BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

TD 11 – Mécanique des fluides

Énergétique des écoulements Théorème de Bernoulli

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Ceinture		Proposition de parcours d'entraînement
	Ceinture blanche	Applications + exercices 1, à 4 et 9 à 11
	Ceinture jaune	Applications + exercices 1 à 4, 7, et 9 à 11
	Ceinture rouge	Applications (★) + exercices 5 à 12
	Ceinture noire	Applications (★) + exercices 5 à 13

Applications de cours

Seuls les étudiants du groupe PT★ seront interrogés en colle sur les applications marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

(★) 11.1 - Établir la relation de Bernoulli.

> *La démonstration attendue consiste à refaire le bilan d'énergie,* ***dans le cas particulier où les termes de puissance indiquée et de puissance visqueuse sont nuls****. La démonstration est notoirement très longue : les étudiants doivent non seulement faire un effort de mémorisation* ***mais aussi de concision*** *dans la présentation. Les points clés de la démonstration qui doivent absolument apparaître sont les suivants :*
> - ▷ *passage du système ouvert à un système fermé (comment $\delta\Sigma_e$ et $\delta\Sigma_s$ sont ils construits ?)*
> - ▷ *bilan de masse pour montrer que $\delta m_e = \delta m_s$;*
> - ▷ *les deux écritures de la variation d'énergie mécanique $dE_{m,f}$ du système fermé ;*
> - ▷ *l'expression du travail de transvasement en fonction des pressions ;*
> - ▷ *simplifications pour aboutir au résultat.*
>
> *Pour information, cette démonstration a déjà été demandée à un de mes étudiants en exercice de cours à l'oral.*

11.2 - Établir l'expression de la vitesse de vidange d'un réservoir rempli d'une hauteur d'eau H et percé au fond par un orifice de faible section (relation de Torricelli).

11.3 - Établir l'évolution des champs de pression et de vitesse dans un dispositif type Venturi.

> *Bien que très classique, le dispositif de Venturi n'est pas à connaître et pourra donc être rappelé si besoin. Je n'attends pas de longs calculs : l'étudiant doit combiner la conservation du débit et le théorème de Bernoulli pour montrer qu'un resserrement de section entraîne une hausse de vitesse et une chute de pression.*

(PT uniquement) 11.4 - Énoncer sans démonstration le théorème de Bernoulli généralisé en présence de pièces mobiles et de pertes de charge. L'interrogateur précisera la dimension voulue (puissance, pression, etc.), si l'écriture concerne une puissance ou un travail indiqué, et si les pertes de charge doivent s'exprimer sous forme de pression ou de hauteur. L'objectif est de jongler sans erreur avec les dimensions des différents termes.

Exemples :

▷ *Écriture en énergie massique, pertes de charge en hauteur d'eau équivalente :*

$$\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{{v_s}^2}{2} + gz_s\right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{{v_e}^2}{2} + gz_e\right) = w_i - g\,\Delta h^\star\,.$$

▷ *Écriture homogène à une pression :*

$$\left(P_s + \frac{1}{2}\rho {v_s}^2 + \rho g z_s\right) - \left(P_e + \frac{1}{2}\rho {v_e}^2 + \rho g z_e\right) = \rho w_i - \Delta p^\star\,.$$

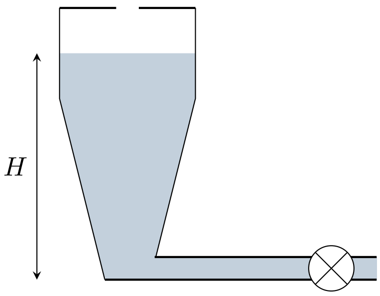
▷ *Voir l'exercice 2 du TD pour plus d'exemples !*

11.5 - Établir l'expression de la puissance disponible sur les turbines d'une centrale hydroélectrique de hauteur de chute h. On négligera les pertes de charge et on supposera que la pression et la vitesse du fluide sont les mêmes en entrée et en sortie de l'installation.

Analyse de corrigé

Exercice 1 : Alimentation en eau — inspiré PT B 2015 | 2 | 1

▷ *Pertes de charge ;*
▷ *Prise de pression hydrostatique (tubes piézométriques) ;*
▷ *Puissance indiquée.*



On s'intéresse à une alimentation domestique en eau via un château d'eau. Le château d'eau est modélisé par un réservoir ouvert sur l'atmosphère, haut de $H = 45\,\mathrm{m}$ et de diamètre au sommet $D_0 = 5\,\mathrm{m}$, voir figure 1. Ce réservoir débouche sur une canalisation horizontale de diamètre $d = 10\,\mathrm{cm}$. Cette canalisation alimente une habitation située à $1\,\mathrm{km}$ du château d'eau, où l'eau est libérée à l'air libre.

1 - Montrer que la vitesse V_0 d'écoulement de l'eau au niveau de la surface libre est négligeable devant la vitesse V dans la canalisation.

2 - Calculer numériquement la vitesse de l'eau au niveau de l'habitation en supposant l'écoulement parfait. En déduire le débit volumique théorique. Commenter.

3 - En pratique, le débit volumique mesuré n'est que de $20\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ en raison d'une perte de charge régulière dans la canalisation. Expliquer ce que cela signifie et en donner les causes.

La chute de pression Δp au bout d'une longueur ℓ de conduite de diamètre d est donnée par la relation de Darcy-Weisbach, faisant intervenir un coefficient de perte de charge K :

$$\frac{\Delta p}{\ell} = K\frac{\rho V^2}{2d}\,.$$

4 - Déterminer K.

✎ ***Correction*** — *Tout au long de l'exercice, on raisonne implicitement (mais comme toujours dans ce genre de contexte !) sur des vitesses débitantes.*

1 - *L'eau étant incompressible, il y a conservation du débit volumique, d'où on déduit*

$$D_V = S_0 V_0 = SV \qquad \text{soit} \qquad \boxed{V_0 = \frac{S}{S_0} V \ll V\,.}$$

2 - *D'après le théorème de Bernoulli appliqué entre la surface libre du château d'eau et la sortie du robinet,*

$$\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \frac{V^2}{2} + 0\right) - \left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \cancel{\frac{{V_0}^2}{2}} + gH\right) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{V = \sqrt{2gH} = 30\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.}$$

On en déduit

$$\boxed{D_V = V\,\frac{\pi d^2}{4} = 2{,}3\cdot 10^{-1}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-1} = 230\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.}$$

***Question d'analyse 1** - Pourquoi ne peut-on pas utiliser la conservation du débit pour calculer V ?*

***Question d'analyse 2** - Pourquoi la pression est-elle égale à la pression atmosphérique dans les deux membres de l'égalité ?*

***Question d'analyse 3** - Quel commentaire pouvez-vous faire sur le résultat ?*

3 - *Une perte de charge régulière décrit une dissipation d'énergie mécanique du fluide par viscosité équirépartie tout au long d'un écoulement, c'est-à-dire dans une conduite de géométrie « régulière ». Cela se traduit par une chute de pression dans l'écoulement proportionnelle à la longueur de la conduite.*

> *Donner une réponse claire et complète n'est pas évident. Les trois aspects à faire apparaître dans la réponse sont la viscosité, la géométrie régulière et la proportionnalité à la longueur de la conduite.*

4 - *Appliquons de nouveau le théorème de Bernoulli entre le sommet du château d'eau et la sortie de la conduite, mais en prenant en compte la perte de charge,*

$$\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho}+\frac{V^2}{2}+0\right)-\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho}+0+gH\right)=-\frac{\Delta p}{\rho}=-K\frac{LV^2}{2d}$$

avec $L=1\,\mathrm{km}$ la longueur totale de la conduite.

***Question d'analyse 4** - Justifier la présence du signe $\ominus$ et du facteur ρ associés à la perte de charge Δp.*

Après simplification, il vient

$$\frac{V^2}{2}-gH=-K\frac{LV^2}{2d}\qquad\text{soit}\qquad\boxed{K=\frac{2d}{LV^2}\left(\frac{V^2}{2}-gH\right)\,.}$$

La vitesse se calcule à partir du débit volumique observé au niveau de l'habitation, ce qui donne

$$V=2{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\qquad\text{d'où}\qquad\boxed{K=0{,}014\,.}$$

***Question d'analyse 5** - Montrer que K est sans unité.*

Analyse dimensionnelle

Exercice 2 : Écritures du théorème de Bernoulli — 1 | 0 |

▷ *Homogénéité.*

Parmi les écritures ci-dessous du théorème de Bernoulli, indiquer lesquelles sont justes, lesquelles sont fausses, et pourquoi. Pour chaque écriture juste, préciser sa dimension (pression, énergie massique, puissance, etc.). On note les pertes de charge $\Delta p > 0$ (homogène à une pression) ou $\Delta h > 0$ (homogène à une hauteur).

