



# Conduction électrique

## Plan du cours

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Densité volumique de courant électrique</b>                | <b>2</b>  |
| I.A        | Charges libres et charges liées . . . . .                     | 2         |
| I.B        | Intensité. . . . .  | 3         |
| I.C        | Lien au mouvement d'ensemble des porteurs de charge . . . . . | 4         |
| <b>II</b>  | <b>Conservation de la charge</b>                              | <b>5</b>  |
| II.A       | Démonstration par un bilan mésoscopique . . . . .             | 5         |
| II.B       | Démonstration par les équations de Maxwell. . . . .           | 7         |
| II.C       | Conséquence en régime stationnaire : loi des nœuds. . . . .   | 8         |
| <b>III</b> | <b>Loi d'Ohm</b>  | <b>9</b>  |
| III.A      | Modèle de Drude de la conduction dans un métal. . . . .       | 9         |
| III.B      | Loi d'Ohm locale. . . . .                                     | 10        |
| III.C      | Loi d'Ohm intégrale . . . . .                                 | 11        |
| <b>IV</b>  | <b>Effet Joule à l'échelle mésoscopique</b>                   | <b>12</b> |
| IV.A       | Force de Lorentz à l'échelle mésoscopique. . . . .            | 12        |
| IV.B       | Densité volumique de puissance Joule. . . . .                 | 13        |

## Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 2 « Magnétostatique ».

| Notions et contenus   | Capacités exigibles   |
|---|---|
| Vecteur densité de courant volumique. Intensité du courant. Distributions de courant volumiques et linéiques. | Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant volumique. |

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 3 « Équations de Maxwell ».

| Notions et contenus  | Capacités exigibles  |
|--|--|
| Principe de la conservation de la charge : formulation locale. | Établir l'équation locale de la conservation de la charge par un bilan dans le cas à une dimension.<br><br>Citer l'équation locale de la conservation de la charge à l'aide de l'opérateur divergence. |
| Équations de Maxwell.  | Déduire l'équation locale de la conservation de la charge.   |

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 4 « Énergie du champ électromagnétique ».

Aucun modèle relatif à la loi d'Ohm locale n'est exigible. L'accent est mis sur les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique.

| Notions et contenus  | Capacités exigibles   |
|--|---|
| Densité volumique de force électromagnétique. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge. | Établir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge. |
| Loi d'Ohm locale. Densité volumique de puissance Joule.  | Analyser les échanges énergétiques dans le cas particulier d'un milieu ohmique.   |

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

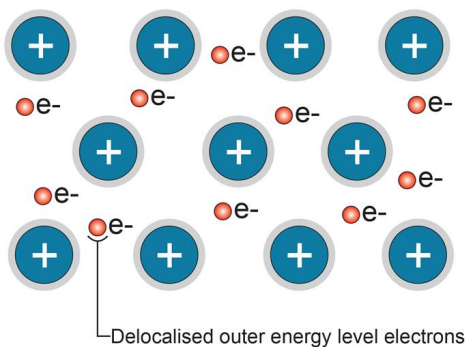
## Ces cinq dernières années au concours

- ▷ Écrit : jamais ces cinq dernières années.
- ▷ Oral : de temps en temps.

Les charges à l'origine du champ électrostatique étaient (implicitement) supposées immobiles ... mais ce n'est pas toujours le cas. Nous allons étudier dans ce chapitre les situations où les charges électriques ont un mouvement cohérent à l'échelle mésoscopique, au delà de la simple agitation thermique : le courant électrique.

## I - Densité volumique de courant électrique

### I.A - Charges libres et charges liées



Dans un cristal métallique, les nœuds du réseau sont occupés par des cations issus des atomes du métal qui ont libéré un ou quelques uns de leurs électrons de valence de telle sorte que le cation ait une structure électronique stable (p.ex. 1 pour le cuivre, 2 pour le zinc). Ces électrons libérés ne sont plus attachés à un atome en propre et peuvent se déplacer librement au sein du cristal : ils sont dits délocalisés. On comprend naturellement que ces électrons libres, appelés **électrons de conduction**, jouent un rôle très différent dans le transport du courant électrique de celui des électrons de cœur, qui demeurent fortement liés au noyau des cations.

**Quantitativement** : le réseau cristallin est caractérisé par une échelle microscopique  $a \sim 0,1 \text{ nm}$  (pas du réseau), de l'ordre de la taille d'un atome.

Un porteur de charge au sein d'un matériau est dit **libre** s'il peut se déplacer sur une distance  $\ell^* \gg a$  appelée **libre parcours moyen**.

Au contraire, il est dit **lié** si son mouvement est limité à des distances inférieures ou de l'ordre de  $a$ .

