BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

TD 15 – Thermodynamique *Correction*

Thermodynamique industrielle

Composants thermodynamiques

Exercice 1 : Turbine à gaz

oral banque PT | 2 | 1

▷ *Étude d'un composant thermodynamique ;*
▷ *Modèle du gaz parfait ;*
▷ *Bilan d'entropie.*

1 Considérons un système ouvert. Notons e les grandeurs en entrée et s celles en sortie. Le premier principe s'écrit

$$\boxed{D\left[(h_\mathrm{s}+e_\mathrm{c,s}+e_\mathrm{p,s})-(h_\mathrm{e}+e_\mathrm{c,e}+e_\mathrm{p,e})\right]=\mathcal{P}_\mathrm{u}+\mathcal{P}_\mathrm{th}\,.}$$

avec h l'enthalpie massique, e_c l'énergie cinétique massique et e_p l'énergie potentielle massique du fluide ; $\mathcal{P}_\mathrm{u}$ la puissance mécanique utile qu'il reçoit et $\mathcal{P}_\mathrm{th}$ la puissance thermique reçue. Le second principe s'écrit

$$\boxed{D\,(s_\mathrm{s}-s_\mathrm{e})=\frac{\mathcal{P}_\mathrm{th}}{T_0}+\sigma_\mathrm{créée}}$$

avec s l'entropie massique, T_0 la température du thermostat fournissant la puissance thermique $\mathcal{P}_\mathrm{th}$, et $\sigma_\mathrm{créée}$ le taux de création d'entropie, c'est-à-dire l'entropie créée par unité de temps.

2 Le but d'une turbine est de récupérer une puissance mécanique, les pertes thermiques sont donc a priori faibles. La turbine est horizontale, il n'y a donc pas de variation d'énergie potentielle. En négligeant de plus les variations d'énergie cinétique, le premier principe appliqué à la turbine devient

$$D(h_\mathrm{s}-h_\mathrm{e})=\mathcal{P}_\mathrm{u}+\mathcal{P}_\mathrm{th}\,,$$

soit d'après la loi de Joule (gaz parfait)

$$Dc_P(T_2-T_1)=\mathcal{P}_\mathrm{u}+\mathcal{P}_\mathrm{th}\,.$$

Comme les températures sont connues et fixées, alors la somme $\mathcal{P}_\mathrm{u}+\mathcal{P}_\mathrm{th}$ l'est aussi. Les deux puissances étant négatives (le fluide cède de la puissance mécanique, et le gaz dans la turbine est plus chaud que l'air extérieur), il est clair que la puissance cédée à la turbine $|\mathcal{P}_\mathrm{u}|$ est maximale lorsque $\mathcal{P}_\mathrm{th}$ est nulle, c'est-à-dire **lorsque l'écoulement est adiabatique**.

3 En posant $r=R/M$, la variation d'entropie massique entre l'entrée et la sortie de la turbine vaut

$$\boxed{s_\mathrm{s}-s_\mathrm{e}=\frac{\gamma r}{\gamma-1}\ln\frac{T_2}{T_1}-r\ln\frac{P_2}{P_1}=-3{,}5\cdot10^2\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}\,.}$$

Ce résultat est **contradictoire avec l'hypothèse d'un écoulement adiabatique** : si tel était le cas, l'écoulement devrait évacuer l'entropie créée dans la turbine, si bien que l'entropie de sortie serait nécessairement supérieure à l'entropie d'entrée (égale à la limite réversible).

4 Pour pouvoir faire le calcul, il faut supposer la transformation réversible dans la turbine. Alors, d'après le second principe,

$$\mathcal{P}_\mathrm{th}=T_0\,D(s_\mathrm{s}-s_\mathrm{e})=T_0DM\,(S_\mathrm{m,s}-S_\mathrm{m,e})=-107\,\mathrm{kW}\,.$$

> *Le signe est cohérent : la vapeur d'eau cède du transfert thermique à l'extérieur.*

On déduit du premier principe

$$\mathcal{P}_\mathrm{u}=D\,(h_\mathrm{s}-h_\mathrm{e})-\mathcal{P}_\mathrm{th}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

qui donne d'après la loi de Joule pour un gaz parfait

$$\mathcal{P}_\mathrm{u} = Dc_P(T_2 - T_1) - \mathcal{P}_\mathrm{th} = D\frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}(T_2 - T_1) - \mathcal{P}_\mathrm{th}\,.$$

Finalement,

$$\mathcal{P}_\mathrm{u} = -493\,\mathrm{kW}\,.$$

Ainsi, **une puissance de 600 kW est cédée à la turbine**.

> *Bien que non nulle, la puissance perdue par transfert thermique demeure très faible.*

5 Le débit massique est relié la vitesse (débitante) v de l'écoulement par

$$D = \rho\, v\, \Sigma$$

avec ρ la masse volumique du gaz et Σ la section de la canalisation. Or pour un gaz parfait, d'après l'équation d'état,

$$P\frac{V}{m} = \frac{n}{m}RT \qquad \text{soit} \qquad \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} \qquad \text{d'où} \qquad \rho = \frac{MP}{RT}\,.$$

On en déduit

$$v = \frac{D}{\rho\Sigma} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v = \frac{DRT}{MP\Sigma}\,.}$$

Numériquement, on trouve

$$\boxed{v_\mathrm{e} = 0{,}52\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad v_\mathrm{s} = 1{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

La variation d'énergie cinétique massique vaut donc

$$e_{\mathrm{c,s}} - e_{\mathrm{c,e}} = \frac{{v_\mathrm{s}}^2}{2} - \frac{{v_\mathrm{e}}^2}{2} = 1{,}3\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}\,.$$

Compte tenu du débit $D = 1\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$, cela correspond à une puissance de 1,3 W, largement négligeable devant les 600 kW fournis à la turbine. La variation d'enthalpie de la vapeur est donc très supérieure à sa variation d'énergie cinétique.

> *C'est d'ailleurs ce qui explique que la variation de vitesse entre l'entrée et la sortie de la turbine, qui n'est pas dans le sens « intuitif » (on s'attendrait à $v_s < v_e$), n'est pas choquante pour autant car elle demeure très faible.*

Exercice 2 : Tuyère calorifugée

oral banque PT | 2 | 2

▷ *Étude d'un composant thermodynamique ;*
▷ *Modèle du gaz parfait.*

1 Appliquons le premier principe à un volume de constrôle délimité par les sections d'abscisse $x = 0$ et d'abscisse x. Le fluide ne reçoit dans la tuyère ni travail indiqué (pas de pièces mobiles), ni transfert thermique. Ainsi,

$$\boxed{h(x) + \frac{1}{2}v(x)^2 = h_0 + \frac{1}{2}{v_0}^2 = \mathrm{cte}\,.}$$

2 On suppose $v_0 = 0$. Comme le fluide est un gaz parfait alors d'après la loi de Joule

$$h(x) - h_0 = c_P\,[T(x) - T_0] \qquad \text{donc} \qquad v(x)^2 = 2c_P\,[T_0 - T(x)]$$

Or d'une part

$$c_P = \frac{1}{m} \times \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}$$

et d'autre part l'équation d'état s'écrit

$$\frac{PV}{m} = \frac{nRT}{m} \qquad \text{soit} \qquad \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} \qquad \text{d'où} \qquad T = \frac{MP}{R\rho}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

d'où finalement

$$v(x)^2 = \frac{2\gamma R}{M(\gamma-1)} \times \frac{M}{R}\left[\frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P(x)}{\rho(x)}\right]$$

et ainsi

$$\boxed{v(x) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P(x)}{\rho(x)}\right)}}$$

3 Réécrivons

$$v(x) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{P_0}{\rho_0}\left(1 - \frac{P(x)\rho_0}{\rho(x)P_0}\right)}$$

La transformation est adiabatique réversible et concerne un gaz parfait, on applique donc la loi de Laplace : $PV^\gamma = \text{cte}$ donne en fonction de ρ

