulaire) est hors programme en PT, et il est loin d'être aussi simple que ce que l'aspect qualitatif ci-dessus peut laisser croire.*

L'approche eulérienne est la plus naturelle, et également la plus adaptée pour procéder à des bilans d'énergie des écoulements, c'est pourquoi nous l'utiliserons.

Hormis dans des cas très simplifiés, on ne connaît pas de description analytique exacte de l'écoulement, c'est-à-dire l'expression du champ de vitesse : la mécanique des fluides est un des domaines les plus « compliqués » de la physique.

- **Visualisation des deux approches pour un même écoulement**

Cette carte météo renseigne sur la direction du vent en utilisant soit le point de vue eulérien (choisir « bords »), soit le point de vue lagrangien (choisir « gradient »). La norme de la vitesse est donnée par le code couleur.

I.C - Écoulement stationnaire

Dans le cours de PT, on se retreint aux écoulements en régime permanent : on n'étudie pas les transitoires. De manière intuitive, régime permanent signifie que la vitesse du fluide en un point donné est la même à tout instant.

⇝ caractéristique eulérienne plutôt que lagrangienne.

R

Un écoulement est dit **permanent** ou **stationnaire** si les champs eulériens sont indépendants du temps.

Ainsi, considérer l'écoulement de la Seine permanent signifie que la vitesse d'écoulement sous les ponts de Rouen est constante, mais évidemment pas qu'une particule fluide garde la même vitesse depuis la bien nommée commune de Source-Seine (40 km au nord ouest de Dijon) jusqu'au Havre. Toutefois, cette hypothèse n'est valable que sur des durées faibles devant la période des marées : on parle alors d'**écoulement quasi-stationnaire**.

Attention ! Ne pas confondre : stationnaire (indépendant de t) ne signifie pas uniforme (indépendant de M).

I.D - Représenter le champ des vitesses d'un écoulement stationnaire

- **Lignes de courant**

R

On appelle **ligne de courant** d'un écoulement une ligne de champ du champ des vitesses,
c'est-à-dire une courbe qui est en tout point M tangente au champ des vitesses $\vec{v}(M)$.
Une ligne de courant est orientée dans le sens du champ des vitesses.

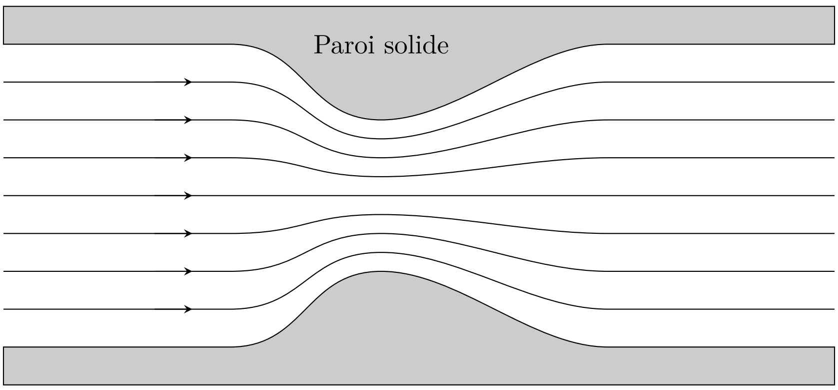
Une **carte de champ de vitesse** est une représentation d'un ensemble significatif de lignes de courant.

⇝ analogue aux lignes et aux cartes de champ magnétique.

On appelle **tube de courant** une surface fictive
définie par la réunion de l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé.

⇝ le champ des vitesses est donc tangent au tube de courant en tout point du tube.

Illustration : faire dessiner deux tubes de courant (un bien symétrique et l'autre sur un bord).



Expérimentalement : Dans un écoulement permanent, les lignes de courant sont confondues avec les trajectoires des particules fluides, ce qui permet de les visualiser de façon raisonnablement simple en utilisant des traceurs, petites particules injectées dans l'écoulement (fumée, colorant, micro-billes opaques, etc.). C'est plus délicat pour les écoulements non stationnaires.

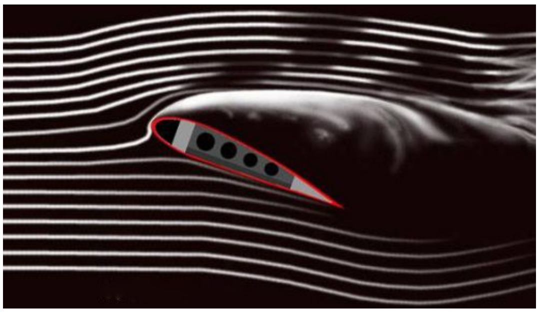
Information donnée par les lignes de courant :

Elles renseignent sur la direction et le sens de l'écoulement, mais pas directement sur la norme de la vitesse.

Espace 2

> ***Remarque :*** *exactement comme pour les lignes de champ magnétique, on peut en fait montrer que la vitesse de l'écoulement est d'autant plus élevée que les lignes de courant sont resserées.*

Exemple illustratif : *écoulement autour d'une aile d'avion.*



La photo ci-contre représente les lignes de courant d'un écoulement autour d'une profil type aile d'avion, visualisées par injection de fumée dans un écoulement d'air en soufflerie et photographie avec temps de pose long.

Dans la zone à l'arrière de l'aile (zone de turbulence), l'écoulement n'est plus stationnaire, les lignes de courant fluctuent continuellement et ne peuvent pas être visualisées par cette approche moyenne.

- **Profil de vitesse**

On appelle **profil de vitesse** d'un écoulement interne stationnaire la représentation du champ des vitesses en différents points significatifs d'une section droite de la conduite dans laquelle a lieu l'écoulement.