**Remarque** : il existe des milieux dans lesquels tous les porteurs de charge sont libres (solution électrolytique, plasma, etc.) ... et d'autres dans lesquels tous les porteurs de charge sont liés : ce sont les isolants électriques.

Le courant électrique correspond à un mouvement d'ensemble ordonné des porteurs de charge libres.

## I.B - Intensité

Considérons un fil conducteur de section orientée  $\mathcal{S}$ . L'intensité  $i$  parcourant le fil est définie par

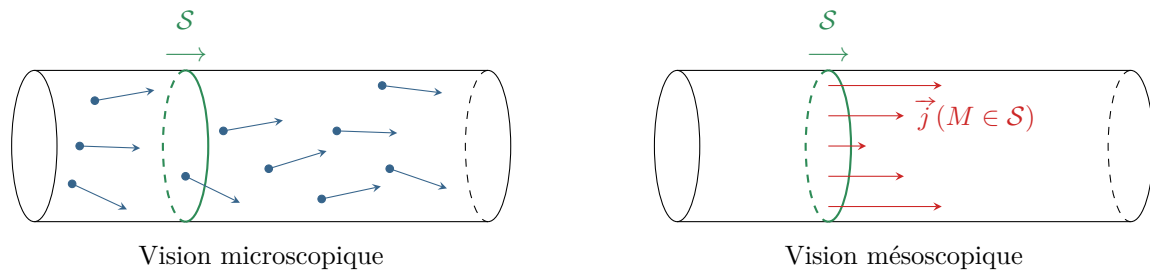
$$i = \frac{\delta q}{dt}$$

où  $\delta q$  est la charge nette qui traverse  $\mathcal{S}$  pendant  $dt$ . L'intensité est une grandeur algébrique, dont le signe dépend du sens conventionnel d'orientation de  $\mathcal{S}$ . Sa définition évoque clairement celle d'un flux, comme peut l'être le débit massique ou volumique en mécanique des fluides.

Par définition, l'intensité du courant électrique au travers d'une surface  $\mathcal{S}$  est égale au flux du vecteur **densité volumique de courant électrique** au travers de cette surface,

$$i = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

La densité volumique de courant s'exprime en  $A \cdot m^{-2}$ .



### Application 1 : Conducteur parcouru par un courant non uniforme

Considérons un fil conducteur cylindrique de rayon  $R$  parcouru par un courant permanent d'intensité  $I$  et de densité  $\vec{j} = \alpha r^2 \vec{e}_z$ . Déterminer l'expression de  $\alpha$  en fonction de  $I$  et  $R$ .

Calcul de flux au travers d'une section du conducteur, de normale  $\vec{e}_z$ ,

$$\begin{aligned} I &= \iint (\alpha r^2 \vec{e}_z) \cdot (r dr d\theta \vec{e}_z) \\ &= \alpha \times \int_0^R r^3 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \alpha \times \frac{R^4}{4} \times 2\pi \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{2I}{\pi R^4}.$$

Espace 1

**Cas limite :** Si le diamètre du fil est négligeable devant sa longueur, la notion de densité volumique de courant perd de son intérêt : la seule grandeur pertinente est l'intensité. On parle alors de **distribution filiforme**.

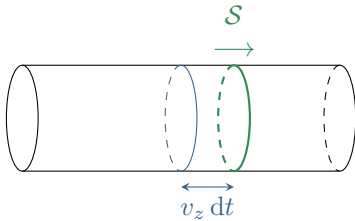
⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** La validité du modèle filiforme dépend de la distribution elle-même mais aussi du point d'observation :

- ▷ le diamètre du fil doit être très inférieur à sa longueur totale ;
- ▷ la distance d'observation doit être très supérieure au diamètre du fil.

## I.C - Lien au mouvement d'ensemble des porteurs de charge

### • Démonstration à une dimension

Pour simplifier, raisonnons dans un cas parfaitement unidimensionnel ( $\vec{j} = j_z \vec{e}_z$  uniforme sur une section du fil) et supposons que le conducteur ne possède qu'un seul type de porteurs libres, de charge  $q$  et de **densité volumique**  $n$  (nombre de porteurs de charge par unité de volume). On raisonne en moyenne : tous les porteurs de charge sont supposés se déplacer à la même vitesse  $\vec{v} = v_z \vec{e}_z$ , qui est donc une vitesse moyenne appelée **vitesse d'ensemble** ou **vitesse de dérive**.



Entre  $t$  et  $t + dt$ , les porteurs avancent de  $v_z dt$ . Ainsi, les porteurs qui traversent  $S$  entre  $t$  et  $t + dt$  se trouvent initialement tous dans un petit cylindre de section  $S$  et de longueur  $v_z dt$ .