1 - $\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_\mathrm{s}^2+gz_\mathrm{s}=\dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_\mathrm{e}^2+gz_\mathrm{e}$

2 - $p_\mathrm{s}+\dfrac{1}{2}\rho v_\mathrm{s}^2+gz_\mathrm{s}=p_\mathrm{e}+\dfrac{1}{2}\rho v_\mathrm{e}^2+gz_\mathrm{e}$

3 - $\left(\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_\mathrm{s}^2+gz_\mathrm{s}\right)-\left(\dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_\mathrm{e}^2+gz_\mathrm{e}\right)=-\Delta p$

4 - $D_\mathrm{m}\left(\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_\mathrm{s}^2+gz_\mathrm{s}\right)-D_\mathrm{m}\left(\dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_\mathrm{e}^2+gz_\mathrm{e}\right)=\mathcal{P}_\mathrm{i}$

5 - $\left(\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_\mathrm{s}^2+gz_\mathrm{s}\right)-\left(\dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_\mathrm{e}^2+gz_\mathrm{e}\right)=-g\,\Delta h$

6 - $\left(\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_\mathrm{s}^2+z_\mathrm{s}\right)-\left(\dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_\mathrm{e}^2+z_\mathrm{e}\right)=w_\mathrm{i}$

7 - $D_\mathrm{m}\left(\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_\mathrm{s}^2+gz_\mathrm{s}\right)-D_\mathrm{m}\left(\dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_\mathrm{e}^2+gz_\mathrm{e}\right)=w_\mathrm{i}$

8 - $\left(\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho g}+\dfrac{v_\mathrm{s}^2}{2g}+z_\mathrm{s}\right)-\left(\dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho g}+\dfrac{v_\mathrm{e}^2}{2g}+z_\mathrm{e}\right)=-\Delta h$

9 - $D_\mathrm{m}\left(\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_\mathrm{s}^2+gz_\mathrm{s}\right)-D_\mathrm{m}\left(\dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho}+\dfrac{1}{2}v_\mathrm{e}^2+gz_\mathrm{e}\right)=D_\mathrm{m}g\,\Delta h$

10 - $D_V\left(p_\mathrm{s}+\dfrac{1}{2}\rho v_\mathrm{s}^2+\rho gz_\mathrm{s}\right)-D_V\left(p_\mathrm{e}+\dfrac{1}{2}\rho v_\mathrm{e}^2+\rho gz_\mathrm{e}\right)=\mathcal{P}_\mathrm{i}-D_V\,\Delta p$

11 - $\left(p_\mathrm{s}+\dfrac{1}{2}\rho v_\mathrm{s}^2+\rho gz_\mathrm{s}\right)-\left(p_\mathrm{e}+\dfrac{1}{2}\rho v_\mathrm{e}^2+\rho gz_\mathrm{e}\right)=\rho w_\mathrm{i}$

Écoulements parfaits

Exercice 3 : Débitmètre de Venturi 1 | 1 |

▷ *Écoulement parfait.*

Un débitmètre de Venturi est un dispositif, représenté figure 1, qui permet de mesurer le débit d'un écoulement permanent incompressible dans une conduite. Il s'agit d'imposer un rétrécissement de section et de mesurer grâce à un manomètre différentiel la différence de pression entre deux prises de pression placées en amont et au cœur du resserrement de section.

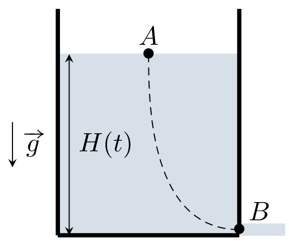
Figure 1 – Débitmètre de Venturi.

1 - Comment évolue la vitesse débitante entre les deux sections S_1 et S_2 où sont placées les prises de pression ? En déduire le signe de $\Delta p = p_1 - p_2$.

2 - Exprimer le débit volumique dans la conduite en fonction notamment de Δp et du rapport des sections.

Exercice 4 : Formule de Torricelli 1 | 2 |

▷ *Écoulement parfait ;*
▷ *Conservation du débit ;*
▷ *Intégration par séparation de variables.*



Soit un réservoir cylindrique de section S, initialement rempli d'eau avec une hauteur H_0. On perce au point B, au fond de ce réservoir, un orifice de section $s \ll S$, par lequel il se vide. On suppose étudier la vidange dans une approximation de régime quasi-stationnaire.

1 - Montrer que $v_B \gg v_A$.

2 - En appliquant la relation de Bernoulli, montrer que le débit volumique sortant du cylindre s'exprime par $D_V = s\sqrt{2gH(t)}$. Cette relation est appelée « relation de Torricelli », publiée [1] par Evangelista Torricelli en 1644 en conclusion ses travaux pour les fontainiers de Florence. Torricelli est également connu pour l'invention du baromètre.