Exemples fondamentaux :

Application 1 : Écoulement de Couette : profil de vitesse

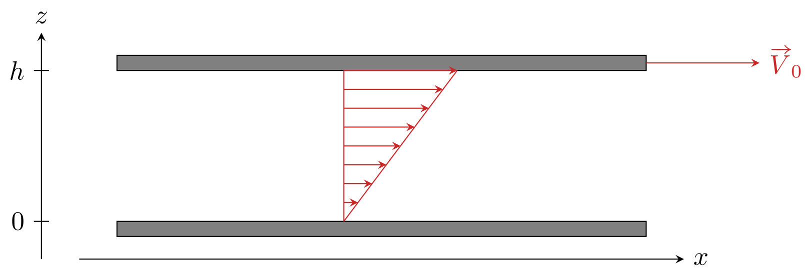
M

Un écoulement de Couette est un écoulement qui a lieu entre deux plaques en mouvement l'une par rapport à l'autre. Dans l'écoulement plan étudié ici, les deux plaques sont supposées infinies dans les directions x et y. La plaque supérieure est tirée à la vitesse $\overrightarrow{V}_0 = V_0 \overrightarrow{e}_x$.

Le champ des vitesses au sein de l'écoulement est donné par

$$\overrightarrow{v}(M) = V_0 \frac{z}{h} \overrightarrow{e}_x \,.$$

Donner l'allure des lignes de courant et représenter le profil de vitesse de l'écoulement.



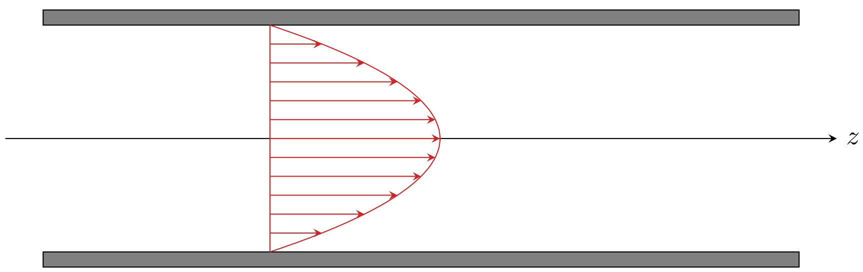
Application 2 : Écoulement de Poiseuille : profil de vitesse

M

L'écoulement de Poiseuille est le modèle le plus classique pour décrire un écoulement laminaire (cf. suite du cours) dans une conduite cylindrique de rayon R. En coordonnées cylindriques, le champ des vitesses au sein de l'écoulement est donné par

$$\overrightarrow{v}(M) = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \overrightarrow{e}_z \,.$$

Donner l'allure des lignes de courant et représenter le profil de vitesse de l'écoulement.



II - Débits

Les notions abordées dans ce paragraphe ne sont définies que pour les écoulements internes.

II.A - Débit massique

- **Définition**

R

On appelle **débit massique D_m** au travers d'une section $\mathcal{S}$
la masse de fluide qui traverse $\mathcal{S}$ par unité de temps.

Le débit massique s'exprime en $\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$.

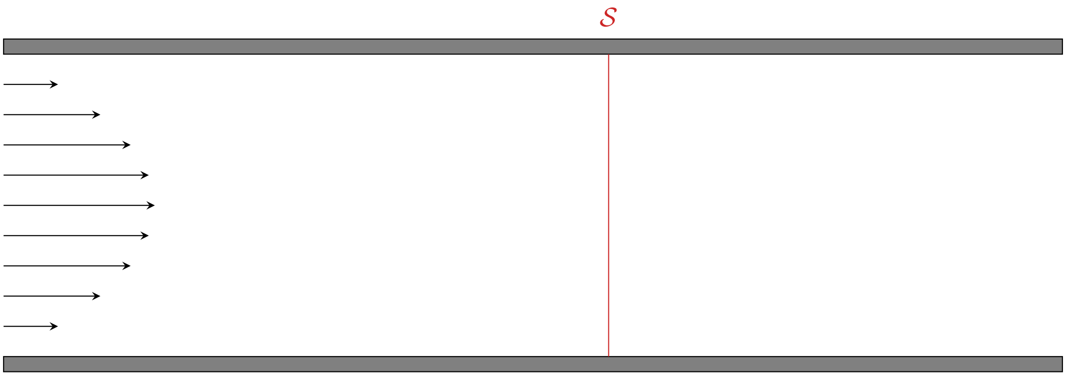
Formellement, la masse infinitésimale de fluide δm qui traverse la section $\mathcal{S}$ pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$ est reliée au débit massique par

$$\delta m = D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad D_\mathrm{m} = \frac{\delta m}{\mathrm{d}t}\,.$$

> ***Remarque :*** *les notations δ ou d sont choisies avec les mêmes conventions qu'en thermodynamique : la masse δm est* échangée *au travers de $\mathcal{S}$ alors que $\mathrm{d}t$ est une* variation *de temps.*

- **Lien au champ des vitesses : démonstration dans un cas simplifié**

On raisonne sur une section $\mathcal{S}$ perpendiculaire à l'axe d'une conduite unidimensionnelle. L'écoulement (stationnaire) est caractérisé par un champ de vitesse $\vec{v}(M)$.



▷ Découpage de la section $\mathcal{S}$ en surfaces élémentaires $\mathrm{d}S$. Le dessiner

▷ Quelles sont les particules fluides qui vont passer au travers de $\mathrm{d}S_M$ centrée en M entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$?

D

Pendant $\mathrm{d}t$ une PF située au voisinage de M avance de $v(M)\mathrm{d}t$.
Csq : les PF initialement les plus éloignées de M mais qui traversent $\mathrm{d}S_M$ malgré tout se trouvent à l'instant t à une distance $v(M)\,\mathrm{d}t$ du point M. Le dessiner.
Concl : Toutes les PF du volume $\delta V = v(M)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S_M$ passent au travers de $\mathrm{d}S$. Le dessiner.