On compte donc  $n S v_z dt$  porteurs qui sont traverser pendant  $dt$ , ce qui fait une charge  $\delta q = n q S v_z dt$ .

Par identification des deux définitions de l'intensité,

$$i = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{micro}}}{n q v_z} S = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{més}}}{j_z} S \quad \text{d'où} \quad j_z = n q v_z.$$

Espace 2

### • Généralisation

Dans le cas où il n'y a qu'un seul type de porteurs libres de se déplacer dans le conducteur,

$$\vec{j} = n q \vec{v} = \rho_{\text{libre}} \vec{v}$$

avec  $q$  la charge de ces porteurs,  $n$  leur densité volumique, et  $\vec{v}$  leur vitesse d'ensemble.

Si des porteurs de plusieurs types participent au courant électrique, leurs contributions se somment :

$$\vec{j} = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k = \sum_k \rho_k \vec{v}_k.$$

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** Les densités de charge qui interviennent sont celles des porteurs *libres* uniquement.

- **Ordre de grandeur**

### Application 2 : Vitesse d'ensemble des électrons dans le cuivre

Calculer la vitesse d'ensemble des électrons dans un fil de cuivre de section  $1 \text{ mm}^2$  parcouru par un courant de  $1 \text{ A}$ . La densité volumique d'électrons libres dans le cuivre est de l'ordre de  $10^{29} \text{ m}^{-3}$ .

$$\|\vec{j}\| = nev = \frac{I}{S} \text{ d'où } v = \frac{I}{neS}$$

$$\text{Numériquement } v = \frac{1}{10^{29} \times 10^{-19} \times 10^{-6}} \simeq 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$$

Espace 3

↪ si les circuits électriques répondent « instantanément » aux variations de la tension imposée par le générateur, ce n'est pas grâce au déplacement des électrons de conduction !



transport d'information par des OEM à la célérité  $c$ , qui met en mouvement les électrons tous en même temps, exactement comme les wagons d'un train.

Espace 4

## II - Conservation de la charge

La conservation de la charge électrique est l'un des postulats les plus fondamentaux de la physique.



La charge électrique ne peut être ni créée, ni détruite, mais seulement déplacée d'un point à un autre.

↪ ce postulat impose une relation entre la densité de courant  $\vec{j}$  (= déplacement des charges) et la densité de charge  $\rho$  (= stockage des charges) : l'équation de conservation de la charge, qui est une équation reliant les dérivées de  $\vec{j}$  et celles de  $\rho$ .

### II.A - Démonstration par un bilan mésoscopique

- **Démonstration à une dimension**

Pour simplifier, considérons le cas d'un conducteur cylindrique de section  $S$ , d'axe  $(Oz)$ , avec  $\vec{j} = j_z \vec{e}_z$  uniforme sur toute section, voir figure 1. Comme on cherche à établir une relation sur les dérivées spatiales et temporelles,

▷ on raisonne sur un système (volume de contrôle) mésoscopique : une tranche de cylindre comprise entre  $z$  et  $z + dz$  ;

▷ on raisonne sur une durée infinitésimale : le décompte des charges est réalisé entre  $t$  et  $t + dt$ .

La charge stockée dans le volume de contrôle mésoscopique à l'instant  $t$  est notée  $dQ(t)$ .

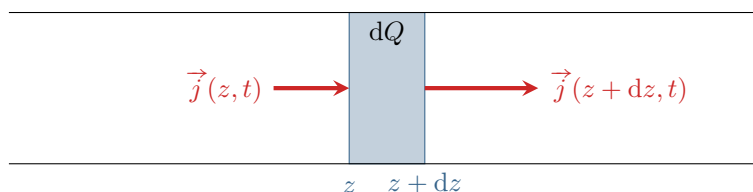


Figure 1 – Bilan de charge à une dimension.



**Qualitativement** : le postulat de conservation de la charge se traduit par la relation

$$\begin{array}{l} \text{charge stockée} \\ \text{à l'instant } t + dt \end{array} = \begin{array}{l} \text{charge stockée} \\ \text{à l'instant } t \end{array} + \begin{array}{l} \text{charge entrée} \\ \text{entre } t \text{ et } t + dt \end{array} - \begin{array}{l} \text{charge sortie} \\ \text{entre } t \text{ et } t + dt \end{array}$$