3 - Montrer que la hauteur d'eau vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\alpha\sqrt{2gH} \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{s}{S}\,.$$

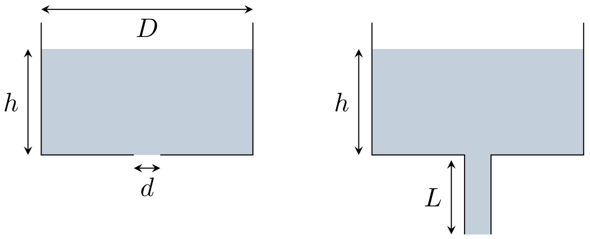
4 - En déduire la durée Δt nécessaire pour vider intégralement le réservoir.

1. Mais sans doute établie par d'autres quelques années auparavant ...

Exercice 5 : Vidange d'un réservoir

inspiré oraux banque PT | 2 | 2 |

- ▷ *Écoulement parfait ;*
- ▷ *Conservation du débit ;*
- ▷ *Intégration par séparation de variables.*



Cet exercice étudie la vidange d'un réservoir de diamètre D par un petit orifice de diamètre d percé au fond, auquel on ajoute éventuellement un tuyau de longueur L de même diamètre. La hauteur d'eau dans le réservoir est notée h.

1 - Déterminer la vitesse de sortie v_s dans les deux cas.

2 - Exprimer le débit. En déduire que la vidange est plus efficace avec le tuyau d'évacuation. On ne s'intéresse qu'à cette méthode de vidange par la suite.

3 - Montrer que la hauteur d'eau dans le réservoir vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g(h+L)}$$

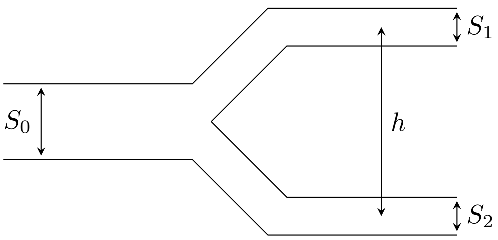
4 - En déduire l'expression du temps de vidange.

5 - Si la pression au sein de l'écoulement devient inférieure à la pression de vapeur saturante de l'eau P_sat, l'eau se vaporise, ce qui se traduit par l'apparition de bulles qui perturbent l'écoulement et peuvent aller jusqu'à endommager la conduite d'évacuation. Quelle est la longueur maximale L_max au delà de laquelle ce phénomène de cavitation apparaît ?

Exercice 6 : Fourche hydraulique

2 | 2

- ▷ *Système à plusieurs sorties ;*
- ▷ *Écoulement parfait.*



On considère une conduite d'eau avec un Y de séparation telle que $S_1 = S_2 = S_0/2$. Le système n'est pas horizontal : on note h la dénivellation entre les deux sorties, supposées toutes les deux à l'air libre.

Exprimer les vitesses v_1 et v_2 en fonction de h et de la vitesse d'entrée v_0.

Pertes de charge et éléments actifs

Exercice 7 : Dimensionnement d'une pompe

oral banque PT | 2 | 2

- ▷ *Élément actif ;*
- ▷ *Lecture d'abaque.*

On dispose d'une cuve souterraine enterrée à une profondeur $h = 30\,\mathrm{m}$ et d'une pompe permettant d'acheminer l'eau à la surface avec un débit $Q = 0{,}5\,\mathrm{L\cdot s^{-1}}$ au travers d'une conduite de rayon R constant. La sortie S est à la pression $P_S = P_\mathrm{atm}$, l'entrée E à la pression $P_E = 1{,}5\,P_S$. Le but de l'exercice est de choisir le modèle de pompe adéquat.

1 - Rappeler les hypothèses du théorème de Bernoulli et le redémontrer.

2 - L'appliquer à la situation de l'exercice et déterminer la grandeur pertinente.

3 - Faire l'application numérique.

4 - On définit la hauteur manométrique totale H de l'installation par

$$H = h + \frac{P_S - P_E}{\rho g}\,.$$

Déterminer le modèle de pompe le plus adapté à l'aide de l'abaque reproduite figure 3, et la puissance électrique consommée.

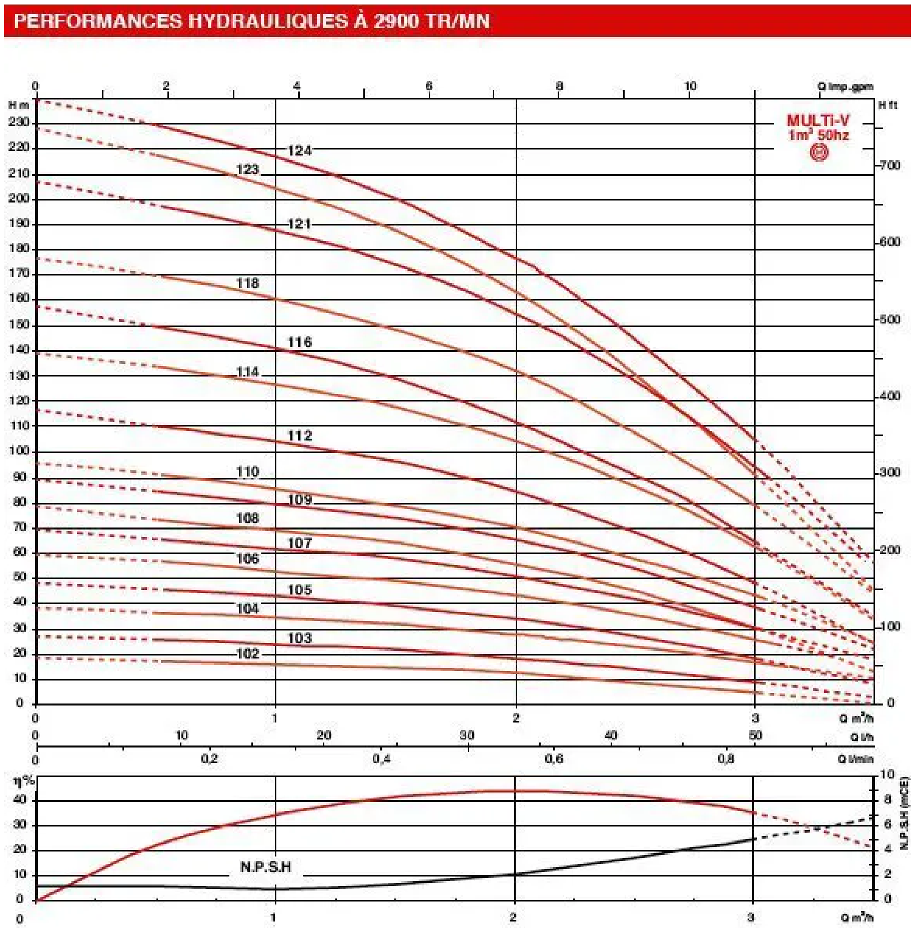
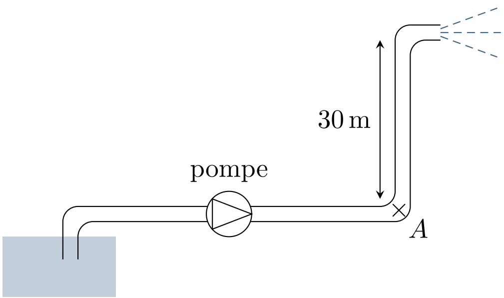


Figure 2 – Abaque de dimensionnement d'une pompe.

Exercice 8 : Lance incendie oral banque PT | 2 | 2 |

▷ *Pertes de charge ;*
▷ *Puissance indiquée.*



On considère un tuyau de pompier de diamètre $d = 70\,\mathrm{mm}$, montant à une hauteur de 30 m, où il se termine par une lance. Une pompe impose un débit volumique $Q = 500\,\mathrm{L\cdot min^{-1}}$, l'eau étant aspirée à partir d'un bassin à l'air libre.

Donnée : masse volumique de l'eau $\mu = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

1 - Quelle est la vitesse v de l'écoulement dans le tuyau ?

2 - L'eau sort de la lance avec une vitesse d'éjection $v_\mathrm{e} = 30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Comment l'expliquer ?

3 - Quelle doit être la pression au point A pour obtenir une telle vitesse en sortie de la lance ?

On s'intéresse maintenant aux pertes de charge dans le tuyau, exprimées en $\mathrm{Pa\cdot m^{-1}}$ par

$$\kappa = f\frac{\mu v^2}{2d} \qquad \text{avec} \qquad f = 2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{USI}\,.$$

4 - Quelle est l'unité de f ?

5 - Quelle puissance doit fournir la pompe, sachant que le tuyau est long de 200 m au total ?

Exercice 9 : Alimentation d'un robinet par un récupérateur d'eau de pluie 2 | 1

▷ *Pertes de charge et diagramme de Moody ;*
▷ *Puissance indiquée.*

Pour lutter contre la diminution des ressources en eau, une solution de plus en plus développée consiste à récupérer l'eau de pluie pendant la période hivernale, la stocker dans une cuve de récupération, et l'utiliser par exemple pour alimenter les chasses d'eau ou les robinets extérieurs. On dispose d'un récupérateur d'eau de pluie relié à un robinet extérieur par une conduite en PVC de diamètre $D = 15\,\mathrm{mm}$ et de longueur $L = 30\,\mathrm{m}$. Le robinet est situé à $h_1 = 1\,\mathrm{m}$ au dessus du sol. L'installation est équipée d'une pompe qui permet de garantir un débit suffisant pour remplir un arrosoir de 15 L en 30 s. La cuve de récupération est enterrée dans le sol, sa sortie se trouvant à une profondeur $h_2 = 2{,}50\,\mathrm{m}$. Le niveau d'eau dans la cuve est égal à $H = 1{,}5\,\mathrm{m}$, le dessus de la cuve se trouvant à pression atmosphérique grâce à un regard.