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cte}' \qquad \text{soit} \qquad \frac{P^{1/\gamma}}{\rho} = \text{cte}'' \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\rho_0}{\rho(x)} = \left(\frac{P_0}{P(x)}\right)^{1/\gamma}$$

Finalement, on arrive au résultat cherché :

$$\boxed{v(x) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{P_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{P(x)}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}\,.}$$

Exercice 3 : Compresseur étagé

2 | 2

▷ *Étude d'un composant thermodynamique ;*
▷ *Modèle du gaz parfait.*

1 La compression est adiabatique réversible : on applique donc la loi de Laplace, sous la forme $P^{1-\gamma}\,T^\gamma = \text{cte}$. Ainsi,

$$\boxed{T_2 = T_0\,\beta^{1-1/\gamma} = 685\,\text{K}\,.}$$

2 La compression est adiabatique, réversible et on néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle. D'après le premier principe entre la sortie et l'entrée du compresseur,

$$\Delta h = w + 0$$

Comme le fluide est un gaz parfait, on a d'après la loi de Joule $\Delta h = c_P\,\Delta T$ d'où

$$w = \frac{\gamma r}{\gamma-1}(T_2 - T_0)\,,$$

et en reprenant la question précédente on obtient le résultat voulu,

$$\boxed{w = \frac{\gamma r}{\gamma-1}T_0\left(\beta^{(\gamma-1)/\gamma} - 1\right) = 412\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\,.}$$

3 Comme un échangeur ne contient pas de parties mobiles, le travail w' est la somme des travaux reçus dans les étages basse et haute pression.

$$w' = w_{\text{BP}} + 0 + w_{\text{HP}} = \frac{\gamma r}{\gamma-1}(T_1 - T_0) + \frac{\gamma r}{\gamma-1}(T_2' - T_0) \qquad \text{d'où} \qquad w' = \frac{\gamma r}{\gamma-1}(T_1 + T_2' - 2T_0)\,.$$

D'après la loi de Laplace appliqué aux isentropiques qui partent de la même température T_0,

$$T_1 = T_0\,\beta_1^{(\gamma-1)/\gamma} \qquad \text{et} \qquad T_2' = T_0\,\beta_2^{(\gamma-1)/\gamma}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{w' = \frac{\gamma r}{\gamma-1}T_0\left(\beta_1^{(\gamma-1)/\gamma} + \beta_2^{(\gamma-1)/\gamma} - 2\right)\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

4 Lorsque $P_1 = \sqrt{P_0 P_2}$,

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{P_0 P_2}}{P_0} = \sqrt{\frac{P_2}{P_0}} = 5 \qquad \text{et} \qquad \beta_2 = \frac{P_2}{\sqrt{P_0 P_2}} = \sqrt{\frac{P_2}{P_0}} = 5\,.$$

5 En repartant de la loi de Laplace,

$$\boxed{T_2' = T_1 = \beta^{(\gamma-1)/\gamma} T_0 = 432\,\text{K}\,.}$$

Cette température est donc nettement moins élevée (250 °C de différence !) que la température T_2 obtenue en sortie du compresseur mono-étagé.

6 On déduit de ce qui précède

$$\boxed{w' = \frac{2\gamma r}{\gamma - 1}(T_2' - T_0) = 319\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\,,}$$

ce qui représente un gain d'environ 25 % par rapport au compresseur mono-étagé. En plus de permettre des températures moins élevés, l'utilisation de compresseurs étagés est également plus économique.

> ***Culture industrielle :*** *Le choix d'un compresseur simple ou étagé relève bien sûr de la complexité de l'installation ... mais aussi du rôle dévolu au compresseur. Par exemple, dans une pompe à chaleur ou un réfrigérateur, le compresseur a pour rôle d'augmenter la température du fluide bien plus que d'augmenter sa pression. Ainsi, dans ces installations, remplacer un compresseur simple par un compresseur étagé est évidemment une mauvaise idée !*

Machines dithermes

Exercice 4 : Climatisation d'une voiture

1 | 1

▷ *Cycle frigorifique ;*
▷ *Exploitation d'un diagramme des frigoristes.*

1 Dans un condenseur le fluide frigorigène se liquéfie en cédant de l'énergie à son environnement, alors que dans un évporateur il se vaporise en prélevant de l'énergie à l'environnement. Or le but d'un climatiseur est de prélever de l'énergie à l'intérieur de l'habitacle, pour en céder à l'air extérieur. On en déduit que le condenseur doit se trouver à l'extérieur du véhicule, et l'évaporateur à l'intérieur.

2 La zone d'équilibre liquide-vapeur se trouve **sous la courbe de saturation**. Le domaine du liquide seul est **à gauche du diagramme**, le domaine de la vapeur seule **à sa droite**. Le fluide est modélisable par un gaz parfait dans le domaine gazeux du diagramme où les isenthalpes se confondent avec les isothermes, c'est-à-dire où les isothermes (en rouge) sont verticales. Il s'agit de la partie **en bas à droite du diagramme**, en ordre de grandeur limitée par $P \lesssim 0{,}8\,\text{bar}$ et $h \gtrsim 50\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

3 Le cycle complet est représenté sur le diagramme page 6 (reproduit du corrigé rédigé par P. Salles, professeur en ATS).

Point	T (°C)	P (bar)	h (kJ · kg^{-1})	s (J · K^{-1} · kg^{-1})	x
(1)	5	3	405	1,72	1
(2)	72	18	440	1,72	1
(3)	60	18	285	1,28	0
(4)	2	3	285	1,32	0,43

4 Cette écriture du premier principe suppose que les variations d'énergie mécanique massique du fluide sont nulles, ou du moins négligeables devant les variations d'enthalpie. Dans cette écriture,
- ▷ D_m est le débit massique de fluide au travers du système ouvert ;
- ▷ $\mathcal{P}_\text{w}$ est la puissance mécanique algébrique reçue par le fluide ;
- ▷ $\mathcal{P}_\text{q}$ est la puissance thermique algébrique reçue par le fluide ;

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

▷ h_s et h_e sont les enthalpies massiques respectivement en entrée et en sortie du système ouvert.

5 Appliquons le premier principe au compresseur. La compression étant adiabatique,

$$D_\mathrm{m}\,\Delta h = \mathcal{P}_\mathrm{m} + \cancel{\mathcal{P}_\mathrm{th,12}} \qquad \text{soit} \qquad \mathcal{P}_\mathrm{m} = D_\mathrm{m}\,(h_2 - h_1) = 3{,}5\,\mathrm{kW}\,.$$

On trouve $\mathcal{P}_\mathrm{m} > 0$, c'est-à-dire qu'il faut fournir du travail à un fluide pour le comprimer.

6 Appliquons le premier principe à l'évaporateur. S'agissant d'un échangeur, il ne compte aucune pièce mobile, d'où

$$D_\mathrm{m}\,\Delta h = \cancel{\mathcal{P}_\mathrm{m,41}} + \mathcal{P}_\mathrm{e} \qquad \text{soit} \qquad \mathcal{P}_\mathrm{e} = D_\mathrm{m}(h_1 - h_4) = 12\,\mathrm{kW}$$

L'air est bien refroidi car $\mathcal{P}_\mathrm{e} > 0$: la puissance thermique est reçue par le fluide frigorigène, donc extraite de l'air de la voiture.