**Charge stockée :**

▷ à l'instant  $t$  :  $dQ(t) = \rho(z, t) d\tau = \rho(z, t) S dz$

Espace 5

▷ à l'instant  $t + dt$  :  $dQ(t + dt) = \rho(z, t + dt) S dz$

Espace 6

**Remarque** : pourquoi  $\rho(z, t)$  et pas  $\rho(z + dz/2, t)$  ?

Comme on ne travaille qu'au premier ordre en  $dz$ , c'est en fait équivalent pour exprimer la charge stockée  $dQ$  : en effet,

$$\rho\left(z + \frac{dz}{2}, t\right) \simeq \rho(z, t) + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} \quad \text{donc} \quad \rho\left(z + \frac{dz}{2}, t\right) S dz = \rho(z, t) S dz + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial z} S \frac{dz^2}{2}}_{\text{second ordre}}.$$

**Charge échangée :**

▷ charge entrée entre  $t$  et  $t + dt$  : par la face située en  $z$  :  $\delta q_e = i(z, t) dt = j_z(z, t) S dt$

Espace 7

▷ charge sortie entre  $t$  et  $t + dt$  : par la face située en  $z + dz$  :  $\delta q_s = i(z + dz, t) dt = j_z(z + dz, t) S dt$

Espace 8

**Conclusion :**

$$\begin{aligned} dQ(t + dt) &= dQ(t) + \delta q_e - \delta q_s \\ \rho(z, t + dt) S dz &= \rho(z, t) S dz + j_z(z, t) S dt - j_z(z + dz, t) S dt \\ \rho(z, t) S dz + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt S dz &= \rho(z, t) S dz + j_z(z, t) S dt - j_z(z, t) S dt - \frac{\partial j_z}{\partial z} dz S dt \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} dt S dz &= -\frac{\partial j_z}{\partial z} dz S dt \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial j_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Espace 9

Dans un système unidimensionnel, la conservation de la charge se traduit localement par

$$\frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

• **Généralisation**

À trois dimensions, la conservation de la charge se traduit localement par

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

► **Pour approfondir** : L'équation de conservation de la charge peut également s'établir par un bilan directement tridimensionnel. Considérons un volume de contrôle macroscopique  $\mathcal{V}$ , délimité par une surface  $\mathcal{S}$  orientée vers l'extérieur. Ce volume contient une charge

$$Q(t) = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \rho(M, t) d\tau.$$

La charge  $\delta q_s$  sortant du volume de contrôle pendant  $dt$  s'écrit

$$\delta q_s = i_s dt = \oint_{M \in \mathcal{S}} \vec{j}(M, t) \cdot \vec{dS} dt,$$

et d'après le théorème de Green-Ostrogradski,

$$\delta q_s = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{j} d\tau dt.$$

Le terme  $\delta q_s$  tenant compte de *toutes* les charges échangées au travers de *toute* la surface  $\mathcal{S}$  délimitant le volume de contrôle, il n'y a pas lieu de considérer un terme de charge entrante (alors que  $\delta q_s$  et  $\delta q_e$  sont échangées et comptabilisées à des endroits différents et sans redondance dans la démonstration précédente). Le bilan de charge s'écrit donc

$$Q(t + dt) = Q(t) - \delta q_s \quad \text{soit} \quad \frac{dQ}{dt} dt + \delta q_s = 0.$$

Comme le volume de contrôle est immobile, il est possible de permuter la dérivée et l'intégrale, ce qui donne

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau,$$

avec une dérivée partielle car  $\rho$ , contrairement à  $Q$ , peut dépendre du temps mais aussi du point  $M$  considéré. Par conséquent,

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau dt + \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{j} d\tau dt = 0 \quad \text{soit} \quad \iiint_{\mathcal{V}} \left( \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0.$$

L'intégrale étant nulle quelle que soit le volume de contrôle  $\mathcal{V}$  utilisé (aucune hypothèse n'a été faite à ce sujet), c'est que c'est l'intégrande elle-même qui est nulle. On en déduit l'équation de conservation de la charge tridimensionnelle,

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

## II.B - Démonstration par les équations de Maxwell

Compte tenu du statut des équations de Maxwell comme équations fondamentales de l'électromagnétisme, on peut légitimement se poser la question de savoir si la conservation de la charge est une hypothèse supplémentaire.

### • Équation de Maxwell-Ampère

#### Équation de Maxwell-Ampère :

En tout point  $M$  et à tout instant,  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

où  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  est la perméabilité magnétique du vide.

Le terme  $\vec{j}_D = \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  est appelé **courant de déplacement**.

#### Contenu physique :

- ▷ un champ magnétique peut être généré par un courant variable ou permanent et par un champ électrique variable ;
- ▷ en régime variable, il existe un couplage entre le champ magnétique et le champ électrique, mais ce couplage disparaît en régime stationnaire.

### • Démonstration de l'équation de conservation de la charge

Deux résultats mathématiques utiles :

- ▷ pour tout champ vectoriel  $\vec{A}$  on a  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0$ , ce qui se retrouve avec  $\vec{\nabla} : \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$  grâce aux propriétés du produit mixte ;
- ▷ **théorème de Schwartz** : comme les variables de temps et d'espace sont des variables indépendantes, alors les dérivées spatiales et temporelles peuvent être permutées.

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) &= \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{E}) &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

Espace 10



La conservation de la charge est incluse dans les équations de Maxwell.

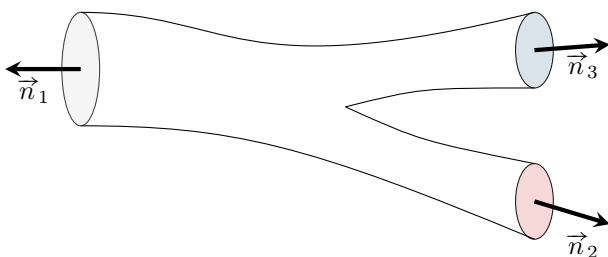
**Remarque historique :** Ce n'est pas du tout un hasard ! C'est justement la contribution décisive de Maxwell : il a compris qu'à l'équation d'Ampère déjà connue il fallait ajouter un terme supplémentaire, le courant de déplacement, pour rendre la théorie électromagnétique compatible avec la conservation de la charge. C'est un pas essentiel car c'est ce terme de courant de déplacement qui va conduire à la découverte des ondes électromagnétiques.

## II.C - Conséquence en régime stationnaire : loi des nœuds

En régime stationnaire ou quasi-stationnaire (cf. cours suivant), l'équation de conservation de la charge devient simplement

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad \xleftrightarrow{\text{Green-Ostrogradski}} \quad \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

↪ le vecteur densité volumique de courant est à flux conservatif



Appliquons ce résultat à une portion de tube de courant, c'est-à-dire un volume de contrôle délimité par des lignes de courant de  $\vec{j}$  et des sections droites. La figure ci-contre représente un tube avec un embranchement, par exemple une jonction de fils électriques.

$$\iint_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \underbrace{\iint_{\text{lat}} \vec{j} \cdot d\vec{S}}_{\vec{j} \perp d\vec{S}} = 0 \quad \text{soit} \quad I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Espace 11

↪ on retrouve la **loi des nœuds** : la somme des intensités algébriques sortant d'un nœud est nulle, il n'y a pas d'accumulation de charge en un point du circuit.

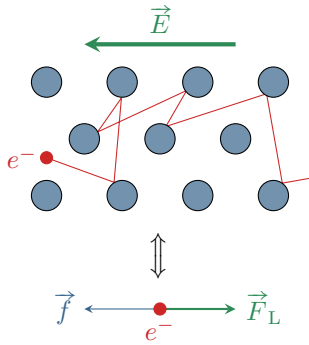


### III - Loi d'Ohm

La loi d'Ohm que vous connaissez de longue date relie l'intensité traversant une résistance à la tension à ses bornes. En toute logique, la loi d'Ohm formulée en électromagnétisme reliera la densité de courant  $\vec{j}$  au champ électrique  $\vec{E}$ .

#### III.A - Modèle de Drude de la conduction dans un métal

Ce modèle de la conduction électrique a été proposé par Paul Drude en 1900, seulement trois ans après la découverte de l'électron par Joseph Thomson. Il s'agit d'un modèle purement classique, la mécanique quantique n'étant pas encore connue à l'époque.



Ce modèle consiste en première approche à raisonner sur un électron (masse  $m_e$ , charge  $-e$ ) supposé modéliser le comportement moyen de tous les électrons de conduction du métal. Au cours de son déplacement dans le métal, l'électron subit des interactions (collisions, forces de Coulomb, etc.) avec les cations du réseau cristallin qui vont freiner l'électron au cours de son mouvement. Ces interactions entre l'électron et le réseau sont modélisées par une simple force de frottement proportionnelle à la vitesse de l'électron,

$$\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v},$$

où le temps caractéristique  $\tau$  est un paramètre phénoménologique appelé temps de relaxation, généralement de l'ordre de  $10^{-14}$  s. Schématiquement, il correspond à la durée moyenne entre deux collisions de l'électron avec les cations du réseau cristallin.

#### • PFD appliqué à l'électron

L'électron subit la force de Lorentz  $-e\vec{E}$  et la force de frottement  $\vec{f}$ , donc

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m_e}{\tau} \vec{v} \quad \text{soit} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{v} = -\frac{e}{m_e} \vec{E}.$$

Espace 12

#### • Résolution de l'équation différentielle

Forme générale des solutions :

$$\vec{v} = \vec{V} e^{-t/\tau} - \frac{\tau e}{m_e} \vec{E}$$

Espace 13

Condition initiale : les vitesses des électrons sont initialement dues à l'agitation thermique, aléatoire, si bien que la vitesse de l'électron moyen peut être supposée nulle.

$$\vec{v}(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} \vec{0} = \vec{V} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} - \frac{\tau e}{m_e} \vec{E} \quad \text{d'où} \quad \vec{v} = -\frac{\tau e}{m_e} \vec{E} (1 - e^{-t/\tau})$$

Espace 14

Vitesse en régime permanent : si la tension varie sur des durées  $T \gg \tau$  (i.e.  $f \ll 1/\tau = 10^{14}$  Hz) alors le régime transitoire est de durée négligeable et l'électron est constamment en régime permanent, auquel cas

$$\vec{v} = -\frac{\tau e}{m_e} \vec{E}.$$

### • Densité de courant dans le modèle de Drude

L'électron auquel le PFD a été appliqué est supposé avoir les propriétés moyennes de tous les électrons du système, sa vitesse  $\vec{v}$  est donc la vitesse d'ensemble des électrons.

$$\vec{j} = -ne\vec{v} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m_e}\vec{E}.}$$

Les vecteurs  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  sont donc colinéaires et proportionnels en tout point du milieu.

Espace 15

## III.B - Loi d'Ohm locale

De manière générale, on appelle **relation constitutive** d'un milieu l'équation qui relie la densité de courant  $\vec{j}$  dans le milieu au champ électromagnétique  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ . La relation de proportionnalité entre  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  établie dans le modèle de Drude se retrouve dans de nombreuses situations.

On appelle **conducteur ohmique** un milieu dont la relation constitutive est la **loi d'Ohm locale**,

$$\vec{j} = \gamma\vec{E},$$

où  $\gamma$  est appelée la **conductivité électrique** du milieu, qui s'exprime en  $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  ou  $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ .

La conductivité électrique est également fréquemment notée  $\mathcal{S}$ . On définit également la **résistivité** du milieu par  $\rho = 1/\gamma$ , en  $\Omega \cdot \text{m}$  (même notation mais ne pas confondre avec une densité de charge!).

**Remarque pour le futur :** la loi d'Ohm locale s'écrit donc  $\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$ , ce qui est une forme analogue à la loi de Fourier de la conduction thermique.

### Ordres de grandeur de conductivité électrique :

| Cuivre (bon conducteur)                        | Silicium (semi-conducteur)          | Eau pure (isolant)                                |
|--|-------------------------------------|---|
| $6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ | $1 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ | $1 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ |

La conductivité du silicium s'entend ici en l'absence de dopage, c'est-à-dire de traitement spécifique destiné à contrôler et améliorer cette conductivité.

► **Pour approfondir :** En PT, la loi d'Ohm est une hypothèse « par défaut » et souvent implicite sur les conducteurs. Elle repose pourtant sur plusieurs hypothèses, pas forcément valables en toutes circonstances et dans tous les milieux.

En premier lieu, le mouvement de l'électron moyen du modèle de Drude est supposé atteindre son régime permanent. Si le champ électrique varie sur des durées plus courtes que celle nécessaire à atteindre la vitesse limite, la conductivité électrique est également modifiée. Dans le cas où ces variations seraient périodiques de période  $T$ , la loi d'Ohm locale reste valable tant que  $T \gg \tau$  soit  $f \ll 1/\tau = 10^{13}$  Hz. Ainsi, même s'il y a de la marge, la loi d'Ohm n'est valable que dans une limite de basse fréquence.

De plus, le modèle de Drude suppose qu'il n'existe qu'un champ électrique dans le métal, et pas de champ magnétique. En présence d'un champ  $\vec{B}$ , les porteurs de charge seraient déviés par la force de Lorentz magnétique, et  $\vec{j}$  ne serait plus colinéaire à  $\vec{E}$ . Il en résulte une modification sur la résistance apparente du matériau : on parle de magnétorésistance.

Enfin, d'autres milieux peuvent être envisagés, dans lesquels les mécanismes de conduction électrique sont différents, et dont la relation constitutive entre  $\vec{j}$  et les champs diffère également. Citons par exemple le cas des plasmas, essentiel pour la propagation des ondes électromagnétiques dans l'atmosphère, dans lesquels les porteurs de charge se déplacent dans le vide, et ne subissent donc pas de force de frottement. Mentionnons aussi les jonctions entre semi-conducteurs différents (diode, etc.) dans lesquelles la relation entre courant et tension n'est pas linéaire, à cause de la structure microscopique du matériau. On peut enfin évoquer les supraconducteurs, au sein desquels la conduction repose sur des mécanismes purement quantiques que le modèle de Drude ne peut pas décrire. La relation constitutive du matériau n'a alors plus rien à voir avec la loi d'Ohm locale. ■

### • Cas particulier : conducteur en équilibre électrostatique

Un conducteur électrique est dit **en équilibre électrostatique** si le courant  $y$  est nul.