On tient compte d'une perte de charge régulière dans la conduite, donnée par la relation de Darcy-Weisbach

$$\Delta p = \lambda\frac{\mu L V^2}{2D}\,.$$

Le coefficient de perte de charge λ dépend à la fois du nombre de Reynolds de l'écoulement et des rugosités, qui sont pour le PVC de hauteur caractéristique $e = 1{,}5\,\mathrm{\mu m}$.

1 - Calculer la vitesse débitante V dans la conduite et le nombre de Reynolds de l'écoulement.

2 - En utilisant l'abaque donnée figure 4, déterminer le coefficient de perte de charge λ puis la valeur numérique de la chute de pression Δp.

3 - En déduire la puissance indiquée que la pompe doit fournir à l'eau pour maintenir le débit.

4 - La pompe a un rendement de 60 %, en déduire la puissance électrique consommée lorsque le robinet est ouvert.

5 - Les valeurs obtenues ici sont en fait sous-estimées. Quel phénomène négligé ici permet de l'expliquer ?

Données : masse volumique $\mu = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$; viscosité $\eta = 1{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$.

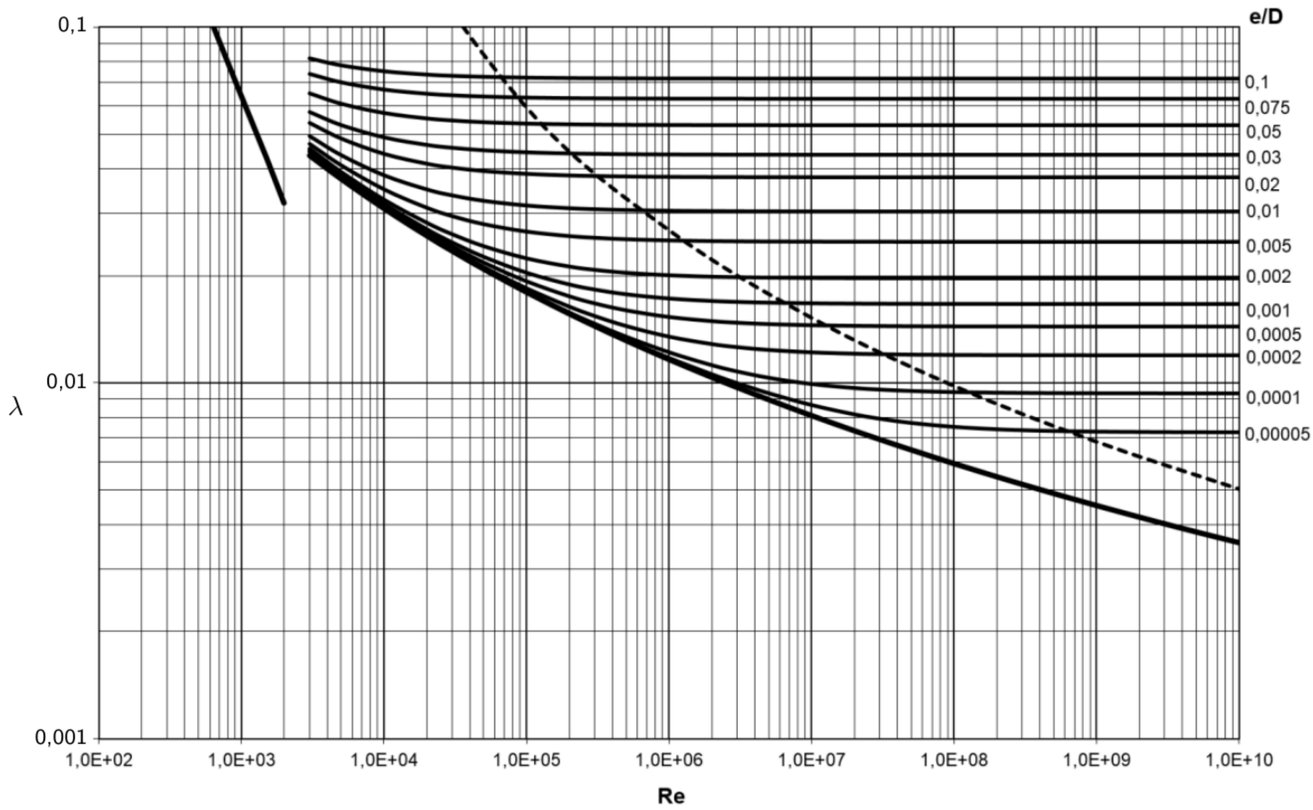
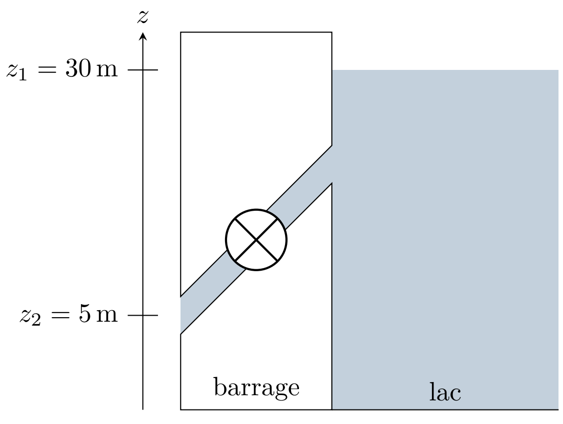