7 La puissance utile d'un climatiseur est le transfert thermique échangé avec la source froide, soit ici $\mathcal{P}_\mathrm{e}$ au niveau de l'évaporateur. La puissance coûteuse est la puissance mécanique $\mathcal{P}_\mathrm{m}$ à apporter au niveau du compresseur. L'efficacité vaut donc

$$\boxed{e = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{e}}{\mathcal{P}_\mathrm{m}} = 3{,}4}$$

8 La température de liquéfaction à $P_2 = 18\,\mathrm{bar}$ est lue sur le diagramme environ égale à $T_3 = 60\,°\mathrm{C}$: c'est la valeur de l'isotherme (rouge) qui se confond avec l'isobare à P_2 dans la zone de coexistence liquide-vapeur. L'efficacité d'un climatiseur de Carnot fonctionnant entre la température T_4 de l'évaporateur et la température de liquéfaction T_3 serait

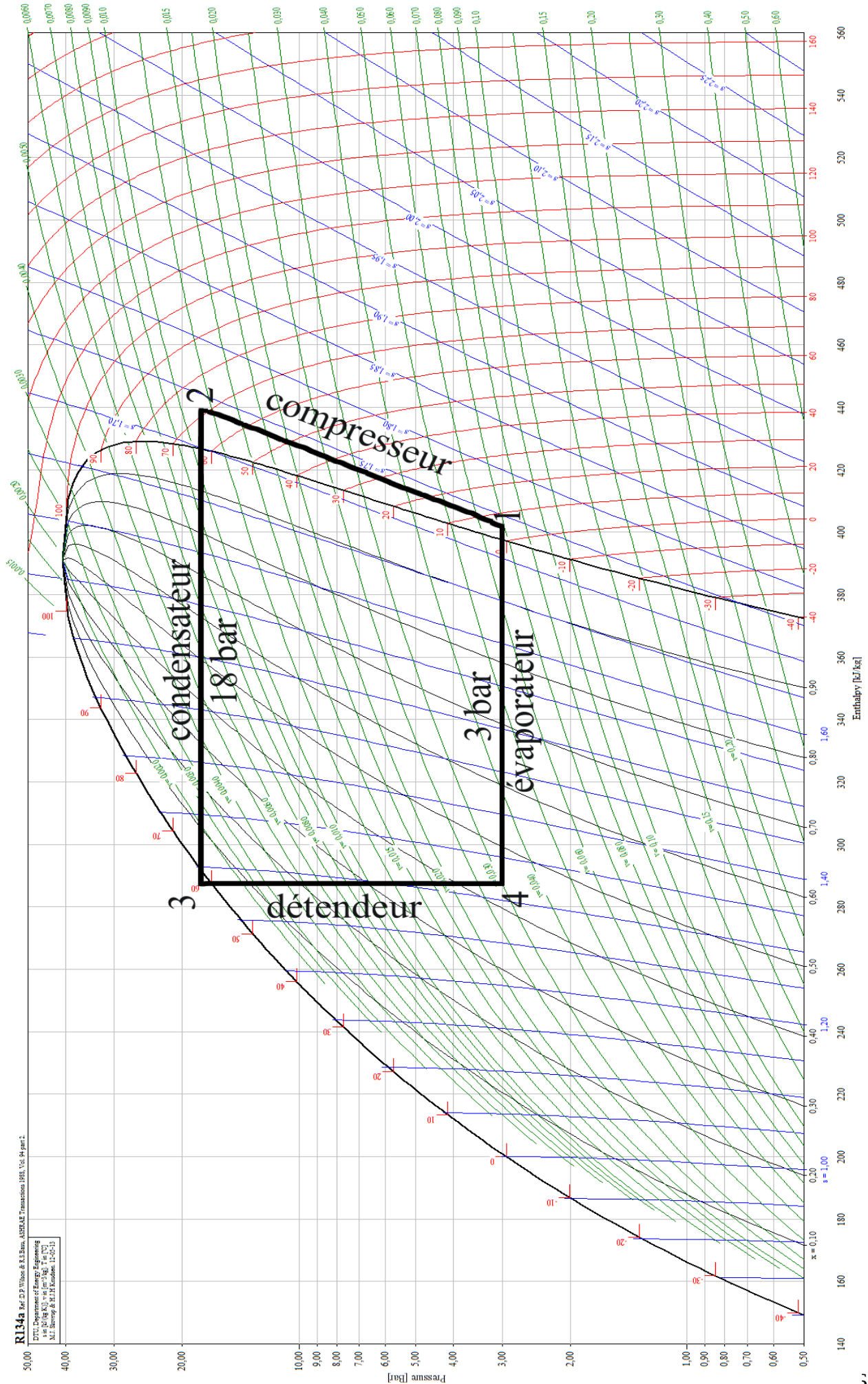
$$\boxed{e_\mathrm{Carnot} = \frac{T_4}{T_3 - T_4} = 4{,}6\,.}$$

L'efficacité de la machine réelle est comme attendu inférieure à l'efficacité de Carnot : la transformation au sein du détendeur est irréversible, de même que le refroidissement dans le condenseur précédant le changement d'était.

> *Le cycle étant très idéalisé, l'efficacité d'un climatiseur réel serait même encore inférieure à cette valeur.*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr



BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 5 : Cycle de Hirn d'une centrale thermique

2 | 1 |

▷ *Cycle moteur ;*
▷ *Exploitation d'un diagramme entropique.*

1 Le diagramme entropique est représenté figure 1.

▷ La transformation $1 \to 2$ est une adiabatique réversible, donc isentropique, donc une verticale dans le diagramme entropique ;
▷ La transformation $2 \to 3$ suit l'isobare $P = 10\,\text{bar}$;
▷ L'énoncé ne précise rien sur l'étape $3 \to 4$, mais on peut considérer que la seconde turbine vérifie les mêmes hypothèses que la première : il s'agit donc d'une détente adiabatique réversible ;
▷ La transformation $4 \to 5$ est par hypothèse isobare, donc isotherme car elle concerne un fluide diphasé ;
▷ La compression $5 \to 6$ est une adiabatique réversible jusqu'à atteindre 100 bar, mais dans le diagramme entropique les isobares du domaine liquide sont toutes regroupées sur la courbe d'ébullition, si bien que le passage par la pompe n'est pas visible sur le diagramme ;
▷ La transformation $6 \to 1$ suit l'isobare $P = 100\,\text{bar}$ en subissant successivement un échauffement de l'eau liquide le long de la courbe d'ébullition (en diagramme entropique, toutes les isobares du liquide pur collent à la courbe de saturation), puis un changement d'état, et enfin un échauffement de la vapeur sèche.

Le cycle est parcouru en sens horaire, ce qui est normal car on étudie une installation motrice.

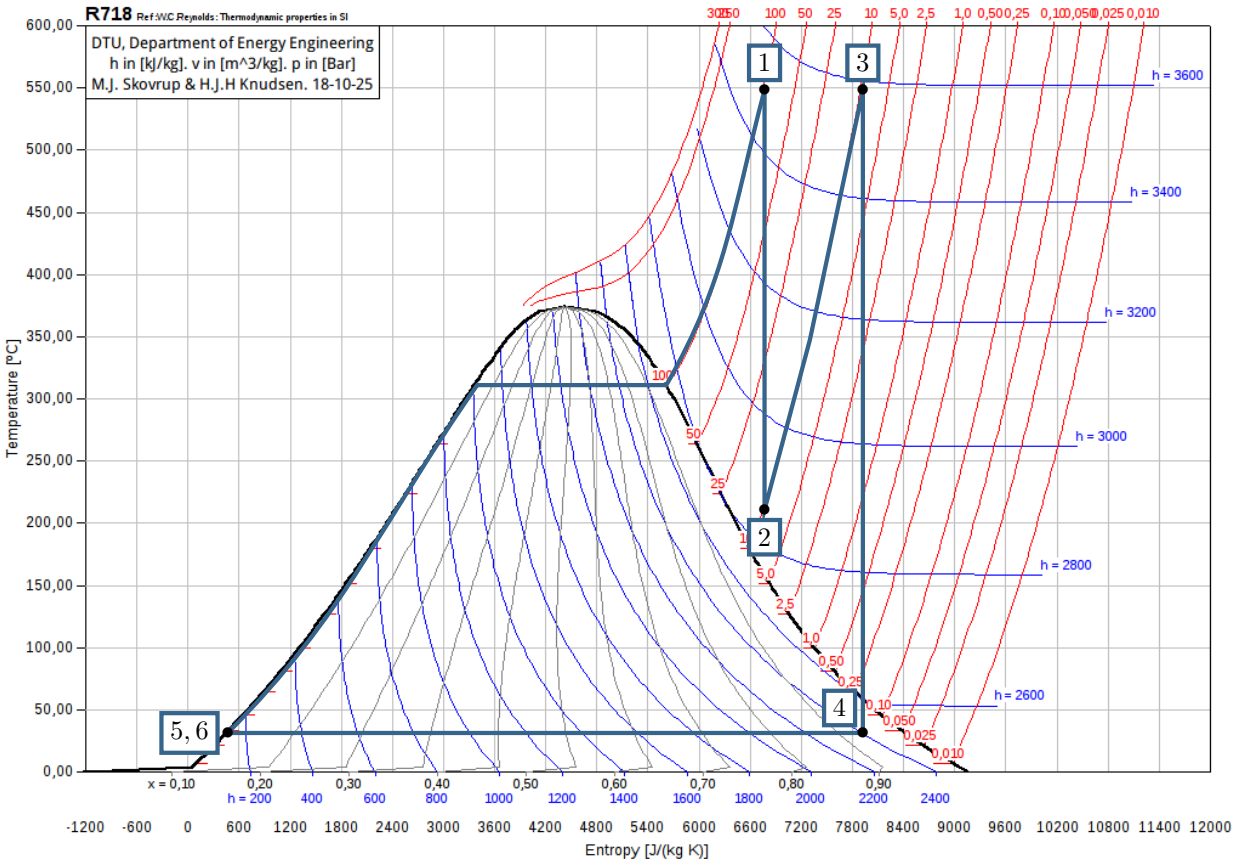


Figure 1 – Diagramme entropique complété.

2 On lit graphiquement $T_2 = 210\,°\text{C}$. Dans l'état 4 l'eau est diphasée, et le titre en vapeur vaut $x_4 = 0{,}93$.

3 Le diagramme manque d'isenthalpes pour permettre une lecture précise ... On peut approximativement considérer

$$h_1 = 3500\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1} \qquad h_2 = 2850\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1} \qquad h_3 = 3580\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$$

$$h_4 = 2400\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1} \qquad h_5 = h_6 = 100\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\,.$$

D'après le premier principe, avoir $h_5 = h_6$ signifie que le travail fourni par la pompe au liquide est négligeable devant les autres échanges énergétiques, ce qui s'interprète par le fait que comprimer un liquide incompressible est une opération relativement facile et donc peu coûteuse en énergie.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

4 Le travail total disponible sur les turbines est l'opposé du travail indiqué reçu par le fluide. D'après le premier principe, appliqué à la turbine haute pression,

$$\Delta h + \underbrace{\Delta e_\mathrm{c} + \Delta e_\mathrm{pp}}_{\ll \Delta h} = w_{12} + \underbrace{q_{12}}_{=0 \text{ adiab}}$$

soit

$$w_{12} = h_2 - h_1 \,.$$

De même pour la turbine basse pression,

$$w_{34} = h_4 - h_3$$

et finalement

$$w_\mathrm{tot} = -w_{12} - w_{34} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{w_\mathrm{tot} = (h_1 - h_2) + (h_3 - h_4) = 1830\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}\,.}$$

5 La puissance mécanique disponible sur la turbine s'écrit $\mathcal{P}_\mathrm{méca} = D_\mathrm{m} w_\mathrm{tot}$, et comme $\mathcal{P}_\mathrm{élec} = 0{,}9\,\mathcal{P}_\mathrm{méca}$ on en déduit

$$\boxed{D_\mathrm{m} = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{élec}}{0{,}9\,w} = 240\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}\,.}$$

6 Par application du premier principe au surchauffeur, qui ne contient aucune pièce mobile (c'est un échangeur),

$$\Delta h = \underbrace{w_{23}}_{=0} + q_{23} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{q_{23} = h_3 - h_2 = 730\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}\,.}$$

7 D'après le premier principe appliqué au générateur de vapeur, qui ne contient aucune pièce mobile (c'est également un échangeur),

$$\Delta h = \underbrace{w_{61}}_{=0} + q_{61} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{q_{61} = h_1 - h_6 = 3400\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}\,.}$$

En supposant que le transfert thermique dans le condenseur se fait avec le milieu extérieur et est donc gratuit, on en déduit le rendement de l'installation sous la forme

$$\boxed{\eta = \frac{w_\mathrm{tot}}{q_{23} + q_{61}} = 0{,}44\,.}$$

> *Attention à ne pas oublier dans le rendement le transfert thermique fourni par le surchauffeur ! En pratique, ou bien le fluide repasse dans les fumées d'échappement de la chaudière, ou bien de la vapeur est déviée avant ou pendant son passage dans la turbine haute pression (on parle de soutirage de vapeur) et elle joue le rôle de fluide chaud dans le surchauffeur, le fluide froid étant la vapeur détendue dans la turbine. On parle alors de soutirage.*

Exercice 6 : Cycle de Rankine d'une centrale nucléaire

2 | 2 |

- ▷ *Cycle moteur ;*
- ▷ *Exploitation d'une table thermodynamique ;*
- ▷ *Tracé qualitatif d'un diagramme des frigoristes.*

1 Voir figure 2.

> *L'étape 1-2 du cycle est assez peu crédible : normalement, les changements d'état doivent absolument être évités dans une turbine pour éviter une dégradation rapide des ailettes de la turbine sous l'impact des goutelettes d'eau formées (érosion).*

2 Par additivité de l'entropie, dans un système diphasé,

$$S = S_V + S_L \qquad \text{soit} \qquad ms = m_V\, s_V + m_L\, s_L \,.$$

En introduisant le titre massique en vapeur $x = m_V/m$ et la conservation de la masse $m = m_V + m_L$, il vient

$$ms = xm\, s_V + (1-x)m\, s_L \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{s = x\, s_V + (1-x) s_L \,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

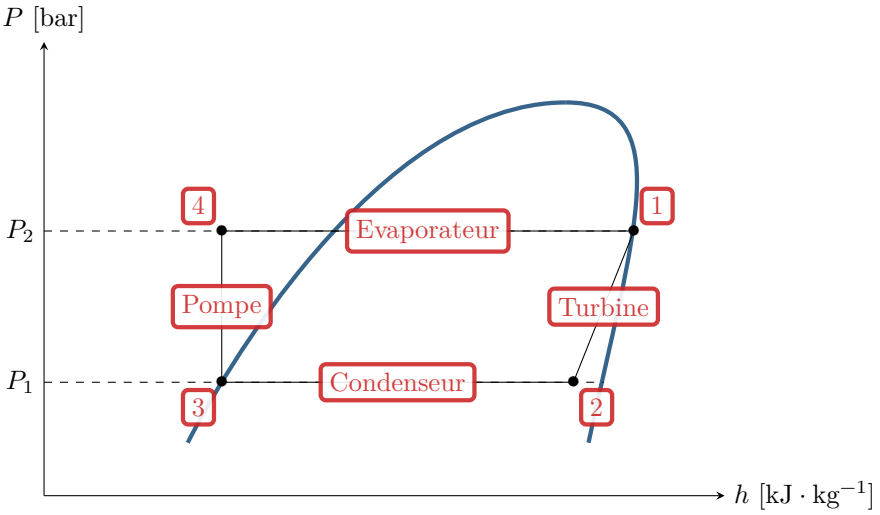


Figure 2 – Allure du cycle dans le diagramme des frigoristes.

3 La transformation $1 \to 2$ est adiabatique réversible, donc isentropique. Ainsi, $s_2 = s_1$ et on déduit du théorème des moments

$$\boxed{x_2 = \frac{s_2 - s_{L,2}}{s_{V,2} - s_{L,2}} = \frac{5,8162 - 0,4763}{8,3960 - 0,4763} \simeq 0,674\,.}$$

Le théorème des moments appliqué à l'enthalpie massique donne de façon analogue

$$\boxed{h_2 = x_2 h_{V,2} + (1 - x_2) h_{L,2} = x_2 \times 2561,6 + (1 - x_2) \times 137,8 \simeq 1772{,}2\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}}$$

La turbine étant calorifugée, le premier principe appliqué à a la transformation $1 \to 2$ donne

$$\boxed{w_{iT} = h_2 - h_1 = -1001{,}3\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}}\,.$$

4 D'après l'identité thermodynamique en enthalpie,

$$\mathrm{d}h = T\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}P\,.$$

Or la transformation $3 \mapsto 4$ est adiabatique réversible, donc $\mathrm{d}s = 0$ tout au long de cette transformation. De plus, elle concerne un liquide incompressible, donc $v = \text{cte}$. Par intégration entre les états 3 et 4, on obtient

$$h_4 - h_3 = v(P_4 - P_3)\,.$$

D'après le premier principe en supposant la pompe calorifugée, on en déduit

$$\boxed{w_{\mathrm{iP}} = v(P_4 - P_3) = 7\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}}$$

Cette valeur est négligeable devant le travail prélevé par la turbine.

5 Partant du mélange diphasique 2, l'état 3 est le liquide juste saturant correspondant. Ainsi,

$$\boxed{T_3 = T_2 = 306\,\mathrm{K} \qquad \text{et} \qquad x_3 = 0}$$

Un condenseur ne comporte pas de pièces mobiles, donc

$$\boxed{q_{\mathrm{eC}} = h_3 - h_2 = 137,8 - 1772,2 = -1634{,}4\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}}\,.$$

6 Un GV est un échangeur, sans pièce mobile, d'où

$$\boxed{q_{\mathrm{eGV}} = h_1 - h_4 = 2773,5 - 137,8 = 2635{,}7\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}}$$

7 En négligeant le travail fourni par la pompe, il vient

$$\boxed{\eta = \frac{w_{\mathrm{iT}}}{w_{\mathrm{iP}} + q_{\mathrm{eGV}}} \simeq \frac{w_{\mathrm{iT}}}{q_{\mathrm{eGV}}} = 0,38}$$

Le rendement de Carnot associé à un cycle ayant les mêmes températures « chaude et froide » donnerait

$$\eta_{\mathrm{Carnot}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0{,}453\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 7 : Cycle de Rankine d'une centrale à vapeur

oral banque PT | 2 | 2

▷ *Cycle moteur ;*
▷ *Exploitation d'une table thermodynamique ;*
▷ *Tracé qualitatif d'un diagramme de Mollier.*

1 La sortie du bouilleur correspond à un état de vapeur saturante : l'état 1 correspond donc au point D. La détente dans la turbine est adiabatique réversible, donc isentropique, donc verticale dans le diagramme de Mollier : l'état 2 correspond donc au point F. L'état 3 est un état de liquide saturant à même pression que 2, il s'agit donc du point A. Enfin, la compression est adiabatique réversible dans la pompe, donc verticale dans le diagramme de Mollier : l'état 4 correspond donc forcément au point B.

> *Le point C représente un état interne au bouilleur, le début de l'ébullition, alors que le point E correspondrait à l'état 2 si la détente était irréversible.*

Dans la limite du gaz parfait et du liquide incompressible, la loi de Joule indique que $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$: les isothermes sont donc confondues avec les isenthalpes, c'est-à-dire des horizontales sur le diagramme de Mollier. Par élimination, on en déduit que les isobares sont donc les courbes en pointillés les plus fins.

> *Comme dans tous les diagrammes, les isothermes et les isobares sont confondues dans le domaine diphasé, sous la courbe de saturation.*

2 La détente dans la turbine étant isentropique,

$$s_2 = s_1 = s_\mathrm{L}(p_1) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{s_2 = 5849\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}\,.}$$

Avec le théorème des moments, on en déduit

$$\boxed{x_2 = \frac{s_2 - s_\mathrm{L}(p_2)}{s_\mathrm{V}(p_2) - s_\mathrm{L}(p_2)} = 0{,}68\,.}$$

Enfin, on a

$$\boxed{h_2 = x_2\,h_\mathrm{V}(p_2) + (1-x_2)\,h_\mathrm{L}(p_2) = 1782\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}\,.}$$

3 Au cours de l'étape 3-4, l'eau est à l'état liquide et vérifie la loi de Joule

$$\Delta h = c\,\Delta T = 0$$

si l'on suppose que $\Delta T = 0$. Appliquons le premier principe industriel à la pompe, en supposant qu'il n'y a pas de variation d'énergie mécanique,

$$\underbrace{\cancel{\Delta h}}_{\text{isotherme}} = w_{34} + \underbrace{\cancel{q_{34}}}_{\text{adiab}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{w_{34} = 0\,.}$$

4 Calculons le travail cédé à la turbine, calorifugée, encore avec le premier principe en négligeant les variations d'énergie mécanique :

$$\Delta h = w_{12} + \cancel{q_{12}} \qquad \text{d'où} \qquad w_{12} = h_2 - h_1 = h_2 - h_\mathrm{V}(p_1) = -995\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}\,.$$

Calculons maintenant le transfert thermique reçu au bouilleur, sans travail :

$$\Delta h = \cancel{w_{41}} + q_{41} \qquad \text{d'où} \qquad q_{41} = h_1 - h_4 = h_\mathrm{V}(p_1) - h_\mathrm{L}(p_2) = 2640\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}\,.$$

On en déduit enfin le rendement,

$$\boxed{\eta = -\frac{w_{12}}{q_{41}} = 0{,}38}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 8 : Turboréacteur simple flux

inspiré écrit CCINP PC 2020 | 2 | 2 |

- ▷ *Étude d'un moteur ;*
- ▷ *Modèle du gaz parfait ;*
- ▷ *Tracé qualitatif d'un diagramme* (T, s).

1 Voir figure 3. Les transformations adiabatiques et réversibles sont isentropiques, donc verticales dans le diagramme (T, s) : c'est le cas des étapes AB, DE et EF. La transformation BC est adiabatique mais *irréversible* donc $s_C > s_B$, mais il est difficile de connaître précisémment l'allure de la transformation. Enfin, la transformation CD est une isobare, qui se représente par une branche d'exponentielle croissante.

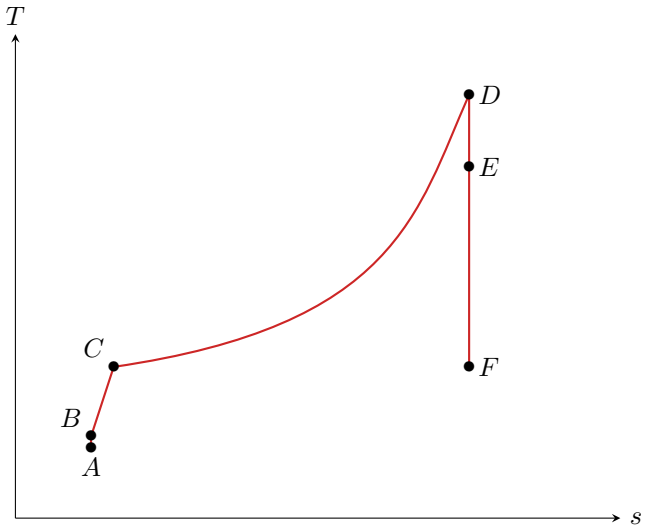


Figure 3 – Cycle thermodynamique suivi dans le turboréacteur.