Espace 3

▷ Masse de ces particules fluides :

$\delta^2 m = \rho(M)\,\delta V = \rho(M)v(M)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S_M$ + expliquer la notation « double infinitésimal » en espace et en temps

Espace 4

▷ Masse totale traversant $\mathcal{S}$ pendant $\mathrm{d}t$:
$\delta m = \sum_{\text{surf méso}} \delta^2 m$, soit $\delta m = \iint_{\mathcal{S}} \rho(M) v(M)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S_M$

Espace 5

▷ Conclusion : $D_\mathrm{m} = \iint_{\mathcal{S}} \rho(M)\, v(M)\,\mathrm{d}S_M$

Espace 6

- **Généralisation**

Intuitivement, on comprend que l'orientation relative de la surface $\mathcal{S}$ et du champ de vitesse $\vec{v}$ a une influence : si on avait choisi $\mathcal{S}$ confondue avec une paroi de la conduite, perpendiculaire au champ de vitesse, on aurait un débit massique nul.

⇝ intervention du produit scalaire.

Le débit massique au travers d'une surface (quelconque) $\mathcal{S}$ est donné par

$$D_\mathrm{m} = \iint_{\mathcal{S}} \rho\, \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\,,$$

où le **vecteur surface élémentaire** $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est normal à la surface $\mathcal{S}$
et globalement orienté dans le sens de l'écoulement.

R !

On appelle parfois vecteur densité de courant de masse le vecteur

$$\vec{j}_{\text{masse}} = \rho\, \vec{v}\,.$$

Le débit massique est alors le **flux** du vecteur densité de courant de masse au travers de la surface $\mathcal{S}$.

> ***Remarque :*** *la dénomination est analogue au flux magnétique rencontré dans le cours sur l'induction,*
>
> $$\phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\,.$$

- **Exemple fondamental**

Application 3 : Écoulement de Poiseuille : débit massique

M !

Considérons l'écoulement de Poiseuille de l'application 2, dont le champ des vitesses s'écrit

$$\vec{v}(M) = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_z\,.$$

On suppose la masse volumique ρ constante et uniforme. Calculer le débit massique au travers une section droite de la conduite.

Description en coordonnées cylindriques, conduite d'axe $\vec{e}_z$, donc élément de surface

$$\overrightarrow{\mathrm{d}S} = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_z$$

Faire un dessin en vue de face.

Espace 7

$$
\begin{aligned}
D_\mathrm{m} &= \iint \rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \\
&= \rho V_0 \iint \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\
&= \rho V_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \times \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r \,\mathrm{d}r \\
&= \rho V_0 \times 2\pi \times \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R \\
&= \rho V_0 \times 2\pi \times \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}\right) \\
&= 2\pi \rho V_0 \times \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{D_\mathrm{m} = \frac{\pi}{2} \rho V_0 R^2}$$

Espace 8

II.B - Débit volumique

- **Définition**

On appelle **débit volumique** au travers d'une section $\mathcal{S}$, noté D_v ou Q,
le volume de fluide qui traverse $\mathcal{S}$ par unité de temps.

Le débit volumique s'exprime en $\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$.

Formellement, le volume de fluide δV qui traverse la section $\mathcal{S}$ pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$ est reliée au débit volumique par

$$\delta V = D_\mathrm{v} \,\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad D_\mathrm{v} = \frac{\delta V}{\mathrm{d}t}\,.$$

En reprenant la démonstration précédente, le volume qui traverse une surface infinitésimale $\mathrm{d}S$ pendant $\mathrm{d}t$ s'écrit

$$\delta^2 V = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \,\mathrm{d}t$$

et on conclut par intégration.

R !

Le débit volumique au travers d'une surface $\mathcal{S}$ est le flux du champ des vitesses au travers de cette surface,

$$D_\mathrm{v} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\,.$$

- **Vitesse débitante**

En raison de la viscosité du fluide, le champ des vitesses n'est pas uniforme sur une section de la conduite : la vitesse est plus élevée au centre.

$\rightsquigarrow$ intéressant de pouvoir décrire l'écoulement par une vitesse moyenne.

On appelle **vitesse débitante** la vitesse moyenne du fluide sur une section S de la conduite,

$$V = \frac{1}{S} \iint \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{D_\mathrm{v}}{S}\,.$$

R!

Remarque : *définition analogue à la moyenne temporelle d'un signal périodique,*

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\, dt\,.$$

Physiquement, la vitesse débitante est la vitesse qu'aurait le fluide si l'écoulement était uniforme et de même débit volumique. En effet,

$$D_\mathrm{v} = \iint_\text{section} V\,\mathrm{d}S = V \iint \mathrm{d}S = V\,S$$

- **« Cas particulier » des écoulements incompressibles**

Un écoulement est dit **incompressible** si toute particule fluide garde une masse volumique constante au cours de l'écoulement.

Un écoulement incompressible est caractérisé par
$\forall M, \forall t, \rho(M,t) = \rho_0 = \text{cte}$.

Espace 9

En pratique : le caractère incompressible d'un écoulement peut être dû aux propriétés intrinsèques du fluide, mais aussi aux propriétés de l'écoulement.

▷ Un liquide est quasiment incompressible, donc les écoulements liquides le sont aussi ;
▷ Un gaz est fortement compressible a priori, mais son écoulement peut être incompressible s'il se fait à des vitesses suffisamment faibles.

Un critère quantitatif est donné par le nombre de Mach de l'écoulement,

$$\mathrm{Ma} = \frac{v}{c_\text{son}} \ll 1 \text{ pour un écoulement incompressible.}$$

En pratique Ma $< 0{,}3$ suffit pour que l'approximation d'écoulement incompressible soit raisonnablement correcte.

En pratique, tous les écoulements liquides et un grand nombre d'écoulements gazeux peuvent être considérés comme incompressibles en bonne approximation.

Q

$\rightsquigarrow$ hypothèse implicite dans le cadre du programme de PT.

Conséquence pour les débits : par définition,

$$D_\mathrm{m} = \iint_\mathcal{S} \rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \underbrace{=}_\text{incompr} \rho_0 D_\mathrm{v}\,.$$

Espace 10

Dans un écoulement incompressible, les débits massique et volumique sont proportionnels,

$$D_\mathrm{m} = \rho_0\, D_\mathrm{v}\,.$$

R

Remarque : *Ce résultat est très utile ! En cas de doute, il se retrouve par analyse dimensionnelle.*

$\rho = m/V$ donc en divisant par la durée (ou en moyen mnémotechnique ...) on trouve $\rho = D_\mathrm{m}/D_\mathrm{v}$.

Espace 11

II.C - Conservation du débit

- **Bilan de masse d'un volume de contrôle**

On appelle **volume de contrôle** un volume fixe, délimité par une surface fictive fermée, au travers duquel a lieu l'écoulement.

⇝ un volume de contrôle définit un système ouvert Σ_0 : du fluide entre et sort. le dessiner

Bilan de masse pour Σ_0 entre t et $t + \mathrm{d}t$:

D

$$\begin{array}{c}\text{masse de } \Sigma_0 \\ \text{à l'instant } t+\mathrm{d}t\end{array} = \begin{array}{c}\text{masse de } \Sigma_0 \\ \text{à l'instant } t\end{array} + \begin{array}{c}\text{masse entrée} \\ \text{entre } t \text{ et } t+\mathrm{d}t\end{array} - \begin{array}{c}\text{masse sortie} \\ \text{entre } t \text{ et } t+\mathrm{d}t\end{array}$$

> ***Remarque :*** *Cette écriture d'un bilan d'une grandeur extensive (la masse) pour un système ouvert est très générale, et nous la rencontrerons à plusieurs reprises cette année : bilan d'énergie, bilan d'enthalpie, bilan de charge électrique, etc.*

Avec les débits massiques : bien définir sur le dessin les sections d'entrée et de sortie

$$m_0(t+\mathrm{d}t) = m_0(t) + D_{\mathrm{me}}\,\mathrm{d}t - D_{\mathrm{ms}}\,\mathrm{d}t$$
$$m_0(t) + \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = m_0(t) + D_{\mathrm{me}}\,\mathrm{d}t - D_{\mathrm{ms}}\,\mathrm{d}t$$
$$\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t} = D_{\mathrm{me}} - D_{\mathrm{ms}}$$

- **Conséquence en régime stationnaire**

Hypothèse de stationnarité :

grandeurs eulériennes indépendantes du temps, donc $\dfrac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t} = 0$.

Espace 12

Interprétation physique :

$m_0(t+\mathrm{d}t) = m_0(t)$, la masse du système ouvert est une constante, c'est-à-dire il ne peut pas y avoir d'accumulation de masse dans le volume de contrôle : toute entrée est compensée par une sortie, et réciproquement.

Espace 13

Conséquence en termes de débit :
$D_{\mathrm{me}} - D_{\mathrm{ms}} = 0$ soit $D_{\mathrm{me}} = D_{\mathrm{ms}}$

Espace 14

Comme aucune hypothèse n'est faite sur les sections d'entrée et de sortie, alors ce résultat est vrai quelles que soient ces sections. On peut donc généraliser :

En régime permanent, le débit massique est identique à travers toute section d'une même conduite,

$$D_\mathrm{m} = \mathrm{cte}\,.$$

On dit qu'il y a **conservation du débit massique**.

Si l'écoulement est incompressible, il y a également conservation du débit volumique,

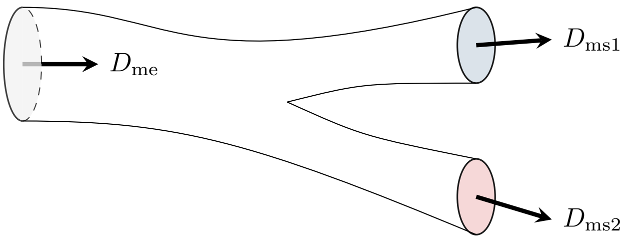
$$D_\mathrm{v} = \mathrm{cte}\,.$$

R !

- **Système à plusieurs entrées et sorties**

> ***Exemples concrets :*** *système de distribution d'eau d'une ville, douche, etc*

Espace 15



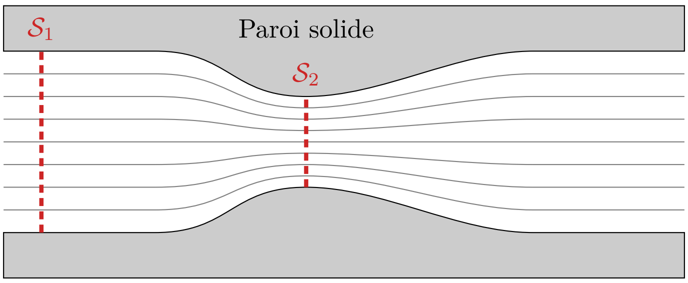
Si le volume de contrôle possède plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties, on peut généraliser :

$$\boxed{\sum_{\text{entrées}} D_\mathrm{me} = \sum_{\text{sorties}} D_\mathrm{ms}\,.}$$

On retrouve une relation type loi des nœuds, mais pour les débits massiques.

- **Modification de la vitesse lors d'une modification de section**

Raisonnons sur la conduite représentée ci-dessous, en supposant pour simplifier le profil de vitesse uniforme sur toute section de la conduite (c'est-à-dire qu'on raisonne plutôt en vitesse débitante).



Conservation du débit volumique :

$V_1 S_1 = V_2 S_2 \qquad \text{soit} \qquad V_2 = \frac{S_1}{S_2} V_1 > V_1$

Espace 16

Dans un écoulement stationnaire incompressible,
un rétrécissement de section implique une augmentation de vitesse et réciproquement.

Cela se traduit graphiquement par un resserrement des lignes de courant.

R
D

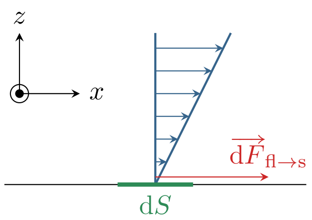
III - Viscosité

III.A - Force surfacique de viscosité

Dans le cas de l'écoulement de Couette, si le fluide se met à s'écouler quand on commence à tirer la plaque, c'est que le solide exerce une force sur le fluide : qualitativement, le fluide tend à adhérer au solide. D'après le principe des actions réciproques, le fluide exerce également une force sur la paroi, qui est l'opposée de la précédente.

- **Expression**

R M



Considérons un écoulement unidirectionnel selon l'axe (Ox), $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$, délimité par une paroi de normale $\vec{e}_z$ située en $z = z_\mathrm{p}$.

La force exercée par le fluide sur un élément de paroi solide de surface $\mathrm{d}S$ est colinéaire à la vitesse du fluide et proportionnelle au gradient de vitesse dans la direction normale à la paroi,

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F}_{\mathrm{fl}\to\mathrm{s}} = \mathrm{d}F_x \vec{e}_x \qquad \text{avec} \qquad ||\overrightarrow{\mathrm{d}F}|| = \eta \left| \frac{\partial v_x}{\partial z}(z = z_\mathrm{p}) \right| \mathrm{d}S\,.$$

Le coefficient de proportionnalité η est appelé **viscosité dynamique**, la dérivée normale de la vitesse est nommée **taux de cisaillement**.

Attention ! Cette expression n'est pas à apprendre complètement par cœur, d'une part car les axes peuvent changer, et d'autre part car un signe peut apparaître selon que l'on considère la paroi au dessus ou en dessous du fluide. Le sens de la force, et donc l'éventuel signe dans la composante $\mathrm{d}F_x$ se déterminent à la main à partir d'une représentation du profil de vitesse, les couches de fluide les plus rapides « tirant » sur les plus lentes.

On admet que l'expression écrite au niveau d'une paroi se généralise entre deux particules fluides : qualitativement, la viscosité traduit les frottements au sein du fluide.

- **Valeurs de viscosité**

Unité de la viscosité : dans le système international,

Équation aux dimensions :

$$M\,L\,T^{-2} = [\eta]\frac{L\,T^{-1}}{L}\,L^2 \qquad \text{d'où} \qquad [\eta] = M\,L^{-1}\,T^{-1}$$

Espace 17

L'usage est plutôt d'exprimer η en $\mathrm{Pa \cdot s}$:

Identification avec la force de pression : $[\eta]\frac{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{\mathrm{m}} = \mathrm{Pa}$ donc $[\eta] = \mathrm{Pa\cdot s}$

Espace 18

On utilise aussi parfois l'unité dédiée du Poiseuille : par définition,

$$1\,\mathrm{Pa\cdot s} = 1\,\mathrm{Pl}\,.$$

Ordres de grandeur : la viscosité d'un fluide dépend fortement de la température.

- ▷ Eau à 20 °C : $\eta = 1\cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$;
- ▷ Air à 0 °C et 1 bar : $\eta = 2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa\cdot s}$;
- ▷ Huile de moteur : $\eta \sim 0{,}1\,\mathrm{Pa\cdot s}$;
- ▷ Lubrifiant industriel : $\eta \sim 0{,}1\,\mathrm{Pa\cdot s}$.

Remarques :
- ▷ *On utilise parfois la viscosité cinématique, définie par $\nu = \eta/\rho$;*
- ▷ *La viscosité de nombreux fluides (à commencer par l'eau) est indépendante des contraintes mécaniques qui lui sont appliquées : ces fluides sont dits newtoniens. Cependant, ce n'est pas toujours le cas, et il existe aussi de nombreux fluides non-newtoniens, également appelés fluides complexes.*

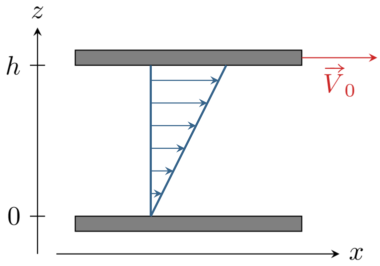
- **Exemple**

Application 4 : Écoulement de Couette plan : forces exercées par les parois sur le fluide

M

On considère l'écoulement de Couette des applications précédentes. Déterminer les forces exercées par le fluide sur un élément de surface dS de la paroi inférieure fixe, puis de la paroi supérieure tractée à la vitesse $\overrightarrow{V}_0 = V_0\,\overrightarrow{e}_x$. Le champ de vitesse s'écrit

$$\overrightarrow{v}(M) = V_0 \frac{z}{h}\,\overrightarrow{e}_x\,.$$



Le fluide tend à tirer sur la paroi inférieure dans la direction $\overrightarrow{e}_x$, donc

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F}_{\text{inf}} = +\eta \left|\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z}(z\!=\!0)\right| \mathrm{d}S\,\overrightarrow{e}_x = +\eta\frac{V_0}{h}\mathrm{d}S\,\overrightarrow{e}_x\,.$$

Réciproquement, le fluide tend à retenir la paroi supérieure : la force qu'il exerce est orientée selon $-\overrightarrow{e}_x$.

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F}_{\text{sup}} = -\eta \left|\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z}(z\!=\!h)\right| \mathrm{d}S\,\overrightarrow{e}_x = -\eta\frac{V_0}{h}\mathrm{d}S\,\overrightarrow{e}_x\,.$$

Espace 19

III.B - Écoulements parfaits ou visqueux

R

Un écoulement est dit **parfait** si les effets de la viscosité y sont négligeables.
Il est dit **visqueux** s'ils ne le sont pas.

Deux possibilités pour que la force de viscosité soit nulle en tout point de l'écoulement : ou bien la viscosité est nulle, ou bien le taux de cisaillement l'est.

- **Fluide parfait**

On appelle **fluide parfait** un fluide pour lequel $\eta = 0$.
Il s'agit d'un cas limite théorique, qui n'existe pas en pratique.

> ***Remarque :*** *Le cas de l'hélium superfluide pourrait être discutable mais est en réalité plus subtil.*

- **Profil de vitesse uniforme sur toute section**

Cas d'un écoulement unidirectionnel selon $\overrightarrow{e}_x$: $\overrightarrow{v} = v_x\,\overrightarrow{e}_x$.

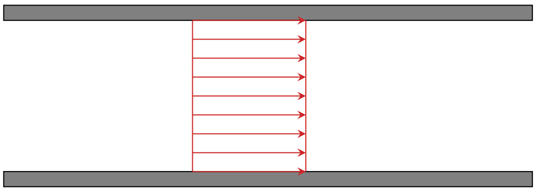
Nullité du taux de cisaillement dans les deux directions si

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

c'est-à-dire si v_x ne dépend ni de y ni de z.

R

Un écoulement parfait dans une conduite se caractérise par un profil de vitesse uniforme sur toute section droite de la conduite.



Un tel profil de vitesse parfaitement uniforme sur toute section est également impossible à atteindre rigoureusement ... car il serait celui d'un fluide parfait. Cependant, nous verrons par la suite qu'il peut s'agir d'une bonne approximation dans certains cas.

> ***Exemples :*** *Le profil de vitesse des écoulements de Couette et de Poiseuille n'étant pas uniforme, on en déduit qu'il s'agit d'écoulements visqueux.*

III.C - Vitesse d'un fluide au contact d'une paroi solide

Une paroi solide contraint l'écoulement : un fluide ne peut évidemment pas la traverser, ni s'en éloigner puisque cela créerait un vide dans l'écoulement.

En tout point P d'une paroi de normale $\vec{n}$, la vitesse du fluide est tangente à la paroi,

$$\vec{v}(P) \cdot \vec{n} = 0\,.$$

De plus, si le fluide est visqueux, alors la force exercée par le fluide sur la paroi doit rester finie.

Il faut que la dérivée normale de la vitesse prenne une valeur finie, donc il ne peut pas y avoir de discontinuité de vitesse.

Espace 20

R

En tout point P d'une paroi, la vitesse d'un fluide visqueux est égale à la vitesse de la paroi

$$\vec{v}(P) = \vec{V}_{\text{paroi}}\,.$$

Ce n'est pas le cas dans un écoulement parfait puisque le profil de vitesse est uniforme.

Espace 21

⇝ critère pour distinguer un écoulement parfait d'un écoulement visqueux.

IV - Quelques propriétés des écoulements stationnaires

Les débits sont des propriétés moyennes des écoulements, qui ne suffisent pas à les décrire complètement. Ce paragraphe aborde quelques idées simples (voire simplistes) permettant d'aller plus loin, en gardant en mémoire que la description et la classification des écoulements reste un sujet très complexe.

IV.A - Écoulement laminaire ou turbulent

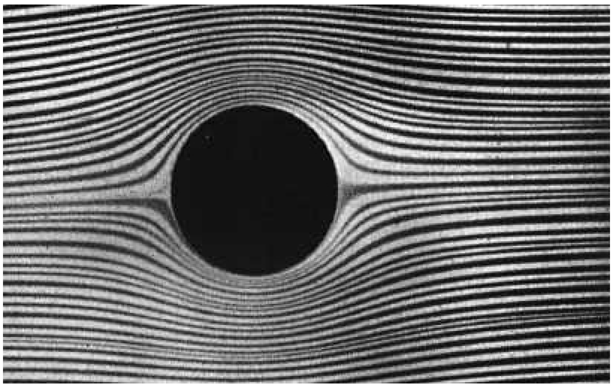
- **Définition qualitative**

Q

Un écoulement est dit **laminaire** lorsqu'il est suffisamment régulier, c'est-à-dire que les différentes couches de fluide se mélangent peu et évoluent de façon globalement parallèle.

Un écoulement est dit **turbulent** lorsqu'il est fluctuant et instable, c'est-à-dire que les différentes couches de fluide s'entremêlent et de nombreux tourbillons se forment.

Exemples en photos : images issues du site de l'ONERA.



Écoulement laminaire

Écoulement présentant une zone turbulente

Exemple en vidéo :

Cette vidéo est réalisée dans un tunnel à fumée : des bouffées de fumée sont envoyées à intervalle régulier dans un écoulement imposé par une soufflerie, ce qui permet de le visualiser. La fin du film (au delà de 50 secondes) permet de voir la transition d'un écoulement laminaire, aux lignes de courant bien définies, vers un écoulement turbulent dans lequel les fluctuations du champ des vitesses sont telles qu'on ne distingue plus de lignes de courant.

Exemples au quotidien :

Écoulement d'un fleuve, globalement laminaire, ou d'un torrent, globalement turbulent.
Écoulement turbulent dans un bac de douche
Deux zones autour d'un véhicule : laminaire à l'avant, turbulent à l'arrière.

Espace 22

$\rightsquigarrow$ les notions de lignes de courant sont bien adaptées à la description des écoulements laminaires, beaucoup moins aux écoulements turbulents.

- **Critère quantitatif : nombre de Reynolds**

Le caractère laminaire ou turbulent d'un écoulement dépend bien sûr de la vitesse d'écoulement, mais aussi des caractéristiques du fluide.

R !

Le **nombre de Reynolds** est un nombre sans dimension défini par

$$\mathrm{Re} = \frac{VD\rho}{\eta} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} V \text{ une vitesse caractéristique (vitesse débitante)} \\ D \text{ une longueur caractéristique (diamètre de la conduite)} \\ \rho \text{ la masse volumique du fluide} \\ \eta \text{ la viscosité dynamique du fluide} \end{cases}$$

Le nombre de Reynolds permet de caractériser qualitativement l'écoulement :
- ▷ si $\mathrm{Re} < 10^3$, l'écoulement est laminaire ;
- ▷ si $\mathrm{Re} > 10^4$, l'écoulement est turbulent.

Ces valeurs sont des ordres de grandeur : la transition est progressive entre les deux régimes d'écoulement.

Ordre de grandeur pour un écoulement industriel : considérons un écoulement d'eau ($\rho = 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\eta = 10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$) dans une conduite de diamètre $D = 0{,}1\,\mathrm{m}$.

▷ Vitesse à partir de laquelle l'écoulement est turbulent :

$$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}^\star \text{ soit } V > \frac{\eta \times \mathrm{Re}^\star}{\rho D} = ... = 0{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Espace 23

▷ Débit volumique correspondant :

$$D_V = V \times \frac{\pi D^2}{4} \simeq V \times D^2 = 10^{-3}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}.$$

Espace 24

▷ Conclusion : à titre de comparaison, ce débit correspond approximativement à celui pour lequel est dimensionnée une canalisation d'évacuation de douche ou de baignoire.

⇝ le transport d'un fluide industriel se fait généralement avec un débit nettement plus élevé !

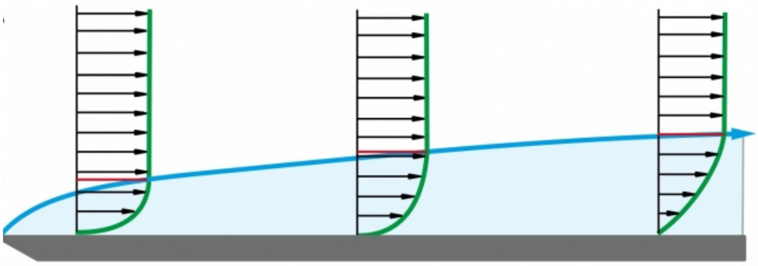
Q

Les écoulements industriels sont la plupart du temps turbulents.

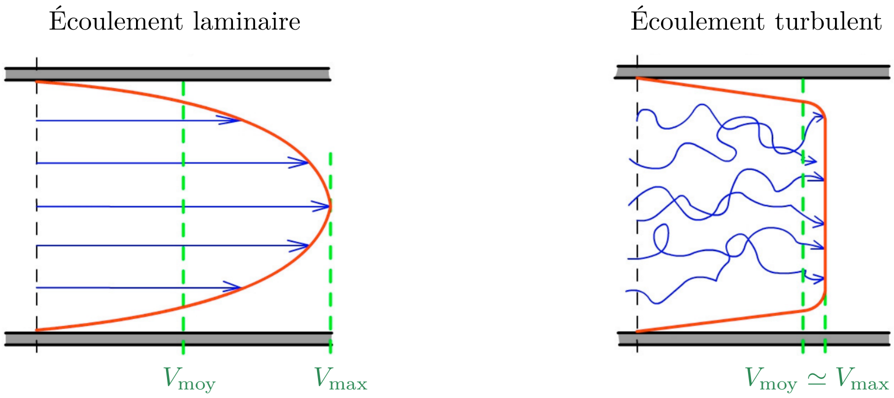
- **Retour sur le modèle d'écoulement parfait**

Rappelons qu'un écoulement parfait se caractérise par un profil de vitesse uniforme sur toute section de l'écoulement. Un tel profil est impossible à atteindre en pratique, mais il arrive fréquemment que les effets de la viscosité ne se fassent ressentir que sur une faible épaisseur de fluide à proximité immédiate des obstacles, appelée **couche limite** visqueuse. Hors de la couche limite, l'écoulement peut alors être modélisé par un écoulement parfait en bonne approximation.

Cas d'un écoulement externe : l'épaisseur de la couche limite autour d'un obstacle augmente progressivement au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'avant de l'obstacle.



Cas d'un écoulement interne : la situation est différente selon la nature de l'écoulement.



Si l'écoulement est laminaire, alors le profil de vitesse présente de fortes variations sur une section, et l'écoulement ne peut pas être assimilé à un écoulement parfait (et la notion de couche limite perd son sens). En revanche, dans le cas d'un écoulement turbulent, les lignes de courant fluctuent et sont fortement entrelacées, si bien qu'en moyenne temporelle les vitesses locales sont peu éloignées de la moyenne spatiale.

⇝ contrairement à ce que l'on pourrait imaginer, ce sont les écoulements turbulents qui s'approchent le plus d'un écoulement parfait.

> ***Remarque :*** *cela est cohérent avec le fait que le nombre de Reynolds est d'autant plus élevé que les effets de la viscosité sont faibles.*

Le profil de vitesse d'un écoulement industriel
peut généralement être modélisé par celui d'un écoulement parfait.

Q

... mais attention cependant, cela ne veut pas dire que les effets de la viscosité y sont négligeables : cf. étude des pertes de charge dans le cours suivant.

IV.B - Écoulement incompressible et divergence du champ de vitesse

> ***Remarque :*** *Les critères d'identification des écoulements compressibles et tourbillonnaires en termes d'opérateurs vectoriels ne sont pas exigibles dans le cadre du programme de PT. Je fais le choix de les présenter malgré tout pour introduire les opérateurs (qui sont exigibles dans d'autres contextes) sur des cas concrets et simples plutôt que dans un cours d'outils mathématiques. Le but premier de ces deux derniers paragraphes est donc de définir les opérateurs divergence et rotationnel et d'apprendre à les calculer.*

- **Divergence d'un champ vectoriel**

On appelle **divergence** l'opérateur qui à un champ vectoriel $\vec{A}$ associe le champ scalaire $\operatorname{div}\vec{A}$, donné en coordonnées cartésiennes par

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\,.$$

L'opérateur divergence s'applique à un champ vectoriel et renvoie un champ scalaire.

R

Attention ! Ne pas confondre gradient et divergence : le gradient s'applique à un champ *scalaire* f et renvoie le champ *vectoriel*

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z\,.$$

Attention ! L'expression de $\operatorname{div}\vec{A}$ en cartésiennes ne se généralise pas aux coordonnées cylindriques et sphériques : utiliser un formulaire le cas échéant.

- **Opérateur nabla**

Il s'agit d'une notation symbolique, très pratique pour retrouver les expressions des différents opérateurs en coordonnées cartésiennes (mais attention, pas pour les autres systèmes de coordonnées). Pour l'utiliser, on utilise une notation des vecteurs en matrice colonne : pour un vecteur $\vec{A}$ quelconque,

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z \overset{\text{déf.}}{=} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

Formellement, l'opérateur nabla peut s'écrire avec des composantes, comme un vecteur, mais qui sont des opérateurs de dérivation :

$$\vec{\nabla} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Attention ! L'expression de $\vec{\nabla}$ en cartésiennes ne se généralise pas aux coordonnées cylindriques et sphériques : utiliser un formulaire le cas échéant.

Attention ! $\vec{\nabla}$ ne vient jamais seul, mais s'applique nécessairement à un champ scalaire ou vectoriel.

R

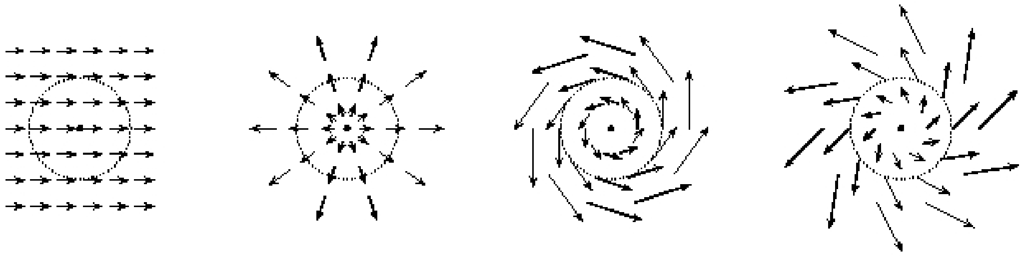
Avec nabla, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla} f$ et $\mathrm{div}\, \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.

Espace 25

- **Divergence et lignes de champ**

De façon schématique, en un point M autour duquel $||\vec{A}||$ ne varie pas (ou peu),
- ▷ si $\mathrm{div}\, \vec{A} > 0$, les lignes de champ de $\vec{A}$ divergent ;
- ▷ si $\mathrm{div}\, \vec{A} < 0$, les lignes de champ de $\vec{A}$ convergent ;
- ▷ si $\mathrm{div}\, \vec{A} = 0$, les lignes de champ de $\vec{A}$ ne divergent ni ne convergent, mais peuvent être parallèles ou circulaires.

Exemples :



de gauche à droite $\mathrm{div}\, \vec{A} = 0$, $\mathrm{div}\, \vec{A} > 0$, $\mathrm{div}\, \vec{A} = 0$, $\mathrm{div}\, \vec{A} > 0$

Ces résultats ne sont que qualitatifs, et ne sont généralement plus aussi simples si $||\vec{A}||$ varie. Dans ce cas il n'y a pas de relation générale simple entre l'allure des lignes de champ et la divergence.

- **Lien à l'incompressibilité**

Un écoulement est dit incompressible si toute particule fluide garde une masse volumique constante au cours de l'écoulement ... or les illustrations précédentes laissent entendre que la divergence est reliée aux variations de volume des particules fluides !

En tout point d'un écoulement incompressible, la divergence du champ de vitesse est nulle,

$$\mathrm{div}\, \vec{v} = 0\,.$$

⇝ un écoulement compressible est parfois qualifié d'écoulement **divergent**.

M

Application 5 : Écoulement de Couette : incompressibilité

L'écoulement de Couette est-il compressible ? On rappelle le champ de vitesse :

$$\vec{v} = V_0 \frac{z}{h} \vec{u}_x\,.$$

$\mathrm{div}\, \vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + 0 + 0 = 0$ donc l'écoulement est incompressible.

Espace 26

IV.C - Écoulement tourbillonnaire et rotationnel du champ de vitesse

- **Rotationnel d'un champ vectoriel**

On appelle **rotationnel** l'opérateur qui à un champ vectoriel $\vec{A}$ associe le champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$, donné avec l'opérateur nabla par

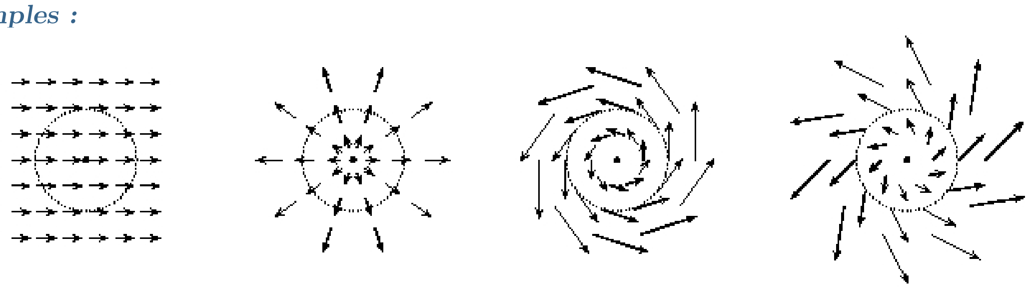
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

L'opérateur rotationnel s'applique à un champ vectoriel et renvoie un champ vectoriel.

- **Rotationnel et lignes de champ**

De façon schématique, en un point M autour duquel $||\vec{A}||$ ne varie pas,
- ▷ si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$, les lignes de champ ne s'enroulent pas : elles sont ou bien parallèles, ou bien parfaitement « en oursin », c'est-à-dire parfaitement convergentes ou divergentes ;
- ▷ si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \neq \vec{0}$, les lignes de champ s'enroulent en sens trigonométrique autour de la direction donnée par $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$.

Exemples :



de gauche à droite $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \neq \vec{0}$ sortant de la feuille

Ces résultats ne sont que qualitatifs, et ne sont généralement plus vrais si $||\vec{A}||$ varie. Dans ce cas il n'y a pas de relation générale simple entre l'allure des lignes de champ et le rotationnel.

- **Lien au caractère tourbillonnaire**

Un écoulement est dit **tourbillonnaire** ou **rotationnel** si les particules fluides y subissent une rotation sur elles-mêmes. Il est dit **irrotationnel** sinon.

Comme les schémas précédents le laissent penser, la direction et le sens de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$ indiquent la direction et le sens de rotation de la particule fluide sur elle même.

En tout point d'un écoulement irrotationnel, le rotationnel du champ de vitesse est nul,
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$.

Application 6 : Écoulement de Couette : caractère tourbillonnaire

L'écoulement de Couette est-il tourbillonnaire ?

Détailler le calcul :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z}\vec{e}_y = \frac{V_0}{h}\vec{e}_y$$

donc l'écoulement est tourbillonnaire et les PF tournent autour de l'axe Oy.

Espace 27

En pratique, la plupart des écoulements sont tourbillonnaires.