Figure 3 – Abaque de Moody.

Exercice 10 : Production d'énergie hydroélectrique — oral banque PT | 2 | 2

- ▷ *Puissance indiquée ;*
- ▷ *Pertes de charge.*



L'eau d'un lac de retenue d'un barrage s'écoule par une conduite où se trouve une turbine. La conduite a un diamètre de sortie $D = 2{,}5\,\text{m}$ et le débit volumique vaut $Q_{\text{vol}} = 25\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$.

1 - Définir physiquement la notion de débit volumique.

2 - Donner sans calcul la vitesse à la surface du lac. Calculer la vitesse en sortie de la conduite.

3 - En appliquant la relation de Bernoulli, calculer la puissance maximale disponible sur la turbine.

4 - Le rendement est en pratique de 60 %, ce qui donne une puissance en sortie de turbine de 3,5 MW. Commenter les écarts et quantifier ce phénomène.

Exercice 11 : Transport d'huile alimentaire — 2 | 2

- ▷ *Pertes de charge régulières et singulières ;*
- ▷ *Puissance indiquée.*

Dans une usine agro-alimentaire, de l'huile de masse volumique $\rho = 865\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ doit être transportée avec un débit $q = 20\,\text{m}^3\cdot\text{h}^{-1}$ dans une conduite longue de 20 m et de diamètre $d = 10\,\text{cm}$. L'écoulement dans la conduite est laminaire.

Données :

▷ perte de charge linéaire : dans un écoulement laminaire,

$$\Delta P_{\text{lin}} = \frac{1}{2d}\,\lambda\,\rho u^2 \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{64}{\text{Re}}$$

où Re est le nombre de Reynolds de l'écoulement et u la vitesse débitante.

▷ perte de charge singulière :

$$\Delta P_\mathrm{s} = \frac{1}{2}\,\kappa\,\rho u^2\,.$$

1 - Lorsque la conduite est parfaitement horizontale, on mesure une chute de pression de 15,0 mbar. En déduire la viscosité de l'huile.

2 - Vérifier a posteriori que l'écoulement dans la conduite est bien laminaire.

3 - Au sein de la conduite se trouve un robinet vanne, responsable d'une perte de charge singulière de coefficient $\kappa = 2{,}8$ lorsqu'il est ouvert. Calculer la chute de pression prenant en compte ce robinet.

4 - Déterminer la longueur de conduite équivalente à la présence du robinet.

5 - La conduite doit délivrer l'huile à une hauteur 3 m supérieure à celle de départ. Calculer la chute de pression totale.

6 - En déduire la puissance nécessaire au transport de l'huile le long de la conduite sans chute de pression.

Pour approfondir

Exercice 12 : Sonde de Pitot moyennée — 3 | 1

▷ *Analyse d'un document vidéo ;*
▷ *Écoulement parfait ;*
▷ *Théorème de Bernoulli dans un écoulement externe.*

Cet exercice proposé en guise d'approfondissement a pour objectif d'appliquer la relation de Bernoulli à un écoulement *externe*, c'est-à-dire autour d'un obstacle plutôt que dans une conduite.

Les sondes de Pitot sont des capteurs de vitesse basés sur une mesure de pression différentielle. La vidéo (QR-code ci-contre) en présente une utilisation pour la mesure de d'écoulements industriels en conduite. On modélise une telle sonde par le dispositif présenté figure 2.

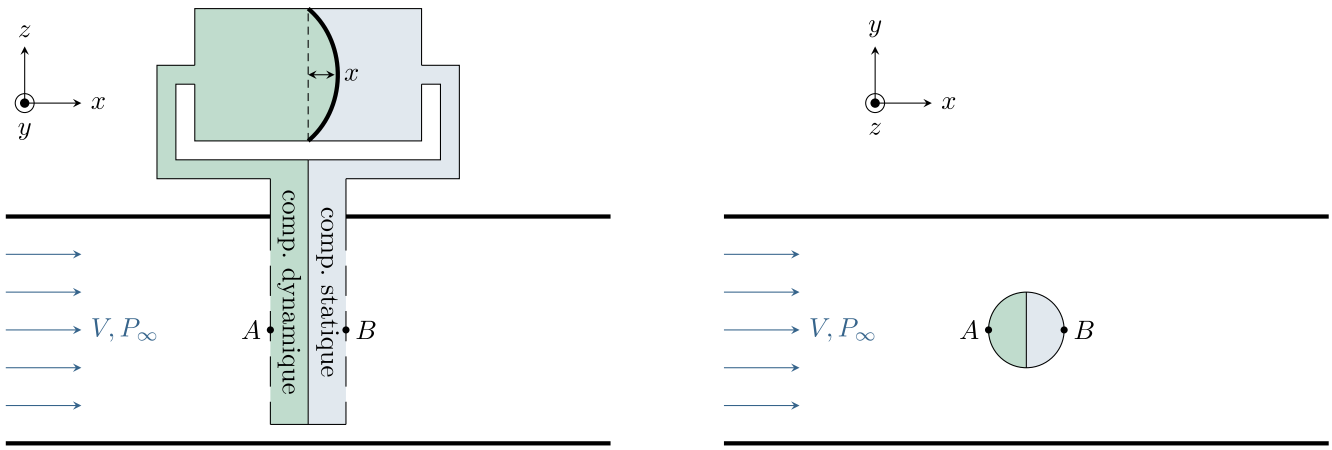


Figure 4 – **Sonde de Pitot moyennée.** Les deux compartiments de la sonde sont représentés en couleur pour mieux les visualiser, mais ils contiennent le même fluide que la conduite.

L'écoulement dans la conduite est supposé parfait, incompressible et stationnaire. On néglige les variations d'altitude dans la conduite et dans la sonde, si bien que la pression et la vitesse sont uniformes dans toute section de la conduite. On note V la vitesse débitante et P_∞ la pression dans l'écoulement loin de la sonde.

La membrane est de surface S supposée constante. Le décalage du centre de la membrane est noté x, et on admet que l'élasticité de la membrane tend à la ramener vers sa position de repos avec une force de rappel élastique linéaire $\vec{f} = -kx\,\vec{e}_x$.

1 - Citer quelques avantages des sondes de Pitot moyennées présentées dans la vidéo.

2 - Représenter en vue de dessus (schéma de droite de la figure 2) l'allure des lignes de courant de l'écoulement au voisinage de la sonde de Pitot.

3 - À partir du tracé précédent, justifier qualitativement que le point A est un point d'arrêt : $v_A = 0$. Exprimer la pression P_A en ce point. Par ailleurs, on admet qu'au point B on a $v_B = 0$ et $P_B \simeq P_\infty$: une zone de turbulence apparaît derrière la sonde, si bien que le théorème de Bernoulli en version ligne de courant devient inopérant.

4 - Écrire la condition d'équilibre de la membrane.

5 - En déduire l'expression de la vitesse d'écoulement en fonction du déplacement de la membrane.

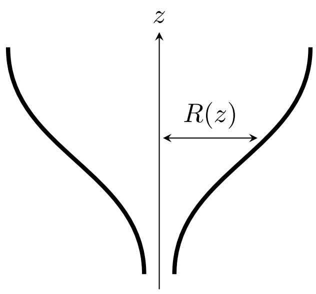
Problème ouvert

Exercice 13 : Clepsydre

oral CCINP PSI | 3 | 2

▷ *Résolution de problème.*

> *Un problème ouvert demande de l'initiative dans le raisonnement mené. Pour aborder un tel exercice, il peut notamment être utile de faire un schéma modèle, d'identifier et nommer les grandeurs pertinentes, de proposer des hypothèses simplificatrices, de décomposer le problème en des sous-problèmes simples, etc. Le candidat peut également être amené à proposer des valeurs numériques raisonnables pour les grandeurs manquantes ... et à l'inverse toutes les valeurs données ne sont pas forcément utiles. Le tout est évidemment à adapter à la situation proposée !*



Une clepsydre est un instrument de mesure du temps dans lequel l'eau s'écoule avec un débit constant d'un réservoir. La mesure de la masse d'eau qui s'est vidée permet d'en déduire facilement le temps écoulé.

Question : Déterminer le rayon $R(z)$ du réservoir.