2 Dans le référentiel lié au turboréacteur, le fluide entre dans le diffuseur avec une vitesse V. D'après le premier principe appliqué au diffuseur, supposé adiabatique et qui ne contient pas de pièce mobile, et en utilisant la loi de Joule,

$$\Delta h + \cancel{\Delta e_{\text{pp}}} + \frac{\Delta(v^2)}{2} = \cancel{w_{AB}} + \cancel{q_{AB}} \qquad \text{soit} \qquad c_p(T_B - T_A) + \frac{0 - V^2}{2} = 0$$

ce qui donne

$$\boxed{T_B = T_A + \frac{V^2}{2c_p} = 264\,\text{K} = -9\,^\circ\text{C}\,.}$$

La transformation étant adiabatique réversible, on a d'après la loi de Laplace

$$P_A^{1-\gamma} T_A^{\gamma} = P_B^{1-\gamma} T_B^{\gamma} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{P_B = P_A \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} = 55{,}6\,\text{kPa}\,.}$$

3 D'après le premier principe appliqué au compresseur supposé calorifugé,

$$\Delta h + \underbrace{\cancel{\Delta e_{\text{pp}} + \Delta e_{\text{c}}}}_{\ll \Delta h} = w_{\text{comp}} + \cancel{q_{BC}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{w_{\text{comp}} = c_p(T_C - T_B) = 263\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\,.}$$

4 Si la compression était isentropique, on aurait d'après la loi de Laplace

$$P_B^{1-\gamma} T_B^{\gamma} = P_C^{1-\gamma} T_C'^{\gamma} \qquad \text{soit} \qquad T_C' = T_B \left(\frac{P_B}{P_C}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = T_B \left(\frac{1}{10}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$$

d'où on conclut

$$\boxed{T_C' = 10^{(\gamma-1)/\gamma}\, T_B = 479\,\text{K} = 206\,^\circ\text{C}\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Le travail massique serait alors

$$\boxed{w'_{\text{comp}} = c_p(T'_C - T_B) = 237\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\,.}$$

On en déduit le rendement isentropique de compression,

$$\boxed{\eta_S = \frac{w'_{\text{comp}}}{w_{\text{comp}}} = 90\,\%\,.}$$

> *Vous devez savoir que le rendement isentropique d'un compresseur compare le travail à fournir en réalité et dans la limite isentropique. Pour retrouver les positions au numérateur et dénominateur, c'est simple : le rendement isentropique est nécessairement inférieur à 1. Le même raisonnement vaut pour le rendement d'une turbine.*

5 Appliquons le premier principe à la chambre de combustion, qui ne compte aucune pièce mobile,

$$D_{\text{m}}(\Delta h + \underbrace{\cancel{\Delta e_{\text{c}} + \Delta e_{\text{pp}}}}_{\ll \Delta h}) = \cancel{\mathcal{P}_{\text{i},CD}} + \mathcal{P}_{\text{ch}} \qquad \text{soit} \qquad D_{\text{m}} c_p(T_D - T_C) = \mathcal{P}_{\text{ch}}$$

d'où on déduit avec la loi de Joule

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{ch}} = D_{\text{m}} c_p(T_D - T_C) = 48\,\text{MW}\,.}$$

> *Cette puissance est très élevée ! À titre de comparaison, un réacteur nucléaire REP moyen ne délivre « que » 1300 MW ... ou autrement dit 25 avions de chasse peuvent remplacer un réacteur nucléaire ☺*

6 Par application du premier principe à la turbine, en supposant la détente adiabatique,

$$\Delta h + \underbrace{\cancel{\Delta e_{\text{pp}} + \Delta e_{\text{c}}}}_{\ll \Delta h} = w_{\text{turb}} + \cancel{q_{BC}} = -w_{\text{comp}}$$

d'où on déduit avec la loi de Joule

$$c_p(T_E - T_D) = -c_p(T_C - T_B) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T_E = T_D + T_B - T_C = 1233\,\text{K} = 960\,^\circ\text{C}\,.}$$

La détente dans la turbine étant adiabatique réversible, la loi de Laplace indique

$$P_D^{1-\gamma} T_D^{\gamma} = P_E^{1-\gamma} T_E^{\gamma} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_E = P_C \left(\frac{T_D}{T_E}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} = 280\,\text{kPa}\,.}$$

car $P_D = P_C$ puisque la chambre de combustion est isobare.

7 La détente dans la tuyère est adiabatique réversible, d'après la loi de Laplace,

$$P_E^{1-\gamma} T_E^{\gamma} = P_F^{1-\gamma} T_F{}^{\gamma} \qquad \text{soit} \qquad T_F = T_E \left(\frac{P_E}{P_F}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 716\,\text{K} = 443\,^\circ\text{C}$$

car en sortie de tuyère $P_F = P_A = 34{,}5\,\text{kPa}$.

> *Attention pour l'application numérique : la pression atmosphérique n'est pas égale à 1 bar à l'altitude de vol de l'avion !*

Appliquons le premier principe à la tuyère, en supposant négligeable la vitesse des gaz en entrée mais pas en sortie de tuyère. La détente y est supposée adiabatique et sans travail.

$$\Delta h + \Delta e_{\text{c}} + \cancel{\Delta e_{\text{pp}}} = \cancel{w_{EF}} + \cancel{q_{EF}} \qquad \text{soit} \qquad c_p(T_F - T_E) + \frac{v_{\text{e}}{}^2 - 0}{2} = 0$$

ce qui conduit à

$$\boxed{v_{\text{e}} = \sqrt{2c_p(T_E - T_F)} = 1{,}1\cdot 10^3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

> *On constate que la vitesse d'éjection est largement supérieure à la vitesse du son, ce qui peut paraître un peu étonnant : usuellement, pour un avion volant à vitesse subsonique, la vitesse d'éjection des*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

> *gaz est égale à la vitesse du son. Sans doute certaines approximations sont elles trop simplistes et conduisent à un résultat final douteux ?*

8 La vitesse relative de l'avion par rapport à l'air environnant est V, d'où on déduit la puissance mécanique fournie

$$\mathcal{P} = F \times V \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathcal{P} = D_\text{m}(v_\text{e} - V) = 9{,}8\,\text{MW}\,.}$$

On en déduit le rendement thermodynamique du réacteur,

$$\eta = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_\text{ch}} = 20\,\%\,.$$

Cette valeur du rendement est assez faible : pour un moteur à essence ou une centrale électrique, il est plutôt de l'ordre de 30 %.

Autres installations

Exercice 9 : Puits canadien

inspiré exemple officiel oral CCINP PSI | 2 | 2 |

▷ *Système ouvert mésoscopique ;*
▷ *Modèle du gaz parfait ;*
▷ *Analyse de résultats expérimentaux.*

1 La constante α s'exprime en $\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$. En dimensions fondamentales,

$$[\alpha] = M\,L^2\,T^{-3} \times \Theta^{-1} \times L^{-1} \qquad \text{soit} \qquad [\alpha] = M\,L\,\Theta^{-1}\,T^{-3}\,.$$

2 Appliquons le premier principe à un tronçon de tuyau de longueur $\text{d}x$. On néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle, et ce tuyau ne contient pas de pièce mobile, donc

$$D_\text{m}\,[h(x+\text{d}x) - h(x)] = \text{d}\Phi \qquad \text{soit} \qquad D_\text{m}\,\frac{\text{d}h}{\text{d}x}\,\text{d}x = \alpha\,\text{d}x\;[T_\text{sol} - T(x)]$$

En utilisant la loi de Joule et en simplifiant par $\text{d}x$, il vient

$$D_\text{m}\,c_P\,\frac{\text{d}T}{\text{d}x} + \alpha\,[T(x) - T_\text{sol}] = 0$$

et ainsi

$$\boxed{\frac{\text{d}T}{\text{d}x} + \frac{\alpha}{D_\text{m}\,c_P}T(x) = \frac{\alpha}{D_\text{m}\,c_P}T_\text{sol} = 0}$$

ce qui est bien la forme demandée avec $\ell_0 = D_\text{m}c_P/\alpha$.