▷ Conséquence sur le champ électrique :  $\vec{E} = \vec{j}/\gamma = \vec{0}$

Espace 16

▷ Conséquence sur le potentiel :  $\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0}$  donc  $V = \text{cte}$  dans un conducteur en équilibre

Espace 17

▷ Conséquence sur la densité de charge :  $\rho = \varepsilon_0 \text{div} \vec{E} = 0$

Espace 18

↪ si un conducteur en équilibre électrostatique est chargé, alors il ne peut s'agir que de charges surfaciques ... et réciproquement si un matériau en équilibre électrostatique est chargé en volume alors il ne peut s'agir que d'un isolant.

**Remarque :** on comprend ainsi pourquoi un condensateur est toujours modélisé par des distributions surfaciques de charge.

### • Cas particulier : conducteur parfait

Un conducteur électrique est dit **parfait** si sa conductivité électrique est infinie. Un conducteur parfait n'existe pas : c'est bien sûr un cas limite théorique, utile en modélisation.

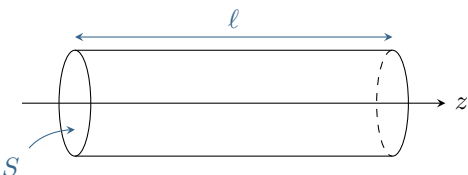
▷ Conséquence sur le champ électrique :

$\vec{E} = \vec{j}/\gamma$  donc quel que soit le courant traversant le conducteur, le champ électrique  $y$  est nul.

Espace 19

**Remarque :** en pratique, un supraconducteur s'approche beaucoup d'un conducteur parfait ... mais il tient ses propriétés de phénomènes quantiques et n'est pas un conducteur ohmique, si bien qu'il n'est pas concerné par ce paragraphe.

## III.C - Loi d'Ohm intégrale



Considérons un échantillon unidimensionnel d'axe  $(Oz)$ , de longueur  $\ell$  et de section  $S$ , fait d'un conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$ .

↪ objectif : retrouver la loi d'Ohm que l'on connaît, et exprimer sa résistance.

Loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V, \quad \text{soit} \quad j_z = -\gamma \frac{dV}{dz}$$

Intégration sur une section transverse : il s'agit d'un domaine à  $z = \text{cte}$ , or  $j_z$  et  $dV/dz$  ne dépendent que de  $z$ , donc

$$I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iint j_z dS = S j_z = -\gamma S \frac{dV}{dz}$$

On intègre par une séparation de variable entre les deux extrémités du fil

$$I \int_0^\ell dz = -\gamma S \int_{V(0)}^{V(\ell)} dV \quad \text{d'où} \quad I \ell = -\gamma S [V(\ell) - V(0)]$$

en convention récepteur  $U = V(0) - V(\ell)$ , donc on obtient

$$U = \frac{\ell}{\gamma S} I. \quad \text{d'où} \quad \boxed{R = \frac{\ell}{\gamma S}}$$

R



Un échantillon de conducteur ohmique de section  $S$  et longueur  $\ell$  a pour résistance

$$R = \frac{\ell}{\gamma S}$$

⚠️⚠️⚠️ **Attention !** On constate que les dimensions interviennent : la résistance n'est pas caractéristique d'un matériau, mais d'un système (= matériau + géométrie).

**Remarque pour le futur :** cette expression fait écho à celle de la résistance thermique d'une plaque de section  $S$  et d'épaisseur  $\ell$  faite d'un matériau de conductivité thermique  $\lambda$ ,

$$R_{th} = \frac{\ell}{\lambda S}$$

C'est normal : les lois locales sont analogues, les définitions aussi.

## IV - Effet Joule à l'échelle mésoscopique

Nous allons analyser les échanges d'énergie entre le champ électromagnétique et les porteurs de charge par un raisonnement mécanique : le champ exerce sur les porteurs de charge la force de Lorentz, la puissance qu'il leur cède est donc celle de cette force. Dans tout ce paragraphe, on ne raisonne que sur les charges *libres* : les charges liées subissent d'autres forces que celles envisagées ici, qui garantissent qu'elles restent attachées aux noyaux.

### IV.A - Force de Lorentz à l'échelle mésoscopique

#### • Densité volumique de force de Lorentz

▷ Force subie par un unique porteur de charge libre, modélisant le comportement moyen de tous les autres :

$$\vec{F}_{L1} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \text{ avec } \vec{v} \text{ vitesse d'ensemble}$$

▷ Résultante sur un volume mésoscopique  $d\tau$  :

Nombre de porteurs :  $dN = n d\tau$  avec  $n$  la densité volumique de porteurs libres

$$\text{d'où } d\vec{F}_L = n d\tau q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\text{et on peut réorganiser sous la forme } d\vec{F}_L = (nq\vec{E} + nq\vec{v} \wedge \vec{B}) d\tau = (\rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) d\tau$$

▷ Conclusion :



À l'échelle mésoscopique, la force de Lorentz est décrite par une densité volumique de force

$$\vec{f}_L = \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}.$$

- **De la force de Lorentz magnétique à la force de Laplace**

**Rappel :** un tronçon de conducteur de longueur infinitésimale parcouru par un courant d'intensité  $i$  et placé dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$  subit la force de Laplace,

$$\vec{F}_{\text{Lapl}} = i \vec{d\ell} \wedge \vec{B}$$

où  $\vec{d\ell}$  est orienté dans le sens de  $i$ .

**Démonstration :** la partie électrique de la force de Lorentz permet de mettre en mouvement les porteurs de charge le long du fil (c'est-à-dire assure l'existence d'un courant dans le fil), mais n'est évidemment pas dépendante de l'existence d'un champ magnétique.

↪ on ne raisonne ici que sur la partie magnétique de la force de Lorentz.

Fil conducteur cylindrique d'axe  $(Oz)$ . Un tronçon élémentaire de longueur  $d\ell$  a pour volume  $S d\ell$ , et subit donc une force de Lorentz magnétique totale

$$\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} \times S d\ell = j_z S d\ell \vec{e}_z \wedge \vec{B} = i \vec{d\ell} \wedge \vec{B}$$

Espace 23



La force de Laplace est la résultante à l'échelle macroscopique des forces de Lorentz subies à l'échelle microscopique par les porteurs de charge.



## IV.B - Densité volumique de puissance Joule

- **Cas général**

▷ Puissance fournie par la force de Lorentz au porteur de charge moyen :

$$\mathcal{P}_{L1} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Espace 24

**Remarque :** On retrouve que la force de Lorentz magnétique ne travaille pas.

▷ Résultante sur un volume mésoscopique  $d\tau$  :

$$\delta \mathcal{P}_L = n d\tau q \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \underbrace{(nq \vec{v})}_{=\vec{j}} d\tau$$

Espace 25

▷ Conclusion :



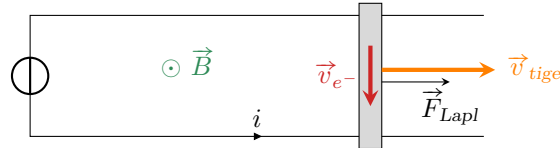
À l'échelle mésoscopique, les porteurs de charge reçoivent de la part du champ électromagnétique une puissance de densité volumique

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$



\*\*\* **Attention !** Une puissance est algébrique, et il faut être vigilant aux conventions de signe : cette puissance est *cédée* par le champ électromagnétique et *reçue* par les porteurs de charge.

**Remarque :** Dans l'expérience des rails de Laplace (cf. cours de PTSI sur l'induction), c'est bien la force de Laplace qui met en mouvement la tige mobile et lui donne une énergie cinétique. Il ne faut donc pas confondre : dire que la force de Lorentz magnétique ne travaille pas n'équivaut pas à dire que la force de Laplace ne travaille pas ! En effet, ce n'est pas le même système qui est considéré, et donc pas la même vitesse qui est utilisée pour définir la puissance. Dans la discussion ci-dessus, la vitesse  $\vec{v}$  est la vitesse d'ensemble des porteurs de charge libres, dirigée parallèlement au fil conducteur, ou à la tige dans l'expérience des rails de Laplace. En revanche, lorsque l'on étudie cette expérience, le système considéré n'est plus un porteur de charge mais la tige elle-même, à laquelle la vitesse est perpendiculaire. Ainsi, la vitesse considérée n'étant plus la même et plus dans la même direction, il y a bien travail de la force de Laplace.



### • Cas d'un conducteur ohmique

Avec la loi d'Ohm locale :  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  d'où

$$p = \gamma \|\vec{E}\|^2 = \frac{\|\vec{j}\|^2}{\gamma} > 0$$

Dans un conducteur ohmique, les porteurs de charge reçoivent de la part du champ électromagnétique une puissance volumique d'effet Joule

$$p_J = \gamma \|\vec{E}\|^2 = \frac{\|\vec{j}\|^2}{\gamma} > 0$$

Elle est toujours positive.

**Interprétation :** ce sont toujours les porteurs de charge qui reçoivent de l'énergie de la part du champ et jamais le contraire.

↪ que devient cette énergie ?

dissipée par les interactions avec le réseau cristallin (cf. force de frottement du modèle de Drude) et transformée en chaleur, c'est l'effet Joule.