

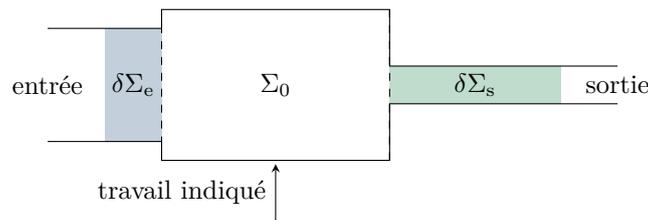
Énergétique des écoulements

Théorème de Bernoulli

Hypothèses systématiques (et donc implicites) : régime permanent + écoulement incompressible.

I - Bilan d'énergie mécanique pour un système ouvert

- **Objectif** : bilan d'énergie mécanique pour un fluide lors de la traversée d'un organe délimité par une surface de contrôle Σ_0 .



Stationnarité \implies les grandeurs physiques relatives à Σ_0 sont indépendantes du temps.

- **Se ramener à un système fermé** :

- ▷ à l'instant t : $\Sigma_f = \Sigma_0 + \delta\Sigma_e$ (PF qui vont entrer dans Σ_0 entre t et $t + dt$) ;
- ▷ à l'instant $t + dt$: $\Sigma_f = \Sigma_0 + \delta\Sigma_s$ (PF qui sont sorties de Σ_0 entre t et $t + dt$) ;
- ▷ bilan de masse : par stationnarité, $\delta\Sigma_e$ et $\delta\Sigma_s$ ont la même masse $\delta m = D_m dt$ (masse traversant).

- **Variation d'énergie mécanique de Σ_f entre t et $t + dt$** :

- ▷ Première expression : par construction de Σ_f et en simplifiant par stationnarité,

$$dE_{m,f} = \left[E_{m0}(t+dt) + \frac{1}{2}\delta m v_s^2 + \delta m g z_s \right] - \left[E_{m0}(t) + \frac{1}{2}\delta m v_e^2 + \delta m g z_e \right]$$

- ▷ Deuxième expression : par le théorème de l'énergie mécanique,

$$dE_{m,f} = \delta W_i + \delta W_{\text{visc}} + P_e \frac{D_m}{\rho} dt - P_s \frac{D_m}{\rho} dt.$$

car le travail des forces de pression s'écrit (ici côté entrée avec signe \oplus car moteur, idem avec signe \ominus côté sortie)

$$\delta W_{p,e} = \mathcal{P}_{p,e} dt = +P_e S_e v_e dt = +P_e D_V dt = +P_e \frac{D_m}{\rho} dt.$$

- **Conclusion** :

- ▷ écriture avec travaux massiques (= par unité de masse traversant) :

$$\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s \right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e \right) = w_i + w_{\text{visc}}$$

- ▷ écriture avec puissances :

$$D_m \left[\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s \right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e \right) \right] = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{\text{visc}}$$

- ▷ attention à ne pas oublier de multiplier par le débit massique, en particulier

$$\mathcal{P}_i = D_m w_i$$

II - Théorème de Bernoulli : conservation de l'énergie mécanique dans un écoulement parfait

- **Hypothèses** : parfait + stationnaire + incompressible.
- **Théorème de Bernoulli** : conservation de la charge tout le long d'une ligne de courant,

$$\forall M \in \mathcal{L}, \quad \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = K(\mathcal{L}) = \text{cte.}$$

Idem sur toute section \mathcal{S} d'une conduite.

- **Jet à l'air libre** : pression égale à P_{atm} en tout point du jet.
- **Effet Venturi** : resserrement de section \implies hausse de vitesse + chute de pression.

III - Pertes de charge

- **Définition** :

- ▷ Pertes de charge = dissipation d'énergie mécanique par viscosité ;
- ▷ Écriture comme une pression ou une hauteur, avec éventuellement des préfacteurs ρ ou g pour l'homogénéité, et toujours un signe \ominus (p.ex. $w_{\text{visc}} = -g \Delta h^*$) ;
- ▷ En pratique, w_{visc} ou $\mathcal{P}_{\text{visc}}$ sont toujours écrits sous forme de pertes de charge.

- **Perte de charge régulière** : proportionnelle à la distance parcourue dans la conduite.

\rightsquigarrow relation de Darcy-Weisbach (normalement rappelée par l'énoncé) :

$$\Delta p^* = \xi \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2} \quad \iff \quad \Delta h^* = \xi \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

avec ξ le coefficient de perte de charge, dépendant du Reynolds et des rugosités.

- **Perte de charge singulière** : localisée au voisinage d'une singularité géométrique dans l'écoulement (obstacle, coude, resserrement brusque de section, etc.), due aux turbulences situées juste derrière cette singularité.

- **Effet des pertes de charge** :

- ▷ Les pertes de charge ne diminuent pas forcément la vitesse (ou le débit) de l'écoulement : dans un écoulement en conduite, le débit se conserve !
- ▷ En conduite, l'effet se ressent plutôt sur la pression.
- ▷ Se méfier des raisonnements trop rapides par analogie avec la mécanique des solides : en mécanique des fluides, il y a une variable (la pression) et une équation (conservation du débit) supplémentaires.

IV - Élément actif

Composant dont le but est d'échanger de l'énergie mécanique avec le fluide.

\rightsquigarrow pompe ($\mathcal{P}_i > 0$), turbine ($\mathcal{P}_i < 0$), etc.

Pour qu'il puisse y avoir échange de puissance indiquée, l'élément actif doit forcément comporter des pièces mobiles.