3 Les solutions de cette équation s'écrivent

$$T(x) = T_\text{sol} + A\,\text{e}^{-x/\ell_0}\,.$$

À l'entrée du tuyau,

$$T(x{=}0) \underset{\text{CL}}{\overset{\uparrow}{=}} T_\text{ext} \underset{\text{sol}}{\overset{\uparrow}{=}} T_\text{sol} + A$$

d'où on conclut

$$\boxed{T(x) = T_\text{sol} + (T_\text{ext} - T_\text{sol})\,\text{e}^{-x/\ell_0}\,.}$$

Au maximum, l'air au sein du tuyau atteint la température T_sol. On comprend ainsi qu'un puits canadien est **intéressant en hiver** (l'air qui entre est plus chaud que l'air extérieur, ce qui permet de gagner en chauffage) **et en été** (l'air qui entre permet de rafraîchir l'intérieur, ce qui permet par exemple de se passer de climatisation). En revanche, il est **inutile voire gênant au printemps et en automne** (mieux vaut faire rentrer de l'air extérieur à 14 °C plutôt de l'air à 11 °C pour un gain en confort, voire en chauffage).

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

4 La question consiste à calculer la puissance reçue par l'air de la part du sol, qui est autant de puissance que le système de chauffage de la maison n'a pas à fournir. Cette puissance s'écrit

$$\Phi = \int_0^L \mathrm{d}\Phi = \int_0^L \alpha(T_{\mathrm{sol}} - T(x))\mathrm{d}x$$

D'après la question précédente,

$$\Phi = \alpha(T_{\mathrm{ext}} - T_{\mathrm{sol}}) \int_0^L \mathrm{e}^{-x/\ell_0}\,\mathrm{d}x = \alpha(T_{\mathrm{ext}} - T_{\mathrm{sol}}) \left[-\ell_0\,\mathrm{e}^{-x/\ell_0}\right]_0^L$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\Phi = \alpha(T_{\mathrm{ext}} - T_{\mathrm{sol}})\,\ell_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-L/\ell_0}\right) = D_{\mathrm{m}}\,c_P\,(T_{\mathrm{ext}} - T_{\mathrm{sol}}) \left(1 - \mathrm{e}^{-L/\ell_0}\right).}$$

> *Le résultat peut également s'obtenir en appliquant le premier principe industriel directement entre l'entrée ($x = 0$) et la sortie ($x = L$) de la conduite :*
>
> $$D_m(h_s - h_e) = D_m c_P\,[T(x{=}L) - T(x{=}0)] = \Phi + \cancel{P_m}$$
>
> *ce qui donne*
>
> $$\Phi = D_m c_P \left[T_{sol} + (T_{ext} - T_{sol})\,\mathrm{e}^{-L/\ell_0} - T_{ext}\right]$$
>
> *et on retrouve exactement la même expression après factorisation.*

5 Au bout d'une longueur L suffisamment élevée,

$$\Phi \simeq D_{\mathrm{m}}\,c_P\,(T_{\mathrm{ext}} - T_{\mathrm{sol}})\,.$$

La température extérieure étant uniforme, Φ ne dépend plus que de D_{m}, qui est directement proportionnel au débit volumique Q car l'écoulement d'air est incompressible.

La longueur caractéristique ℓ_0 peut par exemple se déterminer graphiquement en raisonnant sur l'intersection de la tangente à l'origine et de l'asymptote. En ordre de grandeur, on trouve $\ell_0 \simeq 20\,\mathrm{m}$.

Le réseau de courbe diffère par la longueur caractéristique d'augmentation de Φ, c'est-à-dire ℓ_0. Le diamètre intervient dans le coefficient α : l'échange est de type conducto-convectif, directement proportionnel à la surface d'échange, elle-même proportionnelle au carré du diamètre.

Exercice 10 : Échangeur à contre-courant

3 | 2

▷ *Système ouvert mésoscopique ;*
▷ *Échange conducto-convectif.*

1 La température la plus froide est forcément celle du fluide froid, et réciproquement pour la plus chaude. On en déduit que le fluide froid est représenté en bas et le chaud en haut. Dans l'échangeur, le fluide froid se réchauffe et le chaud se refroidit, d'où on déduit que le fluide froid s'écoule dans le sens des x décroissants et le chaud dans le sens des x croissants. Ces résultats sont récapitulés figure 4.

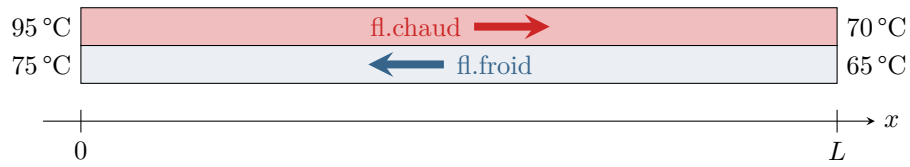


Figure 4 – Schéma des écoulements dans l'échangeur.

2 Pour que l'échange thermique ait lieu, il faut avoir $T_{\mathrm{C}}(x) > T_{\mathrm{F}}(x)$. Ainsi, en supposant les températures du fluide chaud inchangées, un échangeur à co-courant ne permettrait pas au fluide froid de dépasser les 70 °C, ce qui est possible ici car les gradients thermiques sont dans le même sens dans les deux fluides. Ainsi, l'échangeur à contre-courant permet de **fournir davantage d'énergie au fluide froid** qu'un échangeur à co-courant.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

3 Appliquons le premier principe industriel au fluide froid, qui reçoit la puissance thermique totale Φ. Les variations d'énergie mécanique sont nulles, et il n'y a pas de pièce mobile donc pas de travail échangé. Ainsi,

$$D_\mathrm{F}(h_\mathrm{F}(x=0) - h_\mathrm{F}(x=L)) = \Phi \qquad \text{d'où} \qquad \Phi = D_\mathrm{F} c\,(T_\mathrm{F}(x=0) - T_\mathrm{F}(x=L))$$

4 Appliquons le premier principe industriel à une tranche infinitésimale d'échangeur comprise entre x et $x+\mathrm{d}x$, et de largeur a. La surface de contact entre les deux fluides vaut donc $a\,\mathrm{d}x$. Le fluide chaud s'écoule dans le sens des x croissants, cède la puissance $\varphi(x)\,a\,\mathrm{d}x$, et le premier principe s'écrit donc

$$D_\mathrm{C}\,(h_\mathrm{C}(x+\mathrm{d}x) - h_\mathrm{C}(x)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{1er P}}}{=} -\varphi(x)\,a\,\mathrm{d}x = -h\,\Delta T(x)\,a\,\mathrm{d}x$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Joule}}}{=} D_\mathrm{C}\,c\,(T_\mathrm{C}(x+\mathrm{d}x) - T_\mathrm{C}(x)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{DL}}}{=} c\,D_\mathrm{C}\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{C}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

d'où on déduit l'équation voulue

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{C}}{\mathrm{d}x} = -\frac{ha}{c\,D_\mathrm{C}}\,\Delta T(x)\,.}$$

On procède de même pour le fluide froid, qui cette fois s'écoule dans le sens des x décroissants et reçoit la puissance $\varphi(x)\,a\,\mathrm{d}x$, ce qui conduit à

$$D_\mathrm{F}\,(h_\mathrm{F}(x) - h_\mathrm{F}(x+\mathrm{d}x)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{1er P}}}{=} +\varphi(x)\,a\,\mathrm{d}x = +h\,\Delta T(x)\,a\,\mathrm{d}x$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Joule}}}{=} D_\mathrm{F}\,c\,(T_\mathrm{F}(x) - T_\mathrm{F}(x+\mathrm{d}x)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{DL}}}{=} -c\,D_\mathrm{F}\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{F}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

d'où on déduit l'équation voulue

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{F}}{\mathrm{d}x} = -\frac{ha}{c\,D_\mathrm{F}}\,\Delta T(x)\,.}$$

> *La variation d'enthalpie dans le premier principe industriel s'écrit sous la forme $h_{sortie} - h_{entrée}$, ce qui permet de retrouver l'endroit auquel écrire x et $x+dx$ en fonction du sens d'écoulement. En revanche, les signes qui apparaissent devant le flux viennent de la convention d'algébrisation des échanges : il est* cédé *par le fluide chaud, d'où le signe $\ominus$, et* reçu *par le fluide froid, d'où le signe $\oplus$.*

5 Par soustraction des deux équations précédentes, il vient

$$\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{C}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}T_\mathrm{F}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\Delta T}{\mathrm{d}x} = -\frac{ha}{c}\left(\frac{1}{D_\mathrm{C}} - \frac{1}{D_\mathrm{F}}\right)\Delta T$$

ce l'on réécrit pour alléger les écritures sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\Delta T}{\mathrm{d}x} + \alpha\,\Delta T = 0 \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{ha}{c}\left(\frac{1}{D_\mathrm{C}} - \frac{1}{D_\mathrm{F}}\right).$$

Cette équation se résout directement en

$$\boxed{\Delta T(x) = \Delta T_0\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\,.} \qquad \text{avec} \qquad \Delta T_0 = T_\mathrm{C}(x=0) - T_\mathrm{F}(x=0)\,.$$

> *Remarquons que α peut s'annuler si les deux débits sont égaux, ce qui veut dire que la différence de température entre les deux fluides est indépendante de x ... mais attention à ne pas faire de confusion, cela n'est pas contradictoire avec le fait que le fluide froid se réchauffe. Avec les valeurs données dans l'énoncé, on constate que ΔT diminue lorsque x augmente, donc sa dérivée est négative, donc $\alpha > 0$ ce qui veut dire que $D_F > D_C$.*

6 On constate avec les valeurs données que l'on a

$$\Delta T(x=L) = \frac{1}{4}\Delta T_0 \qquad \text{donc} \qquad \Delta T_0\,\mathrm{e}^{-\alpha L} = \frac{1}{4}\Delta T_0 \qquad \text{soit} \qquad \alpha L = \ln 4\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

En reprenant l'expression de α, on en déduit

$$\frac{haL}{c}\left(\frac{1}{D_\mathrm{C}}-\frac{1}{D_\mathrm{F}}\right)=\ln 4 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{D_\mathrm{C}}=\frac{1}{D_\mathrm{F}}+\frac{c}{haL}\ln 4$$

et ainsi

$$\boxed{D_\mathrm{C}=\frac{D_\mathrm{F}}{1+\dfrac{c}{haL}D_\mathrm{F}\ln 4}\,.}$$

> *On vérifie bien que $D_C < D_F$ comme prévu par l'analyse précédente. On peut également remarquer qu'il n'y a pas de proportionnalité entre les débits, contrairement au cas d'un échangeur à co-courant.*

Exercice 11 : Chauffe-eau solaire

3 | 2

▷ *Autre cycle thermodynamique ;*
▷ *Transitoire thermique ;*
▷ *Modèle du liquide indilatable et incompressible.*

Dans tout l'exercice, on néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle de l'eau devant ses variations d'enthalpie.

1 Appliquons le premier principe entre l'entrée et la sortie du panneau solaire. Celui-ci ne contient pas de pièce mobile, donc

$$D(h_1-h_4)=\mathcal{P}_\mathrm{th} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{P}_\mathrm{th}=Dc(T_1-T_4)=2{,}3\,\mathrm{kW}\,,}$$

d'après la loi de Joule. La puissance totale reçue par les panneaux solaires est de $6\times 600=3{,}6\,\mathrm{kW}$, ce qui donne un rendement de 64 %.

2 La chute de température observée entre les points 1 et 2 puis entre les points 3 et 4 est directement imputable à ces pertes. Par application du premier principe entre ces points (pompe exclue), où le fluide ne reçoit aucun travail, on en déduit

$$\mathcal{P}_\mathrm{fuite}=|Dc(T_2-T_1)+Dc(T_4-T_3)|=780\,\mathrm{W}\,,$$

ce qui représente presque un tiers de la puissance thermique captée par le fluide ! Pour les limiter, il faut entourer les conduites par un isolant thermique.

3 Appliquons le premier principe au fluide caloporteur entre l'entrée et la sortie du ballon (système ouvert), en notant $\mathcal{P}_0$ la puissance thermique cédée par le fluide au ballon :

$$D(h_3-h_2)=-\mathcal{P}_0 \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{P}_0=Dc(T_2-T(t))$$

car lors de la phase de chauffe $T_3=T(t)$.

Procédons maintenant à un bilan d'enthalpie pour l'eau contenue dans le ballon (système **fermé**) au cours d'une transformation infinitésimale de durée $\mathrm{d}t$. Les pertes thermiques étant négligées, elle ne reçoit que la puissance thermique $\mathcal{P}_0$. Ainsi,

$$\mathrm{d}H \underset{\text{1er P}}{\overset{\uparrow}{=}} \mathcal{P}_0\mathrm{d}t \underset{\text{Joule}}{\overset{\uparrow}{=}} \rho' V\,c'\,\mathrm{d}T$$

On en déduit

$$\rho'\,V\,c'\,\mathrm{d}T=Dc(T_2-T(t))\,\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \rho'\,V\,c'\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+Dc\,T=Dc\,T_2$$

ce qui s'écrit sous la forme

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}T=\frac{1}{\tau}T_2 \qquad \text{avec} \qquad \tau=\frac{\rho'\,V\,c'}{Dc}=4{,}3\cdot 10^3\,\mathrm{s}\simeq 1\mathrm{h}12.}$$

4 La température dans le ballon évolue donc au cours du temps selon

$$T(t)=T_2+A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad A=\text{cte}\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

À l'instant initial,

$$T(t=0) \underset{\text{CI}}{=} T_\text{i} \underset{\text{expr}}{=} T_2 + A \qquad \text{donc} \qquad A = T_\text{i} - T_2$$

et ainsi

$$T(t) = T_2 + (T_\text{i} - T_2)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

Cherchons maintenant l'instant t_0 auquel la température du ballon atteint sa valeur de consigne,

$$T(t=t_0) = T_\text{b} \qquad \text{soit} \qquad T_2 + (T_\text{i} - T_2)\,\mathrm{e}^{-t_0/\tau} = T_\text{b} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{e}^{-t_0/\tau} = \frac{T_\text{b} - T_2}{T_\text{i} - T_2}$$

d'où on déduit

$$\boxed{t_0 = \tau \ln \frac{T_\text{i} - T_2}{T_\text{b} - T_2} = 4{,}6 \cdot 10^3\,\text{s} \simeq 1\text{h}18\,.}$$

5 La question est plus subtile ! Désormais, il faut considérer le ballon comme un système ouvert. Pour la valeur maximale du débit d'eau chaude D'_max, la pompe fonctionne en continu avec le débit D. On applique donc le premier principe entre l'entrée et la sortie du ballon, sachant que l'eau y reçoit en continu la puissance $\mathcal{P}_0 = Dc(T_2 - T_3)$ en régime permanent. Ainsi,

$$D'_\text{max} c'(T_\text{ch} - T_\text{fr}) = Dc(T_2 - T_3) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{D'_\text{max} = \frac{D\,c(T_2 - T_3)}{c'(T_\text{ch} - T_\text{fr})} = 26\,\text{kg}\cdot\text{h}^{-1}\,,}$$

ce qui correspond à un débit de 440 litres par minute, largement suffisant pour prendre sa douche tranquillement.

> *Le système constitué du ballon et de la conduite de fluide caloporteur se comporte en fait en fait en échangeur double flux. L'application du premier principe à ce système donne directement le résultat ci-dessus.*

6 Un chauffe-eau solaire est évidemment très dépendant de la météo ! Il est inefficace les jours gris et pluvieux, d'où la nécessité d'une résistance chauffante, utile également en cas de grosse consommation. Il peut également conduire à une surchauffe les jours trop ensoleillés lorsque l'eau chaude n'est pas suffisamment utilisée, d'où le circuit de refroidissement. Les soupapes de sécurité permettent d'éviter les surpressions dues à la dilatation thermique de l'eau glycolée, voire à sa vaporisation en cas de surchauffe excessive.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr