BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

TD 10 – Mécanique des fluides — *Correction*

Description des écoulements

Analyse de corrigé

Exercice 1 : Écoulement de Poiseuille plan

1 | 2 |

- ▷ *Profil de vitesse ;*
- ▷ *Opérateurs vectoriels ;*
- ▷ *Débit volumique ;*
- ▷ *Forces visqueuses.*

Musculation calculatoire

Exercice 2 : Du calcul ...

0 | 2

- ▷ *Opérateurs vectoriels.*

1 On trouve :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f_1 = y^2\,\vec{e}_x + (2xy - z^2)\,\vec{e}_y - 2yz\,\vec{e}_z$$
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f_2 = -\frac{y}{(x-y)^2}\,\vec{e}_x + \frac{x}{(x-y)}\,\vec{e}_y$$
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f_3 = -\frac{1+z}{a}\,\mathrm{e}^{-x/a}\,\vec{e}_x + \mathrm{e}^{-x/a}\,\vec{e}_z$$

2 On trouve :

$$\text{div}\,\vec{V}_1 = 2(3xz + y) \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}_1 = \vec{0}$$
$$\text{div}\,\vec{V}_2 = y\cos(xy) - x\sin(xz) \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}_2 = z\sin(xz)\,\vec{e}_y - x\cos(xy)\,\vec{e}_z$$
$$\text{div}\,\vec{V}_3 = 0 \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}_3 = 3\omega\,\vec{e}_z$$

Champ de vitesse

Exercice 3 : Tornade

1 | 1

- ▷ *Profil de vitesse ;*
- ▷ *Divergence et rotationnel.*

1 Par continuité de la vitesse en $r = a$,

$$\omega a = \frac{K}{a} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{K = \omega a^2\,.}$$

2 Voir figure 1. Les lignes de courant sont des cercles.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

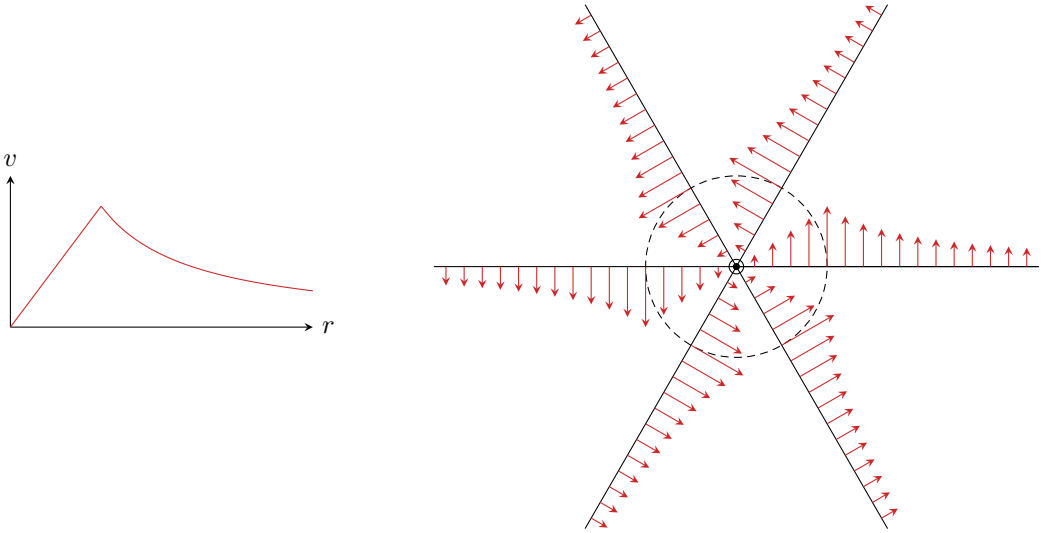

Figure 1 – Champ des vitesses d'une tornade.

3 Comme $v_r = 0$, on a directement div $\vec{v} = 0$, l'écoulement est donc incompressible.

4 Pour $r < a$,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\omega r^2}{\mathrm{d}r}\vec{e}_z = \frac{1}{r} \times 2r\omega\vec{e}_z = 2\omega\vec{e}_z\,.$$

L'écoulement est donc tourbillonnaire dans le cœur de la tornade. Pour $r > a$,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}r}\vec{e}_z = \vec{0}\,,$$

l'écoulement est donc irrotationnel hors du cœur.

Exercice 4 : Houle

2 | 2

- ▷ *Profil de vitesse ;*
- ▷ *Divergence et rotationnel ;*
- ▷ *Ondes progressives.*

1 Souvenirs, souvenirs ... Il s'agit d'une onde progressive harmonique qui se déplace dans le sens des x croissants.

> ***Rappel de PTSI :*** *Le sens de propagation se voit au signe relatif devant k et ω.*

2 À l'instant $t = 0$,
▷ en $x = 0$, $\vec{v} = H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\vec{u}_x$;
▷ en $x = \lambda/4$ on a $kx = \pi/2$ donc $\vec{v} = H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\vec{u}_z$;
▷ en $x = \lambda/2$ on a $kx = \pi$ donc $\vec{v} = -H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\vec{u}_x$.
Le champ de vitesse est donc partout exponentiellement croissant, mais sa direction change, voir figure 2.

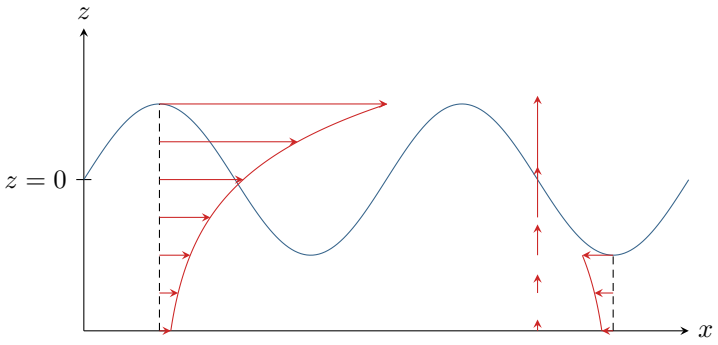

Figure 2 – Champ des vitesses de la houle à différentes positions.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

3 Calculons la divergence,

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\sin(kx-\omega t) + 0 + Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\sin(kx-\omega t) = 0\,.$$

L'écoulement de la houle est donc **incompressible**.

4 Calculons maintenant le rotationnel,

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \vec{\nabla}\wedge\vec{v} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}v_x(x,z)\\ 0\\ v_z(x,z)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{\partial v_z}{\partial x}+\dfrac{\partial v_x}{\partial z}\\ 0\end{bmatrix} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y$$

d'où on déduit

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \left[Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\cos(kx-\omega t) - Hk\omega\,\mathrm{e}^{kz}\cos(kx-\omega t)\right]\vec{u}_y = \vec{0}\,.$$

L'écoulement est donc **irrotationnel**.

Débits

Exercice 5 : Profondeur de la Seine à Rouen

1 | 0

▷ *Débit volumique.*

On raisonne évidemment en ordre de grandeur de vitesse débitante U. Par définition du débit volumique,

$$D_\mathrm{v} = S\,U = L\,h\,U \qquad \text{donc} \qquad \boxed{h = \frac{D_\mathrm{v}}{LU} \simeq 2\,\mathrm{m}\,.}$$

Exercice 6 : Robinet

1 | 1

▷ *Conservation du débit volumique.*

1 L'eau accélère sous l'effet de la pesanteur. Comme elle est incompressible, il y a conservation du débit volumique Sv au cours de l'écoulement : une augmentation de vitesse impose une réduction de section du jet.

2 En supposant le jet cylindrique, la conservation du débit volumique s'écrit

$$\left(\pi\frac{d_1^2}{4}\right)v_1 = \left(\pi\frac{d_2^2}{4}\right)v_2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 v_1 \simeq 3v_1\,.}$$

La vitesse a quasiment triplé.

Exercice 7 : Transfusion sanguine

2 | 2 |

▷ *Débit volumique ;*
▷ *Viscosité ;*
▷ *Relation de l'hydrostatique.*

1 La poche doit être injectée en une demi-heure, ce qui donne un débit volumique

$$Q = 0{,}2\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 5{,}6\cdot10^{-8}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

2 Le tuyau et l'aiguille étant cylindriques,

$$\boxed{V_{\text{tuy}} = \frac{Q}{\pi b^2} = 2{,}8 \cdot 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad V_{\text{aig}} = \frac{Q}{\pi a^2} = 0{,}78\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

Puisque $V_{\text{tuy}} \ll V_{\text{aig}}$, on peut supposer le sang en équilibre hydrostatique dans le tuyau souple et la poche ... mais ce n'est pas le cas dans l'aiguille. Calculons le nombre de Reynolds de cet écoulement,

$$\text{Re} = \frac{2a\,V_{\text{aig}}\,\rho}{\eta} = 160\,,$$

ce qui signifie que l'écoulement est **laminaire**.

> *La nature laminaire de l'écoulement est essentielle pour pouvoir le décrire par un profil de vitesse de type Poiseuille. S'il avait été turbulent, le profil d'écoulement (moyenné dans le temps) aurait été davantage voisin de celui d'un écoulement parfait.*

3 Le sang étant un fluide visqueux, sa vitesse doit être nulle au niveau de la paroi de l'aiguille, soit

$$\vec{v}(r=a) = \vec{0} \qquad \text{donc} \qquad 1 - \alpha a^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \boxed{\alpha = \frac{1}{a^2}\,.}$$

4 Relions le débit volumique à la différence de pression.

$$\begin{aligned}
Q &= \iint_{\text{section}} \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \\
&= \frac{(P_{\text{e}} - P_{\text{s}})\,a^2}{4\eta\ell} \iint \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{(P_{\text{e}} - P_{\text{s}})\,a^2}{4\eta\ell} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \times \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{(P_{\text{e}} - P_{\text{s}})\,a^2}{4\eta\ell} \times 2\pi \times \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4a^2}\right]_0^a \\
&= \frac{(P_{\text{e}} - P_{\text{s}})\,a^2}{4\eta\ell} \times 2\pi \times \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4a^2}\right) \\
&= 2\pi\frac{(P_{\text{e}} - P_{\text{s}})\,a^2}{4\eta\ell} \times \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \\
Q &= \frac{\pi\,(P_{\text{e}} - P_{\text{s}})\,a^4}{8\eta\ell}
\end{aligned}$$

d'où on déduit directement

$$\boxed{P_{\text{e}} - P_{\text{s}} = \frac{8\eta\ell}{\pi a^4} Q = 8{,}9 \cdot 10^3\,\text{Pa}\,.}$$

5 Le fluide étant supposé en équilibre hydrostatique dans le tuyau souple,

$$P_{\text{e}} = P_0 + \rho g H \qquad \text{et} \qquad P_{\text{s}} = P_0 + \Delta P\,.$$

On en déduit

$$\rho g H - \Delta P = \frac{8\eta\ell}{\pi a^4} Q$$

et ainsi

$$\boxed{H = \frac{1}{\rho g}\left(\frac{8\eta\ell}{\pi a^4} Q + \Delta P\right) = 96\,\text{cm}\,.}$$

> *Pour une description plus précise de l'écoulement dans le tuyau souple, il aurait fallu utiliser le théorème de Bernoulli, cf. chapitre suivant ... mais comme la contribution cinétique à la charge hydraulique $V_{tuy}^2/2 = 4 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ est complètement négligeable devant le terme de pesanteur $gH = 7{,}6\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$, on constate que cela aurait compliqué le calcul sans rien changer au résultat.*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 8 : Sténose artérielle

2 | 2

▷ *Débit volumique.*

1 Le sang est un fluide visqueux, donc l'écoulement est de vitesse nulle sur les parois de l'artère. Ainsi,

$$v(r=R_0)=0 \qquad \text{soit} \qquad 1-aR_0^{\,2}=0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{a=\frac{1}{R_0^{\,2}}\,.}$$

2 Le lien entre ΔP et les données de l'énoncé se fait par l'intermédiaire de la vitesse débitante. Par définition du débit volumique,

$$\begin{aligned}
Q &= \iint_{\text{section}} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} \\
&= \frac{\Delta P\,R_0^{\,2}}{4\eta L_0}\iint\left(1-\frac{r^2}{R_0^{\,2}}\right)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\Delta P\,R_0^{\,2}}{4\eta L_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\times\int_0^{R_0}\left(1-\frac{r^2}{R_0^{\,2}}\right)r\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\Delta P\,R_0^{\,2}}{4\eta L_0}\times 2\pi\times\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R_0^{\,2}}\right]_0^{R_0} \\
&= \frac{\Delta P\,R_0^{\,2}}{4\eta L_0}\times 2\pi\times\left(\frac{R_0^{\,2}}{2}-\frac{R_0^{\,4}}{4R_0^{\,2}}\right) \\
&= 2\pi\frac{\Delta P\,R_0^{\,2}}{4\eta L_0}\times\left(\frac{R_0^{\,2}}{2}-\frac{R_0^{\,2}}{4}\right) \\
\boxed{Q} &= \boxed{\frac{\pi\,\Delta P\,R_0^{\,4}}{8\eta L_0}}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$U=\frac{Q}{\pi R_0^{\,2}}=\frac{\Delta P}{8\eta L_0}R_0^{\,2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta P=\frac{8\eta L_0 U}{R_0^{\,2}}=7\,\text{Pa}\,.}$$

3 Par analogie avec une résistance électrique, ΔP est l'analogue de $U=\Delta V$ (différence de potentiel) et le débit volumique est l'analogue de l'intensité, qui n'est autre qu'un débit de charge. La différence de pression entraîne l'apparition d'un débit volumique, de même qu'une tension appliquée à une résistance entraîne l'apparition d'un courant. On peut également faire l'analogie avec la résistance thermique, que nous verrons dans quelques semaine : une différence de température entraîne l'apparition d'un flux thermique.

> *Tous ces phénomènes qui se décrivent avec un formalisme voisin sont appelés « phénomènes de transport ». Ils recouvrent entre autres le transport de charges électriques, le transport de masse par un fluide, la diffusion thermique, ou encore la diffusion de matière (pas au programme de PT).*

On déduit de ce qui précède

$$\boxed{R_H=\frac{8\eta L_0}{\pi R_0^{\,4}}}$$

4 À partir de l'expression précédente, il vient directement

$$R_H=\frac{8\eta L}{\pi R_0^{\,4}} \qquad \text{et} \qquad R'_H=\frac{8\eta L}{\pi(R_0/2)^{\,4}}=\frac{128\eta L}{\pi R_0^{\,4}}\,.$$

Avec les notations de la figure 3, la différence de pression imposée par le cœur s'écrit

$$\Delta P=P_A-P_D=P_A-P_B+P_B-P_C+P_C-P_D\,.$$

Comme l'écoulement est incompressible, les trois portions d'artère sont traversées par le même débit volumique Q. Ainsi, en introduisant les résistances hydrauliques de chaque portion,

$$\Delta P=R_HQ+R'_HQ+R_HQ=(2R_H+R'_H)Q$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

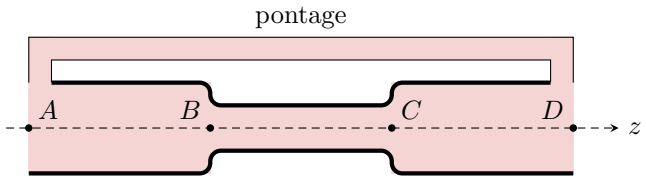

Figure 3 – Schéma de l'artère sténosée étudiée.

ce qui permet d'identifier

$$\boxed{R_{H,\text{st}} = 2R_H + R'_H = \frac{144\eta L}{\pi R_0^4}\,.}$$

Les résistances hydrauliques sont dites **associées en série**, ce qui est cohérent avec le fait que le débit est l'analogue de l'intensité.

5 La différence de pression est la même dans les deux cas : en première approche, la présence de la sténose ne modifie pas le comportement du cœur. Ainsi,

$$\frac{Q_{\text{st}}}{Q_{\text{sain}}} = \frac{\Delta P/R_{H,\text{st}}}{\Delta P/R_{H,\text{sain}}} = \frac{3R_H}{2R_H + R'_H} = \frac{3}{2+16} \simeq 0{,}167\,.$$

La sténose réduit fortement le débit artériel, ce qui pose un problème de santé potentiel.

6 Le pontage est schématisé figure 3. La différence de pression est la même pour l'artère et le pontage, mais les débits s'ajoutent.

$$Q_{\text{tot}} = Q_{\text{st}} + Q_{\text{pont}} = \left(\frac{1}{R_{H,\text{st}}} + \frac{1}{R_{H,\text{pont}}}\right)\Delta P$$

Le débit devant être identique à celui d'une artère saine soumise à la même différence de pression,

$$Q_{\text{tot}} = Q_{\text{sain}} \qquad \text{donc} \qquad \left(\frac{1}{R_{H,\text{st}}} + \frac{1}{R_{H,\text{pont}}}\right)\Delta P = \frac{\Delta P}{3R_H}$$

On en déduit

$$\frac{\pi R_0^4}{144\eta L} + \frac{\pi R_2^4}{8\eta \times 3L} = \frac{\pi R_0^4}{8\eta \times 3L} \qquad \text{soit} \qquad \frac{R_0^4}{6} + R_2^4 = R_0^4\,.$$

et ainsi

$$\boxed{\frac{R_2}{R_0} = \left(\frac{5}{6}\right)^{1/4} \simeq 0{,}95\,.}$$

Forces visqueuses

Exercice 9 : Glissement sur un plan incliné lubrifié

oral banque PT | 2 | 2 |

▷ *Force de viscosité ;*
▷ *Lien entre mécanique des fluides et des solides.*

1 Le plus simple est de définir un axe x orienté le long de la pente vers le bas, et un axe y perpendiculaire à la pente vers le haut.

2 Le lubrifiant étant visqueux, sa vitesse est nulle en $y = 0$ et elle est égale à la vitesse V du solide en $y = e$. Le profil de vitesse dessiné étant clairement linéaire, on en déduit

$$\boxed{\vec{v} = v_x(y)\,\vec{e}_x = \frac{V}{e} y\,\vec{e}_x\,.}$$

3 La force visqueuse $\vec{F}$ tend à ralentir le solide dans son mouvement de glissement : on en déduit qu'elle est orientée selon $-\vec{e}_x$. De plus, en notant S la surface de contact entre le fluide et le solide, sa norme est donnée par

$$F = \eta S \left|\left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=e}\right| = \eta S \frac{V}{e}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

d'où on déduit

$$\boxed{\vec{F} = -\eta S \frac{V}{e} \vec{e}_x \,.}$$

4 • **Système :** solide de masse M ;

• **Référentiel :** terrestre $\mathcal{R}$, considéré galiléen ;

• **Bilan des forces :**
▷ Poids $\vec{P} = m\vec{g} = Mg\sin\alpha\,\vec{e}_x - Mg\cos\alpha\,\vec{e}_y$;
▷ Force de frottement exercée par le fluide : $\vec{F} = -\eta S\frac{V}{e}\vec{e}_x$;
▷ Force de réaction normale du fluide : $\vec{R} = R\vec{e}_y$ (obligée car le solide ne peut pas traverser le fluide et le plan incliné ! ... et comme il n'est pas en contact avec le support, c'est forcément le fluide qui exerce la force).

• **Théorème de la résultante cinétique :** en notant $\vec{V} = V\vec{e}_x$ la vitesse du solide,

$$M \left.\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R}$$

soit en projection sur $\vec{e}_x$,

$$M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = Mg\sin\alpha - \eta S\frac{V}{e}$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \frac{\eta S}{Me}V = g\sin\alpha\,.}$$

La vitesse limite atteinte correspond à la solution particulière de l'équation différentielle,

$$\boxed{V_{\lim} = \frac{Meg\sin\alpha}{\eta S}\,.}$$

Exercice 10 : Déplacement d'un piston à huile

oral banque PT | 3 | 2

▷ *Débit volumique ;*
▷ *Force de viscosité ;*
▷ *Lien entre mécanique des fluides et des solides.*

1 L'estimation la plus simple est

$$\boxed{\mathrm{GP} = \frac{P_2 - P_1}{h} = \frac{P_1}{h}\,.}$$

2 La section au travers laquelle s'écoule le fluide est une couronne circulaire (un anneau) compris entre les rayons R_1 et R_2. Elle a pour surface $S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2$. Le débit volumique vaut donc

$$\boxed{D_V = v_{\mathrm{d}}S = \pi\alpha\frac{P_1}{h}(R_2^2 - R_1^2)\,.}$$

3 Raisonnons en coordonnées cylindriques. La force surfacique de viscosité subie par le cylindre intérieur a pour norme

$$F_{\mathrm{surf}} = \eta \left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R_1}\,.$$

Compte tenu des données à disposition, on peut approximer que l'ordre de grandeur de la vitesse dans l'interstice est v_{d} et que cette vitesse change sur une distance $R_2 - R_1$. Ainsi, en ordre de grandeur,

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R_1} \simeq \frac{v_{\mathrm{d}}}{R_2 - R_1} = \frac{\alpha P_1}{\eta h(R_2 - R_1)} \qquad \text{soit} \qquad F_{\mathrm{surf}} \simeq \frac{\alpha P_1}{h(R_2 - R_1)}\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

En supposant que cette force surfacique est la même sur tout le cylindre, il vient

$$F_{\text{visq}} = 2\pi R_1 h \times F_{\text{surf}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{F_{\text{visq}} = \frac{2\pi R_1 \alpha P_1}{R_2 - R_1}\,.}$$

4 Notons $\vec{u}$ le vecteur unitaire orienté de la gauche vers la droite de la figure. Le piston est soumis
▷ à la force $\vec{F} = F\vec{u}$ exercée par l'opérateur ;
▷ à la force visqueuse $\vec{F}_{\text{visq}} = -F_{\text{visq}}\vec{u}$, orientée vers la gauche car le piston se déplace vers la droite ;
▷ à la force pressante $\vec{F}_{\text{p}} = (P_1 - P_2)\pi R_1^2\vec{u} = -P_1\pi R_1^2\vec{u}$.
Comme le mouvement du piston est qualifié de quasi-statique, on peut considérer que ces forces se compensent, d'où

$$F - \frac{2\pi R_1 \alpha P_1}{R_2 - R_1} - P_1\pi R_1^2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{F = \frac{2\pi R_1 \alpha P_1}{R_2 - R_1} + P_1\pi R_1^2\,.}$$

Exercice 11 : Démonstration du profil de Poiseuille

3 | 2

▷ *Profil de vitesse ;*
▷ *Forces de pression et de viscosité ;*
▷ *Divergence.*

1 La conduite est invariante par toute rotation autour de son axe, il est donc logique que le champ des vitesses soit indépendant de la coordonnée angulaire θ. De plus, l'écoulement se faisant dans la direction de la conduite, il est raisonnable de supposer que le champ des vitesses est colinéaire à l'axe $\vec{e}_z$.

2 L'écoulement étant incompressible,

$$\text{div}\,\vec{v} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

ce qui signifie que v_z est « une constante par rapport à z », c'est-à-dire que v_z est indépendant de z.

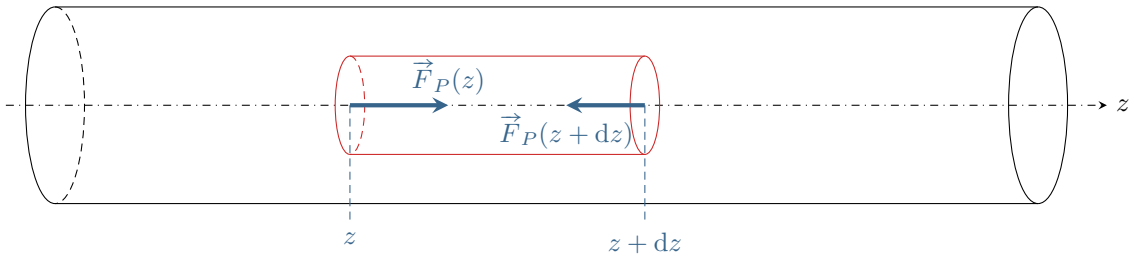

Figure 4 – Schéma du système (Σ).

3 Le système (Σ) est compris entre les abscisses z et $z + \mathrm{d}z$, voir figure 4. Il subit donc

$$\mathrm{d}\vec{F}_P = \vec{F}_P(z) + \vec{F}_P(z+\mathrm{d}z) = P(z)\,\pi r^2\,\vec{e}_z - P(z+\mathrm{d}z)\,\pi r^2\,\vec{e}_z = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\,\pi r^2\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$

4 La portion de cylindre en contact avec des particules fluides de vitesse différente est simplement constituée de la surface latérale, de surface $\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}z$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_{\text{visq}} = \eta\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\,2\pi r\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_z\,.}$$

5 Comme (σ) est un système fermé en mouvement à vitesse constante, alors d'après le théorème de la résultante cinétique, la somme des forces qu'il subit est nulle. On a donc

$$\mathrm{d}\vec{F}_P + \mathrm{d}\vec{F}_{\text{visq}} = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\,\pi r^2\,\mathrm{d}z + \eta\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\,2\pi r\,\mathrm{d}z = 0$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

ce qui conduit bien à l'équation

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{2\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\,.}$$

6 Comme v_z ne dépend pas de z, dériver par rapport à z l'équation précédente conduit à

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}z^2} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = k = \text{cte}\,.$$

Par séparation des variables et intégration entre les deux extrémités de la conduite, on obtient

$$\int_{P_0+\Delta P}^{P_0} \mathrm{d}P = k\int_0^L \mathrm{d}z \qquad \text{d'où} \qquad k = -\frac{\Delta P}{L}\,.$$

7 Le fluide étant visqueux, sa vitesse est nulle au contact de la paroi : $v(r=R)=0$. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta P}{2\eta L}r \qquad \text{soit} \qquad \int_0^{v_z}\mathrm{d}v_z = -\frac{\Delta P}{2\eta L}\int_R^r r\,\mathrm{d}r$$

ce qui donne finalement

$$v_z(r) = -\frac{\Delta P}{2\eta L}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right)$$

ce qui permet de conclure

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2)\vec{e}_z\,.}$$

Exercice 12 : Viscosimètre de Couette cylindrique

Centrale TSI 2022 | 2 | 3

- ▷ *Profil de vitesse ;*
- ▷ *Force de viscosité ;*
- ▷ *Moment cinétique.*

48 Le dispositif est invariant par translation le long de l'axe (Oz) (effets de bord négligés) et par rotation autour de ce même axe, on en déduit donc que le champ de vitesse du fluide ne dépend ni de θ, ni de z, mais seulement de la distance r à l'axe de rotation :

$$\vec{v} = v_r(r)\vec{e}_r + v_\theta(r)\vec{e}_\theta\,.$$

49 En utilisant l'expression de la divergence fournie,

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} \underset{\text{incompr}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0$$

On en déduit que rv_r est indépendante de r, c'est-à-dire ici constante car elle ne peut dépendre d'aucune autre variable. Ainsi,

$$rv_r(r) = K \qquad \text{donc} \qquad v_r(r) = \frac{K}{r}\,.$$

Or au niveau des cylindres en $r = R_1$ et R_2 la vitesse ne peut qu'être tangentielle, donc portée par $\vec{e}_\theta$, d'où

$$v_r(r=R_1) \underset{\text{expr}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{K}{R_1} \underset{\text{CL}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \qquad \text{d'où} \qquad K = 0$$

et ainsi

$$\boxed{\forall r, \quad v_r(r) = 0\,.}$$

50 Il y a égalité entre la vitesse du fluide et la vitesse du cylindre. Ainsi,

$$\boxed{v(r=R_1) = R_1\omega_1 \qquad \text{et} \qquad v(r=R_2) = R_2\omega_2\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

51 Grâce aux conditions aux limites,

$$\begin{cases} AR_1 + \dfrac{B}{R_1} = R_1\omega_1 \\ AR_2 + \dfrac{B}{R_2} = R_2\omega_2 \end{cases}$$

Multiplions la première ligne par R_2 et la seconde par R_1 :

$$\begin{cases} AR_1R_2 + \dfrac{R_2}{R_1}B = R_1R_2\omega_1 \\ AR_1R_2 + \dfrac{R_1}{R_2}B = R_1R_2\omega_2 \end{cases}$$

En soutrayant les deux lignes l'une à l'autre, il vient alors

$$\left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{R_1}{R_2}\right) B = R_1R_2(\omega_1 - \omega_2) \qquad \text{soit} \qquad \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1R_2}B = R_1R_2(\omega_1 - \omega_2) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{B = \frac{(R_1R_2)^2}{R_2^2 - R_1^2}(\omega_1 - \omega_2)\,.}$$

Reprenons les deux équations de départ, en les multipliant respectivement par R_1 et R_2 :

$$\begin{cases} AR_1^2 + B = R_1^2\omega_1 \\ AR_2^2 + B = R_2^2\omega_2 \end{cases}$$

En procédant de nouveau par soustraction,

$$A(R_2^2 - R_1^2) = R_2^2\omega_2 - R_1^2\omega_1 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{A = \frac{R_2^2\omega_2 - R_1^2\omega_1}{R_2^2 - R_1^2}\,.}$$

52 Pour une surface solide de normale $\vec{e}_z$ située en $z = 0$ et un écoulement dirigé selon $\vec{e}_x$ du côté $z > 0$, voir figure 5, la force de cisaillement s'exerçant sur une surface $\mathrm{d}S$ vaut

$$\mathrm{d}\vec{F} = \eta\,\frac{\partial v_x}{\partial z}(z{=}0)\,\mathrm{d}S\,\vec{e}_x\,.$$

La situation analogue en géométrie cylindrique est également représentée sur la figure 5, qui donne une vue *de dessous* du viscosimètre de Couette (et donc différente de celle de l'énoncé !) pour que le schéma soit clairement semblable. Par analogie,

$$\mathrm{d}\vec{F} = \eta\,\frac{\partial v_\theta}{\partial r}(r{=}R_1)\,\mathrm{d}S\,\vec{e}_\theta\,.$$

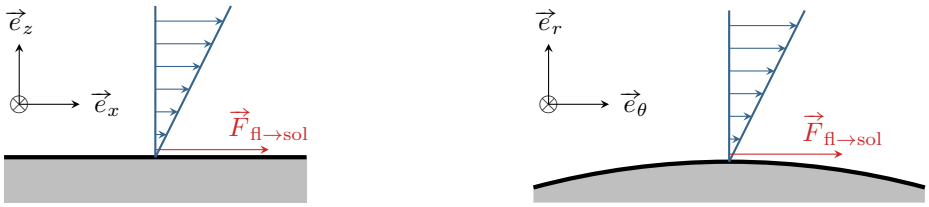

Figure 5 – Force surfacique de cisaillement. Gauche : géométrie cartésienne. Droite : géométrie cylindrique, le viscosimètre de Couette étant vu de dessous, contrairement à la figure de l'énoncé.

Exprimons maintenant explicitement la dérivée radiale de v_θ. Sous les hypothèses de l'énoncé,

$$A = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\omega_2 \qquad \text{et} \qquad B = -\frac{(R_1R_2)^2}{R_2^2 - R_1^2}\omega_2 = -R_1^2A\,,$$

ce qui donne

$$v_\theta(r) = A\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}r} = A\left(1 + \frac{R_1^2}{r^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}r}(r{=}R_1) = A\left(1 + \frac{R_1^2}{R_1^2}\right) = 2A\,.$$

Finalement, on trouve bien

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F} = 2\eta\,A\,\mathrm{d}S\,\vec{e}_\theta\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

53 La force étant tangentielle au cylindre intérieur, son bras de levier est égal à R_1, et le moment vaut donc

$$\mathrm{d}\Gamma = 2\eta\, A\, R_1\, \mathrm{d}S\,.$$

54 Ce moment élémentaire est subi par une portion de surface $\mathrm{d}S$ du cylindre intérieur, et il est uniforme sur ce cylindre. On a donc directement

$$\Gamma = \iint_{\text{cylindre}} \mathrm{d}\Gamma = 2\eta\, A\, R_1 \iint \mathrm{d}S \qquad \text{d'où} \qquad \Gamma = 2\eta\, A\, R_1 \times 2\pi R_1 L\,.$$

En reprenant l'expression de A, il vient alors

$$\boxed{\Gamma = 4\pi\,\eta L \frac{{R_1}^2 {R_2}^2}{{R_2}^2 - {R_1}^2}\omega_2\,.}$$

55 Le cylindre étant fixe, il faut lui appliquer un couple permettant de compenser exactement le moment des forces de cisaillement, c'est-à-dire $-\Gamma$.

56 Le couple à exercer est directement proportionnel à la viscosité du fluide, toutes les autres grandeurs étant connues car contrôlées par l'expérimentateur. Il suffit donc de mesurer ce couple.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr