

# Champ magnétique

## Théorème d'Ampère

### Plan du cours

<b>I</b>	<b>Ce que vous savez déjà</b>	<b>3</b>
I.A	Sources de champ magnétique et lignes de champ . . . . .	3
I.B	Force de Lorentz magnétique . . . . .	4
I.C	Principe de superposition . . . . .	4
I.D	Approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques . . . . .	5
<b>II</b>	<b>Des propriétés des distributions de courant à celles du champ magnétostatique</b>	<b>6</b>
II.A	Symétries de la distribution de courant, direction du champ magnétostatique . . . . .	6
II.B	Invariances de la distribution de courant, variables du champ magnétostatique . . . . .	8
<b>III</b>	<b>Théorème d'Ampère</b>	<b>9</b>
III.A	Démonstration à partir de l'équation de Maxwell-Ampère . . . . .	9
III.B	Exemple : fil infiniment fin . . . . .	11
III.C	Exemple : fil épais parcouru par un courant uniforme. . . . .	13
III.D	Exemple : champ créé par un solénoïde infini . . . . .	14
<b>IV</b>	<b>Flux magnétique</b>	<b>17</b>
IV.A	Équation de Maxwell-Thomson et conservation du flux magnétique. . . . .	17
IV.B	Flux magnétique au travers d'une surface s'appuyant sur un contour fermé . . . . .	18
IV.C	Loi de Faraday . . . . .	19
IV.D	Rappel de PTSI : Flux propre et inductance propre. . . . .	20
<b>V</b>	<b>Énergie magnétique</b>	<b>22</b>
V.A	Densité volumique d'énergie magnétique . . . . .	22
V.B	Définition énergétique de l'inductance. . . . .	22

### Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 2 « Magnétostatique ».

L'étude de la magnétostatique menée dans cette partie s'appuie le plus possible sur les différents aspects qualitatifs et quantitatifs vus en première année de PTSI, les étudiants sont donc déjà familiarisés avec le concept de champ magnétostatique. La loi de Biot et Savart n'est pas introduite; l'utilisation de celle-ci pour calculer un champ magnétostatique est donc exclue. Les distributions de courants surfaciques ne sont pas introduites à ce niveau du programme, elles le sont uniquement à l'occasion de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait. On aborde les propriétés intégrales du champ et on utilise le théorème d'Ampère pour des calculs dans des cas présentant un haut degré de symétrie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Symétries et invariances des distributions de courant.	Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé.
Propriétés de flux et de circulation. Théorème d'Ampère.	Identifier les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère.  Choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère en vue de déterminer l'expression d'un champ magnétique.  Utiliser une méthode par superposition.

Notions et contenus	Capacités exigibles
	Citer quelques ordres de grandeur de valeurs de champs magnétostatiques.
Modèles du fil rectiligne infini de section non nulle et au solénoïde infini.	Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume et par un solénoïde infini en admettant que le champ est nul à l'extérieur.
Lignes de champ, tubes de champ.	Orienter les lignes de champ du champ magnétostatique créé par une distribution de courants. Associer les variations de l'intensité du champ magnétostatique à l'évolution de la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de ligne de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 3 « Équations de Maxwell ».

Dans cette partie, une vision cohérente des lois de l'électromagnétisme est présentée. [...] Elle permet notamment de revenir qualitativement sur l'induction étudiée en classe de PTSI.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Équations de Maxwell : formulations locale et intégrale.	Associer l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday. Citer, utiliser et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale. Établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.
Approximation des régimes quasi-stationnaires (ou quasi-permanents) magnétique.	Simplifier les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans le cadre de l'ARQS en admettant que les courants de déplacement sont négligeables.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

## Ces cinq dernières années au concours

- ▷ Écrit : épreuve A 2022.
- ▷ Oral : de temps en temps.

Dans ce chapitre, nous abordons les principales propriétés du champ magnétique en régime stationnaire, c'est-à-dire indépendant du temps. Nous verrons également qu'elles se généralisent au cas des régimes lentement variables, dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques.

## I - Ce que vous savez déjà

### I.A - Sources de champ magnétique et lignes de champ

Les sources de champ magnétostatique sont les courants électriques constants et la matière aimantée. Les lignes de champ sont des courbes fermées qui s'enroulent autour des sources, voir figure 1.

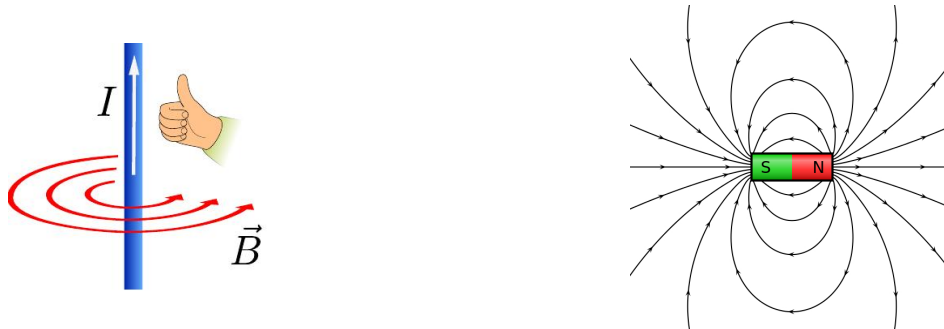


Figure 1 – Lignes de champ magnétique créées par un fil et un aimant droit.

*Champ créé par un courant :*

Le sens d'enroulement d'une ligne de champ magnétique est relié au sens du courant qui le crée par la règle de la main droite.

*Champ créé par un aimant permanent :*

Les lignes de champ magnétique sont orientées du pôle nord vers le pôle sud.

Si on connaît la direction du champ magnétique, on peut également retrouver le sens du courant qui le crée par la règle de la main droite, voir figure 2.

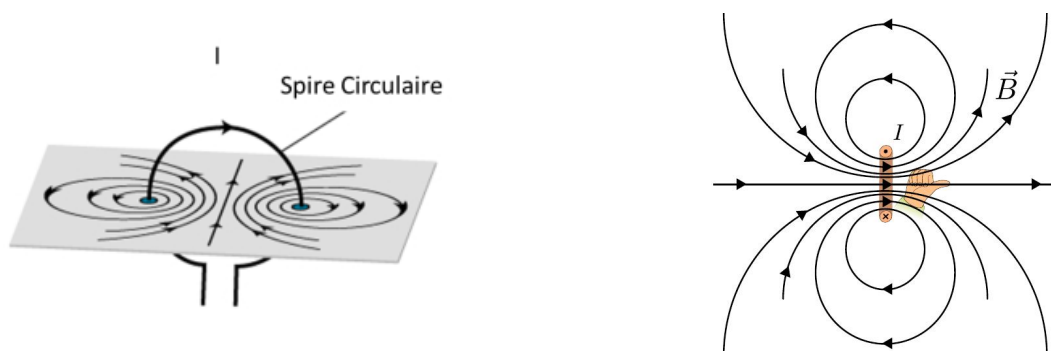


Figure 2 – Lignes de champ magnétique créées par une spire.

L'analogie entre les lignes de champ créé par une spire et un aimant amène à la notion de **moment magnétique**. Le moment magnétique d'une spire plane de surface  $S$  et de normale  $\vec{n}$  orientée par la règle de la main droite relative à l'intensité qui la parcourt vaut

$$\vec{m} = iS\vec{n}.$$

La donnée du moment magnétique est suffisante pour décrire le champ à grande distance de la spire. Le moment magnétique d'un aimant est par définition égal au moment magnétique d'une spire qui produit les mêmes lignes de champ à grande distance.

Les champs magnétiques s'expriment en Tesla T. Un champ magnétique de 1 T est un champ fort.

Exemple	Données	Ordre de grandeur de $\ \vec{B}\ $
Bobine parcourue par un courant $I$ , $n$ spires par unité de longueur	$I = 10 \text{ A}$ , $n = 10 \text{ mm}^{-1}$ , sur l'axe de la bobine	$\ \vec{B}\  = \mu_0 n I \simeq 10^{-1} \text{ T}$
Aimant permanent au néodyme	à la surface	0,1 à 1 T
Champ magnétique terrestre	à la surface de la Terre	$\simeq 10^{-4} \text{ T}$
Machine d'IRM		$\simeq 5 \text{ T}$
Champ magnétique pulsé (électroaimant, production pendant qq ms)		$\simeq 100 \text{ T}$
Étoile à neutron	à la surface	$\simeq 10^{11} \text{ T}$

Figure 3 – Ordres de grandeur de champs magnétiques.

## I.B - Force de Lorentz magnétique

Une particule test de charge  $q_0$  placée en  $M$  et en mouvement à la vitesse  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  subit la **force de Lorentz magnétique**

$$\vec{F}_L = q_0 \vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{B}(M)$$

Espace 1

↪ cette force permet une définition « mécanique » du champ magnétostatique en termes de force par unité de charge, mais elle moins simple à exploiter que celle du champ électrostatique par la force de Lorentz électrique.

► **Pour approfondir** : Cette définition mécanique sous-entend également que le champ électromagnétique peut dépendre du référentiel dans lequel il est calculé. Cela est d'ailleurs assez intuitif : des charges fixes dans un référentiel peuvent être en mouvement dans un autre, et donc être associées ou non à un courant, qui n'est pas source du même champ. Ce mouvement peut également modifier certaines symétries de la distribution.

Pour l'illustrer dans un cas simple, considérons deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  en déplacement l'un par rapport à l'autre à la vitesse  $\vec{V}$ , appelée dans ce contexte *vitesse d'entraînement*. On suppose  $V \ll c$  pour utiliser les lois de la mécanique classique (ce qui n'est jamais évident en électromagnétisme!). La loi de composition des vitesses s'écrit alors

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}.$$

Pour relier entre eux les champs dans les deux référentiels, on utilise le fait que les forces sont invariantes par changement de référentiel : il s'agit d'une interaction entre deux systèmes, qui ne dépend que de la façon dont ils évoluent l'un par rapport à l'autre, et pas de la façon dont on observe cette évolution. Ainsi, en exprimant la force de Lorentz dans les deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ ,

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$$

soit

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}' - \vec{V} \wedge \vec{B}$$

L'égalité devant être vérifiée pour toute vitesse  $\vec{v}$ , on en déduit les lois de transformation des champs entre les deux référentiels :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{B}' = \vec{B}.$$

La situation se complique lorsque les référentiels se déplacent à vitesse relativiste l'un par rapport à l'autre, et les lois de transformation des champs prennent une forme plus générale ... mais plus compliquée. ■

## I.C - Principe de superposition

Comme au chapitre précédent, le principe d'additivité des forces permet de comprendre le principe de superposition des champs magnétiques.

### Principe de superposition :

Le champ magnétique créé par la réunion de plusieurs distributions de courants est la somme des champs créés par chacune des distributions prises individuellement.

D'un point de vue plus fondamental, ce principe de superposition vient de la linéarité des équations de Maxwell vis-à-vis des termes sources.

## I.D - Approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques

### • Comparaison des échelles de temps

La variation d'une source de champ ( $\rho$  ou  $\vec{j}$ ) en un point  $P$  va modifier les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  en ce point, et de proche en proche le champ électromagnétique en tout point  $M$  de l'espace. Ces modifications se transmettent sous forme d'une **onde électromagnétique**, à la célérité  $c$  dans le vide.

↔ durée nécessaire pour atteindre un point  $M$  :  $\tau = PM/c$

Cette durée peut-elle être suffisamment courte pour être négligée ?

Tout dépend de l'échelle temporelle à laquelle on se place : il faut comparer  $\tau$  au temps (ou à la fréq) caractéristique d'évolution des sources.

Espace 2

L'**approximation des régimes quasi-stationnaires** (ou quasi-permanents) consiste à négliger le temps  $\tau$  de propagation de l'onde électromagnétique au travers du système devant le temps caractéristique  $T$  de variation des sources de champ,

$$\tau \ll T$$

### Application 1 : Validité de l'ARQS

1 - Considérons un téléphone de taille  $\ell \sim 10$  cm mettant en jeu des fréquences de l'ordre de 100 kHz. Son électronique interne peut-elle être analysée dans l'ARQS ?

2 - Jusqu'à quelle distance d'une centrale le réseau électrique peut-il être traité dans l'ARQS ?

1 Temps de propagation de l'onde :  $\tau = \frac{\ell}{c} = \frac{10 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^8} \sim 3 \cdot 10^{-10}$  s.

Temps caractéristique de variation des sources :  $T = 1 \cdot 10^{-5}$  s

Conclusion : un téléphone fonctionne bien dans l'ARQS.

2 L'ARQS est valable tant que  $\frac{L}{c} \ll T = \frac{1}{f}$  donc pour des distances  $L \ll \frac{c}{f} = \frac{3e8}{50} = 6000$  km.

Conclusion : l'ARQS convient à l'échelle d'une région mais pas à l'échelle d'un pays ou d'un continent.

Espace 3

### • Comparaison des effets des charges et des courants

De plus, pour un système donné, les charges électriques (via  $\rho$ ) et les courants électriques (via  $\vec{j}$ ) n'ont pas la même influence : la plupart du temps, l'effet des charges est négligeable devant celui des courants. La combinaison de cette hypothèse avec celle d'ARQS forme l'**ARQS magnétique**.

Toutes les propriétés des champs magnétostatiques demeurent vraies dans l'ARQS magnétique.

En effet, nous justifierons que les équations de Maxwell relatives au champ magnétique sont identiques en régime « rigoureusement » stationnaire et en régime d'ARQS magnétique.

### • Cas particulier du condensateur

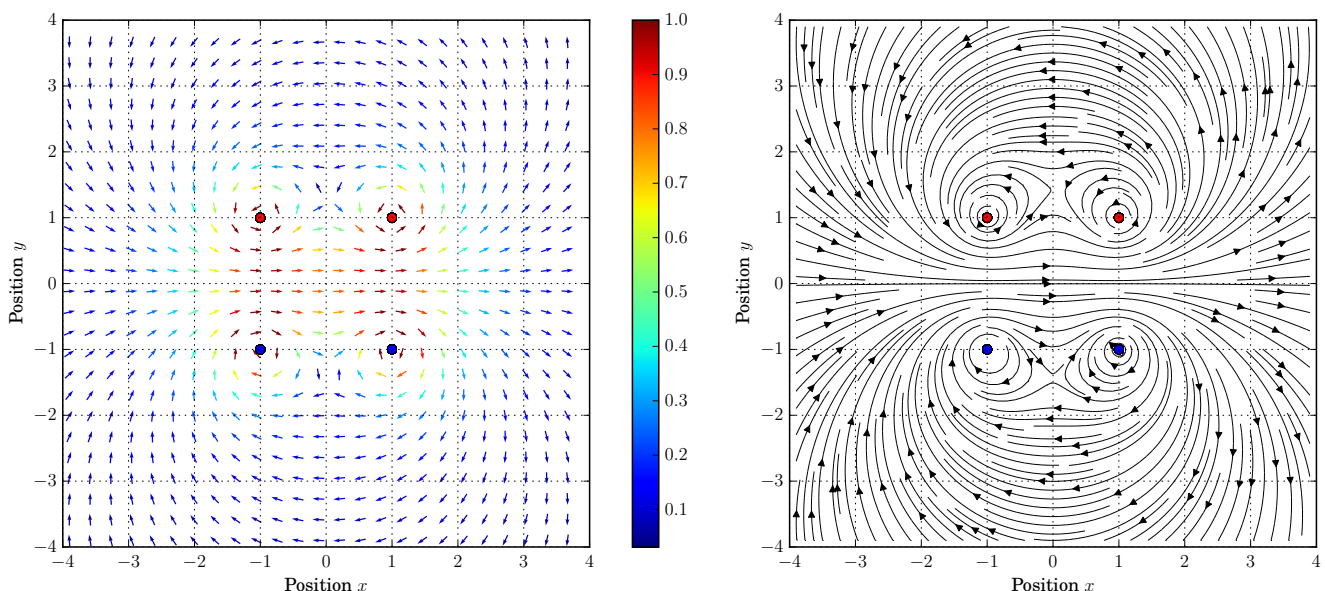
Le condensateur constitue une exception notable à l'ARQS magnétique. En effet, il n'y a aucun courant dans l'isolant et seulement des charges électriques sur les armatures, donc l'effet des charges l'emporte sur celui des courants. Calculer le champ magnétique au sein d'un condensateur en régime variable ne peut donc pas se faire à l'aide des outils développés dans ce chapitre et nécessite l'utilisation « complète » des équations de Maxwell en régime dépendant du temps. Cependant, on se contentera généralement d'admettre que le champ électrique au sein d'un condensateur et les calculs qui en découlent (potentiel, capacité) sont inchangés en régime lentement variable par rapport au régime statique.

## II - Des propriétés des distributions de courant à celles du champ magnétostatique

Les propriétés discutées dans ce paragraphe sont celles que vous avez déjà rencontrées en PTSI, mais généralisées aux distributions volumiques de courant et plus seulement aux distributions filiformes.

### II.A - Symétries de la distribution de courant, direction du champ magnétostatique

Il existe une loi analogue à la loi de Coulomb qui permet de calculer le champ magnétostatique en tout point par intégration sur la distribution volumique de courants, appelée loi de Biot et Savart (hors programme en PT). Cette loi permet de démontrer toutes les propriétés ci-dessous, que nous nous contenterons de constater par analyse d'une carte de champ magnétique.



**Figure 4 – Champ magnétique créé par une distribution de quatre courants.** Les points notent des courants portés par des fils rectilignes orthogonaux à la feuille. Tous ces courants sont égaux. Toutes les valeurs ont été normalisées.

Sens des courants :

D'après la RMD, les deux courants du haut sortent de la figure et les deux courants du bas s'enfoncent dans la figure.

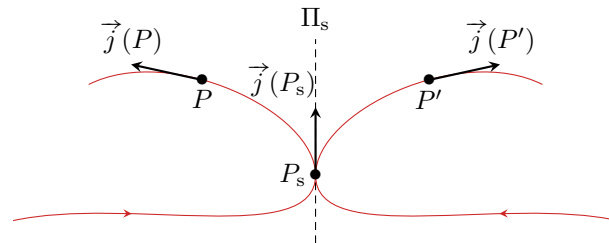
Espace 4

- Effet d'un plan de symétrie de la distribution de courant

Une distribution de courant possède un **plan de symétrie**  $\Pi_s$  lorsque les densités de courant en tous points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à  $\Pi_s$  sont symétriques l'une de l'autre,

$$\vec{j}(P') = \text{sym}_{\Pi_s} \vec{j}(P)$$

Le vecteur densité de courant  $\vec{j}(P_s)$  en un point  $P_s \in \Pi_s$  est inclus dans  $\Pi_s$ .



Identification d'un plan de symétrie sur la figure 4 : Le plan  $x = 0$  est plan de symétrie de la distribution.

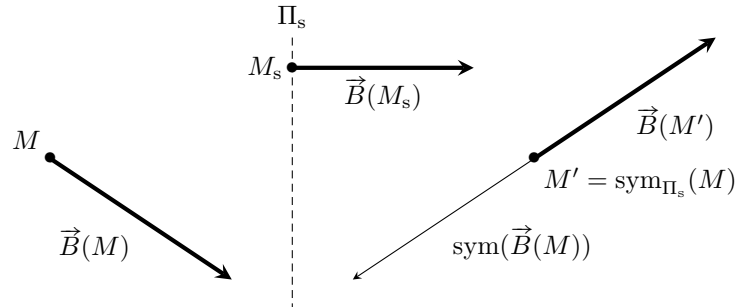
Espace 5

**Généralisation** : considérons une distribution de courant possédant un plan de symétrie  $\Pi_s$ . Rappelons de plus qu'être « anti-symétrique » signifie être « l'opposé du symétrique ».

Les champs magnétostatiques  $\vec{B}(M)$  et  $\vec{B}(M')$  en deux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport au plan  $\Pi_s$  sont **anti-symétriques** par rapport à  $\Pi_s$ , c'est-à-dire

$$\vec{B}(M') = -\text{sym}_{\Pi_s} (\vec{B}(M))$$

Le champ magnétostatique  $\vec{B}(M_s)$  en un point  $M_s$  appartenant au plan  $\Pi_s$  est orthogonal à ce plan.



⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** La propriété de symétrie est inversée par rapport au champ électrostatique.

Trouver un plan de symétrie est très avantageux dans le cas des champs magnétiques, car *un seul* plan de symétrie suffit à déterminer la direction de  $\vec{B}$ .

- Cas particulier d'une distribution plane

Si la distribution de courant est plane, alors ce plan est un plan de symétrie.

En effet : notons  $\Pi_0$  le plan de la distribution.

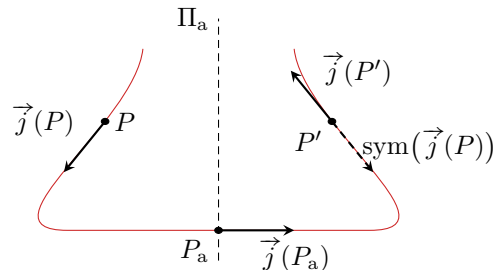
- ▷ pour deux points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à  $\Pi_0$ , on a bien  $\vec{j}(P) = \vec{j}(P') = \vec{0}$  ;
- ▷ un point  $P_0$  appartenant au plan  $\Pi_0$  est son propre symétrique, et il est évident que  $\vec{j}(P_0) = \vec{j}(P_0)$  !

- Effet d'un plan d'anti-symétrie de la distribution de courant

Une distribution de courant possède un **plan d'anti-symétrie**  $\Pi_a$  lorsque les densités de courant en tous points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à  $\Pi_a$  sont anti-symétriques l'une de l'autre,

$$\vec{j}(P') = -\text{sym}_{\Pi_a} \vec{j}(P)$$

Le vecteur densité de courant  $\vec{j}(P_a)$  en un point  $P_a \in \Pi_a$  est orthogonal à  $\Pi_a$ .



Identification d'un plan d'anti-symétrie sur la figure 4 :  
Le plan  $y = 0$  est plan de symétrie de la distribution.

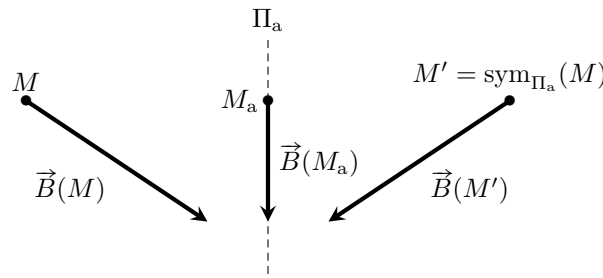
Espace 6

**Généralisation** : considérons une distribution de courant possédant un plan d'anti-symétrie  $\Pi_a$ .

Les champs magnétostatiques  $\vec{B}(M)$  et  $\vec{B}(M')$  en deux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport au plan  $\Pi_a$  sont **symétriques** par rapport à  $\Pi_a$ , c'est-à-dire

$$\vec{B}(M') = \text{sym}_{\Pi_a} (\vec{B}(M))$$

Le champ magnétostatique  $\vec{B}(M_a)$  en un point  $M_a$  appartenant au plan  $\Pi_a$  est inclus dans ce plan.



⚡ ⚡ ⚡ **Attention !** La propriété de symétrie est inversée par rapport au champ électrostatique.

## II.B - Invariances de la distribution de courant, variables du champ magnétostatique

Exactement comme une distribution de charge, une distribution de courant peut présenter deux types d'invariance : par rotation et par translation.

**Exemple de distribution invariante par translation :**

fil infiniment long, qu'il s'agisse d'un fil infiniment fin ou d'un fil cylindrique épais parcouru par un courant axial. Le faire dessiner et dessiner  $\vec{j}$  en deux points  $P$  et  $P'$  de la distribution

Espace 7



**Exemple de distribution invariante par rotation :**

le fil fin l'est, le fil épais aussi. Autre exemple : cylindre avec distribution de courant orthoradiale. Le faire dessiner et faire dessiner  $\vec{j}$  en deux points  $P$  et  $P'$ .

Espace 8

⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** Ne pas confondre :  $\vec{j}(P) \neq \vec{j}(P')$  car la direction change au cours de la rotation.



Les invariances des distributions ont les mêmes conséquences en électrostatique et magnétostatique : dans un système de coordonnées adapté, elles rendent le champ indépendant d'une ou plusieurs variables.

(R)

**III - Théorème d'Ampère**

Le théorème d'Ampère est un théorème intégral qui permet un calcul du champ magnétique créé par une distribution de haute symétrie.

**III.A - Démonstration à partir de l'équation de Maxwell-Ampère**

Les ingrédients sont les mêmes que pour le théorème de Gauss : une équation de Maxwell locale et un théorème d'analyse vectorielle donnent un théorème intégral.

**• Équation de Maxwell Ampère****Équation de Maxwell-Ampère :**

En tout point  $M$  de l'espace,  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

où  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  est la **perméabilité magnétique du vide**.

Dans le cas particulier du régime stationnaire,

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

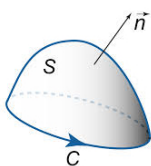
(R)

**Interprétation physique :**

- ▷ des courants créent un champ magnétique ;
- ▷ en régime variable, un couplage existe entre  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , mais il disparaît en régime stationnaire.

**• De l'équation de Maxwell-Ampère au théorème d'Ampère en régime stationnaire**

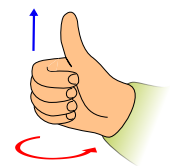
**Théorème de Stokes :** joue un rôle analogue au théorème de Green-Ostrogradski.



Soit  $S$  une surface ouverte s'appuyant sur le contour fermé  $C$ , orientés l'un par rapport à l'autre par la règle de la main droite.

Alors, pour tout champ vectoriel  $\vec{U}$  suffisamment régulier,

$$\iint_S (\text{rot } \vec{U}) \cdot \vec{dS} = \oint_C \vec{U} \cdot \vec{dl}.$$



**Démonstration du théorème d'Ampère :** soit  $C$  un contour fermé orienté, nommé dans ce contexte **contour d'Ampère**, et  $S$  une surface orientée par RMD s'appuyant sur  $C$ .

$$\iint_S (\text{rot } \vec{B}) \cdot \vec{dS} \underset{\text{Stokes}}{=} \oint \vec{B} \cdot \vec{dl} \underset{\text{MA}}{=} \iint_S \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{dS} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

où  $I_{\text{enlacé}}$  est le courant qui traverse le CA compté algébriquement dans le sens de  $\vec{dS}$ .

Espace 9

### Théorème d'Ampère :

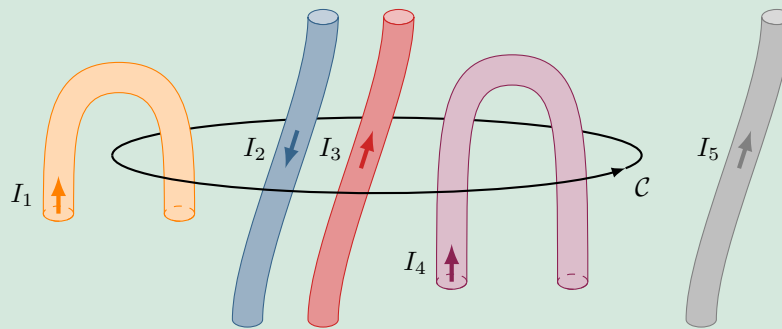
La circulation du champ magnétique le long d'un contour d'Ampère est relié au courant algébrique enlacé par ce contour,

$$\oint_{\text{CA}} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}.$$

- ▷ **Attention !** Le courant enlacé est algébrique : compté positivement s'il traverse le contour d'Ampère dans le sens donné par la règle de la main droite et négativement sinon.
- ▷ Les courants non-enlacés par le contour n'ont pas d'impact sur la circulation de  $\vec{B}$ , mais ne pas confondre, ils en ont sur le champ via sa direction : l'étude des symétries et des invariances se fait sur *la totalité* de la distribution.
- ▷ De même, la position des courants au travers du contour est sans impact sur la circulation, mais pas sur le champ.

### Application 2 : Calcul de courant enlacé

Quel est le courant enlacé par le contour  $\mathcal{C}$  ci-dessous ?



$$I_{\text{enlacé}} = -I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_4 = -I_1 - I_2 + I_3.$$

Espace 10

### • Généralisation l'ARQS magnétique

Le second terme de l'équation de Maxwell-Ampère est appelé **courant de déplacement**,

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

par opposition au **courant de conduction**  $\vec{j}$ . L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit donc

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D).$$

On admet alors le résultat suivant :

Dans les hypothèses de l'ARQS magnétique, le courant de déplacement est négligeable.

$$\left\| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \|\vec{j}\|$$

L'équation de Maxwell-Ampère et le théorème d'Ampère s'écrivent alors comme en régime stationnaire, et ce même si l'intensité dépend du temps,

$$\text{rot } \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\text{CA}} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}(t).$$

↪ les champs magnétiques se calculent exactement de la même façon en ARQS magnétique et en régime statique.

### III.B - Exemple : fil infiniment fin

#### Application 3 : Champ créé par un fil rectiligne infiniment fin

Considérons un fil rectiligne, infiniment fin (rayon  $R \rightarrow 0$ ), de longueur infinie, parcouru par un courant d'intensité  $I$  constante ou lentement variable au sens de l'ARQS magnétique. Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  qu'il crée en tout point de l'espace.

M!



Figure 5 – Fil infiniment fin.

❶ Schéma et coordonnées : évidemment cylindriques,

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z.$$

❷ Symétries de la distribution de courant

Comme toujours, les seuls plans intéressants sont ceux qui passent par le point  $M$ . En magnétostatique, il est plus intéressant de trouver un plan de symétrie de la distribution de courant car il donne directement la direction de  $\vec{B}$  ... c'est possible ici, mais ce ne sera pas toujours le cas.

M

**Remarque pratique :** si vous avez un doute sur la nature symétrique ou anti-symétrique d'un plan, souvenez-vous que

- ▷ en un point  $P_s$  d'un plan  $\Pi_s$ ,  $\vec{j}(P_s)$  est inclus dans  $\Pi_s$  ;
- ▷ en un point  $P_a$  d'un plan  $\Pi_a$ ,  $\vec{j}(P_a)$  est orthogonal à  $\Pi_a$ .

🔗 Identifier un plan de symétrie pertinent pour cette distribution de courant, le représenter sur les deux schémas, et en tirer les conséquences sur les composantes de  $\vec{B}$ .

Ici, le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  est plan de symétrie de la distribution de courant. Le champ  $\vec{B}(M)$  est donc orthogonal à ce plan, donc

$$\vec{B} = B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta.$$

**Remarque :** Ce résultat est bien sûr cohérent avec ce que l'on peut intuitivement par la règle de la main droite, et cohérent également avec la présence d'un plan d'anti-symétrie de la distribution de courant.

🔗 Identifier ce plan d'anti-symétrie, et vérifiez que ce qu'on peut en déduire est cohérent avec la conclusion précédente.

le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est un plan d'anti-symétrie de la distribution de courant, donc le champ  $\vec{B}(M)$  est inclus dans ce plan, ce qui est compatible avec le fait qu'il soit porté par le vecteur  $\vec{e}_\theta$ .

Espace 11

### ③ Invariances de la distribution de courant

✎ Identifier deux transformations géométriques laissant invariante la distribution de courant, et en tirer les conséquences sur les variables dont dépend  $B_\theta$ .

La distribution de courant est invariante par translation selon  $\vec{e}_z$  et par rotation autour de l'axe  $Oz$ , donc  $\vec{B}(M)$  ne dépend ni de  $z$  ni de  $\theta$  :

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta.$$

### ④ Construction du contour d'Ampère

(M)

Il s'agit du même type de raisonnement que pour choisir une surface de Gauss : la circulation du champ magnétique doit s'exprimer simplement en fonction du champ en  $M$ . L'orientation du contour d'Ampère est arbitraire, mais quand c'est possible il est plus prudent de l'orienter dans le sens indiqué par les vecteurs unitaires.

✎ Identifier le contour d'Ampère pertinent et le représenter sur les deux schémas.

Ici la seule variable est  $r$ , donc on choisit un contour circulaire de rayon  $r$  orienté dans le sens de  $\vec{e}_\theta$ , qui a le bon goût d'être directement fermé. Le dessiner sur le schéma.

Espace 12

### ⑤ Calcul de la circulation

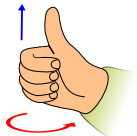
✎ Calculer la circulation de  $\vec{B}$  le long du contour d'Ampère.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B_\theta(r) \vec{e}_\theta \cdot d\ell \vec{e}_\theta = 2\pi r B_\theta(r).$$

Espace 13

### ⑥ Calcul du courant enlacé, compté algébriquement dans le sens donné par la règle de la main droite.

Il est fréquent de devoir procéder à une disjonction de cas en fonction de la position du point  $M$  où l'on calcule le champ par rapport à la distribution, mais ce n'est pas nécessaire ici.



Où que se trouve le point  $M$ , le courant enlacé est le courant  $I$  parcourant le fil, et il traverse le contour d'Ampère toujours dans le sens donné par la règle de la main droite, donc  $I_{\text{enl}} = +I$ .

⑦ **Conclusion** D'après le théorème d'Ampère, et en remettant le vecteur unitaire,

$$2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 I \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\theta.}$$

Espace 14

On constate que le champ magnétique créé par le fil diverge à proximité immédiate du fil, ce qui est physiquement impossible (densité volumique d'énergie infinie, voir paragraphe V). Comme pour le champ électrostatique, il s'agit d'un problème de modélisation : à proximité du fil, il n'est plus possible de négliger son rayon.

**Remarque :** ce résultat, facile à retrouver « en vitesse au brouillon », permet de faire l'analyse dimensionnelle de l'expression d'un champ magnétique :

$$[B] = [\mu_0] \times \text{A} \cdot \text{m}^{-1}.$$

### III.C - Exemple : fil épais parcouru par un courant uniforme

#### Application 4 : Champ magnétostatique créé par un fil rectiligne cylindrique

Reprendre le calcul avec un modèle amélioré, prenant en compte le rayon  $R$  du fil. La distribution de courant devient alors volumique avec une densité volumique de courant  $\vec{j}$  supposée uniforme telle que

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint j \vec{e}_z \cdot dS \vec{e}_z = j \pi R^2 \quad \text{soit} \quad \vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_z.$$

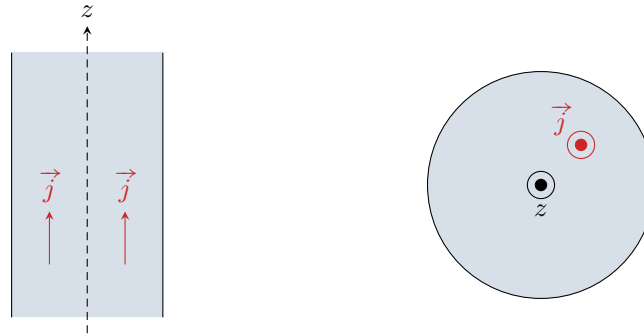


Figure 6 – Fil cylindrique de rayon  $R$ .

Les étapes ❶ à ❺ du calcul sont inchangées par rapport au paragraphe précédent, seul change le calcul du courant enlacé où il faut procéder à une disjonction de cas.

#### ❻ Calcul du courant enlacé

▷ si  $r > R$  :

comme le cas précédent, le contour d'Ampère enlance tout le fil, l'orientation est dans le bon sens, donc  $I_{\text{enl}} = I$

Espace 15

▷ si  $r < R$  : il faut alors poser le calcul du courant enlacé en revenant à la densité de courant,

$$I_{\text{enl}} = \iint j \vec{e}_z \cdot dS \vec{e}_z = j \iint dS = j \times \pi r^2 = \frac{r^2}{R^2} I.$$

#### ❼ Conclusion

$$2\pi r B_\theta(r) = \begin{cases} \mu_0 I & (\text{pour } r \geq R) \\ \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I & (r \leq R) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\theta & (\text{pour } r \geq R) \\ \mu_0 \frac{r}{2\pi R^2} I \vec{e}_\theta & (\text{pour } r \leq R) \end{cases}$$

Espace 16

- ▷ On retrouve le même résultat que précédemment pour  $r > R$ , ce qui est un bon point puisqu'il s'agit de deux modélisations du même objet physique.
- ▷ La divergence pour  $r \rightarrow 0$  a disparu, ce qui confirme qu'il s'agit bien d'un problème de modélisation utilisée dans un domaine inadapté plutôt que d'un effet physique.
- ▷ Le champ magnétique est continu à la surface du fil :  $\vec{B}(r = R^-) = \vec{B}(r = R^+)$ . Comme pour le champ électrostatique, il n'y a jamais de discontinuité avec des distributions volumiques de courant.

### III.D - Exemple : champ créé par un solénoïde infini

#### III.D.1 - Présentation



On appelle **solénoïde** un enroulement cylindrique de fil conducteur, dont les spires sont supposées jointives et infiniment fines.

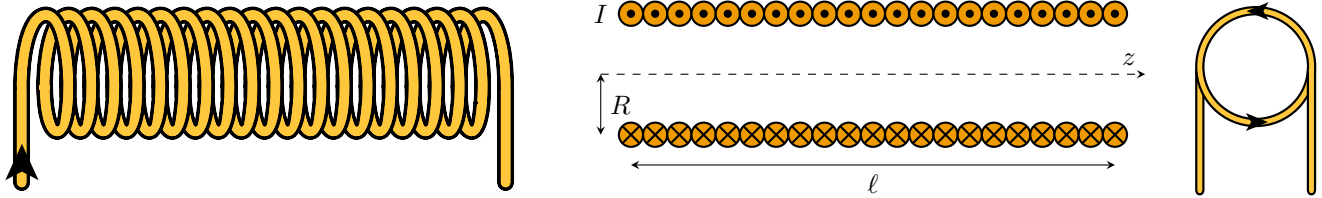


Figure 7 – Solénoïde. Gauche : vue 3d. Centre : vue en coupe. Droite : vue de face.

Modèle du solénoïde infini :

solénoïde de longueur  $\ell \gg$  rayon  $R$ , et observé d'un point où les effets de bord sont négligeables  $\rightsquigarrow$  double condition pour une modélisation infinie.

Espace 17

Donner le nombre de total de spires d'un solénoïde infini n'a pas de sens.



Un solénoïde infini est caractérisé par une **densité linéique de spires  $n$** , c'est-à-dire à dire son nombre de spires par unité de longueur : un tronçon de solénoïde de longueur  $\ell$  contient par définition  $N = n\ell$  spires.

M!

#### Application 5 : Champ magnétostatique créé par un solénoïde infini

Considérons un solénoïde d'axe  $(Oz)$ , infini, de rayon  $R$ , de densité linéique de spires  $n$ , parcouru par un courant  $I$  constant ou lentement variable au sens de l'ARQS magnétique.

- ▷ Montrer que le champ magnétique  $\vec{B}_{\text{ext}}$  est uniforme à l'extérieur du solénoïde.
- ▷ On admet que  $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$ . En déduire le champ magnétique  $\vec{B}_{\text{int}}$  à l'intérieur du solénoïde.

#### III.D.2 - Symétries et invariances

❶ **Schéma et coordonnées** : évidemment cylindriques.

❷ **Symétries de la distribution de courant**

Le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est plan de symétrie de la distribution, donc le champ  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à ce plan :  $\vec{B}(M) = B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$ .

Espace 18

**Remarque** : ce résultat est cohérent avec ce que l'on peut intuitiver par la règle de la main droite, et cohérent avec la présence d'un plan d'anti-symétrie dans la distribution de courant.

le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  est plan d'anti-symétrie de la distribution, donc le champ  $\vec{B}(M)$  est inclus dans ce plan, ce qui est compatible avec le fait qu'il soit porté par  $\vec{e}_z$ .

Espace 19

### ③ Invariances de la distribution de courant

En négligeant l'épaisseur des spires, la distribution de courant est invariante par translation le long de  $(Oz)$  et par rotation autour de cet axe, donc  $\vec{B}(M)$  ne dépend ni de  $z$  ni de  $\theta$  :

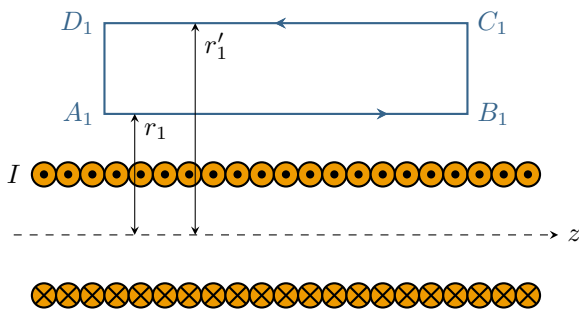
$$\vec{B}(M) = B_z(r)\vec{e}_z.$$

Espace 20

Il est alors impossible d'aller plus loin : le champ créé par un solénoïde ne peut pas être calculé entièrement avec les outils du programme de PT. L'énoncé doit nécessairement apporter une donnée sur ce champ, à laquelle il faut s'adapter pour mener à bien le calcul demandé. Dans ce cours nous montrerons d'abord que le champ à l'extérieur du solénoïde est uniforme, puis nous *admettrons* qu'il est en fait nul pour pouvoir calculer le champ intérieur.

### III.D.3 - Uniformité du champ à l'extérieur du solénoïde

#### ④ Construction du contour d'Ampère



**Idée :** choisir un contour qui impliquerait deux rayons différents  $r_1$  et  $r'_1$  et qui permettrait de montrer l'égalité des contributions dans la circulation.

↪

contour rectangulaire  $C_1$  avec  $r'_1 > r_1 > R$  de grand côté  $a$ .

Espace 21

#### ⑤ Circulation

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{A_1B_1} B\vec{e}_z \cdot dz\vec{e}_z + \int_{B_1C_1} B\vec{e}_z \cdot dr\vec{e}_r + \int_{C_1D_1} B\vec{e}_z \cdot dz(-\vec{e}_z) + \int_{D_1A_1} B\vec{e}_z \cdot dr(-\vec{e}_r) \\ &= B_z(r_1)a + 0 - B_z(r'_1)a - 0 \end{aligned}$$

Espace 22

#### ⑥ Courant enlacé

Ce contour n'enlace aucun courant !

Espace 23

## 7 Conclusion

D'après le TA,  $B_z(r_1)a + 0 - B_z(r'_1)a - 0 = 0$  donc  $B_z(r_1) = B_z(r'_1)$  ... mais comme les rayons  $r_1$  et  $r'_1$  ont été choisis quelconque (on a simplement imposé qu'ils soient extérieurs au solénoïde), on en déduit que le champ à l'extérieur du solénoïde est également indépendant de  $r$  : il est uniforme,

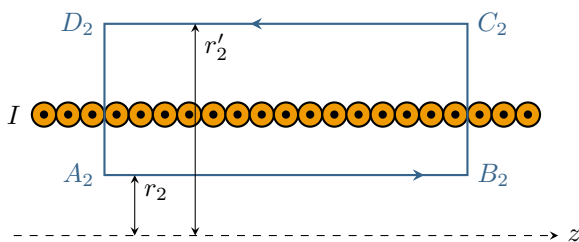
$$\vec{B}(M_{\text{ext}}) = B_{\text{ext}} \vec{e}_z.$$

Espace 24

**Remarque :** un raisonnement exactement analogue permettrait de montrer que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde.

### III.D.4 - Champ à l'intérieur du solénoïde

#### 4 Construction du contour d'Ampère



**Idée :** adapter le contour rectangulaire pour que l'un des côtés se trouve à l'endroit où le champ est connu et l'autre à l'endroit où on le cherche.

↪

ici, les côtés sont placés de part et d'autre du solénoïde.

Espace 25



#### 5 Circulation

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_{\text{int}}a - B_{\text{ext}}a = B_{\text{int}}a.$$

Espace 26

#### 6 Courant enlacé

Par définition, un tronçon de solénoïde compte  $N = na$  spires, toutes parcourues par le même courant  $I$ , donc

$$I_{\text{enl}} = NI = naI$$

Espace 27



## 7 Conclusion

$$B_{\text{int}} a = \mu_0 n a I \quad \text{d'où} \quad \vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{e}_z.$$

### III.D.5 - Conclusion générale

Le champ créé par un solénoïde est uniformément nul à l'extérieur du solénoïde.  
Il est également uniforme à l'intérieur du solénoïde, où il vaut

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{e}_z.$$

On constate qu'il n'y a pas continuité de  $\vec{B}$  en  $r = R$ , ce qui est la traduction ici d'un résultat bien plus général : la relation de passage du champ magnétostatique. On ne la donnera pas ici car elle est un peu plus compliquée à formuler que celle du champ électrostatique (notion de densité surfacique de courant).

Les champs électrique et magnétique sont généralement discontinus au niveau des distributions surfaciques de charge ou de courant.

## IV - Flux magnétique

### IV.A - Équation de Maxwell-Thomson et conservation du flux magnétique

#### • Formulation locale : équation de Maxwell-Thomson

**Équation de Maxwell-Thomson :**

En tout point  $M$  de l'espace,  $\text{div } \vec{B} = 0$ .

↪ contrairement au champ électrique, la divergence du champ magnétique ne dépend pas des sources de champ.

Cette équation est valable aussi bien en régime stationnaire qu'en régime variable. Elle est parfois appelée « équation de Maxwell-flux ».

► **Pour approfondir :** En électrostatique, l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$  et une identité d'analyse vectorielle conduit au potentiel électrostatique  $V$ ,

$$\vec{E} = -\text{grad } V.$$

La nullité d'un opérateur vectoriel pose la question d'une relation analogue pour le champ magnétique ... et, de fait, une autre identité d'analyse vectorielle appliquée à l'équation de Maxwell-Thomson permet de montrer que le champ magnétique peut toujours être écrit à partir d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  tel que

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

Contrairement au champ électrique, qui ne s'écrit  $-\text{grad } V$  qu'en régime permanent car l'équation de Maxwell-Faraday ne se simplifie pas en régime variable, la relation entre  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est valable aussi bien en statique qu'en régime dépendant du temps. ■

#### • Formulation intégrale : le champ magnétique est à flux conservatif

Soit  $\mathcal{S}$  une surface fermée orientée vers l'extérieur<sup>1</sup>, délimitant un volume  $\mathcal{V}$ .

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\text{div } \vec{B}) dV \underset{\text{GO}}{=} \underbrace{\oiint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S}}_{\text{MT}} = 0$$

Le flux du champ magnétique sortant d'une surface fermée est toujours nul.  
Le champ magnétique est dit **à flux conservatif**.

#### • Conséquence pour les lignes de champ

La conservation du flux permet de démontrer la propriété bien connue :

Les lignes de champ sont d'autant plus resserrées que le champ magnétique est fort.

La démonstration est identique à celle menée dans le cours d'électrostatique en s'appuyant sur un tube de champ.

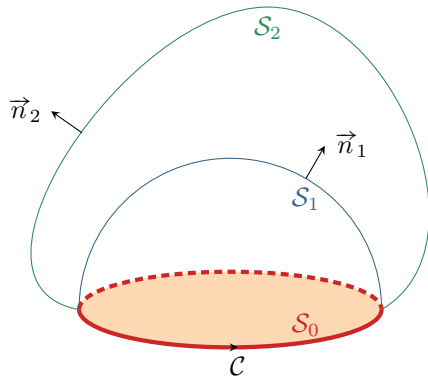
1. Dans un autre contexte, on parlerait de surface de Gauss

## IV.B - Flux magnétique au travers d'une surface s'appuyant sur un contour fermé



On dit qu'une surface  $\mathcal{S}$  ouverte s'appuie sur un contour fermé  $\mathcal{C}$  si  $\mathcal{C}$  définit le bord de  $\mathcal{S}$ .

**Exemple :** un bol ou un saladier est une surface ouverte qui s'appuie sur un contour circulaire.



L'orientation (arbitraire) de  $\mathcal{C}$  permet d'orienter de façon univoque les normales aux surfaces par la règle de la main droite.

Considérons deux surfaces  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  s'appuyant sur le même contour fermé  $\mathcal{C}$ . Montrons que le flux de  $\vec{B}$  est le même au travers de ces deux surfaces.

On les complète en surface fermée en y ajoutant  $\mathcal{S}_0$ , dont la normale  $\vec{n}_0$  doit être orientée vers le bas.

Espace 28

On note d'un prime les surfaces non orientées par RMD par rapport au contour  $\mathcal{C}$ . La surface  $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$  est fermée, donc

$$\iint_{\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 = \iint_{\mathcal{S}_0} \vec{B} \cdot d\vec{S}' + \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

De même pour la deuxième surface,

$$\iint_{\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 = \iint_{\mathcal{S}_0} \vec{B} \cdot d\vec{S}' + \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

On en déduit finalement

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\mathcal{S}_0} \vec{B} \cdot d\vec{S}'$$

et si l'on oriente la surface  $\mathcal{S}_0$  par RMD le signe disparaît.

Espace 29



Le flux du champ magnétique est identique au travers de toutes les surfaces s'appuyant sur un même contour fermé orienté.

↪ on peut donc choisir librement (= au plus simple) la surface pour le calculer.

## IV.C - Loi de Faraday

### • Formulation locale : équation de Maxwell-Faraday (rappel)

Équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Espace 30

Cette équation est inchangée dans l'ARQS magnétique.

**Sens physique :** les variations de champ magnétique sont source de champ électrique.

↪ c'est le phénomène d'induction électromagnétique.

### • Formulation intégrale : loi de Faraday

La version intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est la loi de Faraday, admise l'an dernier dans le cours sur l'induction. Pour rendre le lien explicite, raisonnons sur une surface  $\mathcal{S}$  s'appuyant sur un circuit électrique filiforme  $\mathcal{C}$ .

$$\iint \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{dS} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stokes}}}{=} \oint \vec{E} \cdot \vec{d\ell} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MF}}}{=} - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}.$$

Espace 31

↪ en régime variable, la circulation de  $\vec{E}$  le long d'un circuit fermé n'est plus nulle.

**Rappel d'électrostatique :** par définition du potentiel électrostatique  $V$ , en régime permanent,

$$\int_{AB} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = V(A) - V(B) \quad \text{donc} \quad \oint \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = 0.$$

**Modélisation électrocinétique équivalente :** Comme la loi de Faraday est valable dans l'ARQS, il est toujours possible de raisonner en termes électrocinétiques, même en présence d'induction. La circulation de  $\vec{E}$  s'interprète comme une tension : en présence d'induction, tout se passe comme si un générateur supplémentaire imposant une tension  $e$  appelée **force électromotrice induite** était ajouté au système réel.

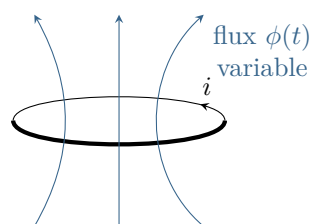
**Expression de la fém induite :** À la condition que la surface d'intégration soit fixe, la dérivée temporelle et l'intégrale de surface peuvent être permutées :

$$\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS} = \frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} \right) = \frac{d\phi}{dt}$$

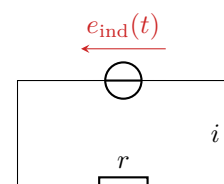
Dans ces hypothèses, on retrouve la loi de Faraday. Pour être cohérent sur le plan des conventions, elle nécessite d'orienter le générateur induit en convention générateur par rapport à l'intensité dans le circuit.

Les variations de flux magnétique au travers d'un circuit fermé se modélisent électriquement par l'ajout d'un générateur induit dans le circuit, dont la fém en convention générateur s'écrit

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt}$$



vision magnétique



vision électrique

L'hypothèse de circuit fixe nécessaire pour passer de la forme locale à la forme intégrale explique les exceptions à la loi de Faraday que l'on peut rencontrer, par exemple pour un haut-parleur ou certaines machines tournantes. Les traiter dans une approche purement électromagnétique est possible mais trop technique à notre niveau : on utilise alors la conservation de la puissance,

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + e_{\text{ind}} i = 0.$$

↪ cf. cours sur l'induction de PTSI.

**Que représente la fém induite ?** Où se trouve le générateur induit dans un montage, par exemple de rails de Laplace ? Autrement dit, à quel endroit faut-il brancher un voltmètre pour mesurer la fém induite ?

Cette question n'a pas de sens : le générateur induit est partout et nulle part, il est là pour modéliser l'effet de circulation non nulle. On peut voir et mesurer ses conséquences, notamment le courant induit, mais pas mesurer directement la fém induite.

Espace 32

Attention pour autant à ne pas caricaturer à l'extrême inverse : il existe de nombreux systèmes dans lesquels la fém d'induction est belle et bien mesurable, à commencer par toutes les centrales électriques, dans lesquelles la tension est générée par la rotation d'un alternateur.

#### IV.D - Rappel de PTSI : Flux propre et inductance propre

(R)



On appelle **flux propre**  $\phi_p$  le flux du champ magnétique créé par un circuit  $\mathcal{C}$  au travers du circuit  $\mathcal{C}$  lui-même.

*Remarque : Ce flux propre est en général très compliqué à calculer : d'une part le circuit n'a pas forcément une géométrie simple, d'autre part le champ créé par le circuit varie fortement à l'échelle du circuit.*

La notion d'inductance propre peut être définie en toute généralité, mais elle n'a en pratique d'intérêt que pour les bobines.

(R)



On appelle **inductance propre** d'une bobine la grandeur  $L$  telle que

$$\phi_p = Li$$

où  $i$  est l'intensité traversant la bobine

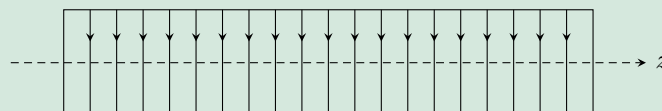
L'inductance propre est toujours positive, et ne dépend que de la géométrie du circuit.

En particulier, elle ne dépend pas de l'intensité parcourant le circuit.

(M)

#### Application 6 : Inductance d'un solénoïde, calcul par le flux propre

Considérons une bobine de longueur  $\ell$  très supérieure à son rayon, contenant  $N$  spires montées en série, d'axe  $\vec{e}_z$  et de surface  $S$ . La bobine est parcourue par un courant  $i$ .



- 1 - On modélise la bobine par un solénoïde infini : que néglige-t-on ? Rappeler l'expression du champ à l'intérieur de la bobine.
- 2 - En déduire le flux propre, puis l'expression de l'auto-inductance  $L$ .
- 3 - Retrouver la loi de comportement de la bobine telle que vous la connaissez.

1 La modélisation par un solénoïde infini revient à négliger l'influence des bords de la bobine. À l'intérieur de la bobine et loin des bords, le champ vaut donc

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{e}_z.$$

**2** Compte tenu du sens (conventionnel) de  $i$  le vecteur normal à une spire est  $\vec{n} = +\vec{e}_z$ . Le flux au travers d'une spire vaut donc

$$\varphi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i S.$$

Le flux propre est la somme des flux au travers de toutes les spires. En négligeant les effets de bord,

$$\phi_p = N\varphi \quad \text{soit} \quad \phi_p = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i S$$

d'où par identification

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S.$$

La dépendance en  $N^2$  indique que les effets d'auto-induction sont d'autant plus marqués que le nombre de spires bobinées est élevé. La conclusion se généralise sans peine.

**3** D'après la loi de Faraday, la fém d'induction propre vaut

$$e_p = -\frac{d\phi_p}{dt} = -L \frac{di}{dt}.$$

Cependant, elle est orientée en convention générateur alors que la loi de comportement est donnée en convention récepteur,

$$u = -e_p = +L \frac{di}{dt}$$

## V - Énergie magnétique

### V.A - Densité volumique d'énergie magnétique

Un champ magnétique est un réservoir d'énergie.  
La **densité volumique d'énergie magnétique** s'écrit

$$u_m = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$$

*Remarque* : analogie avec l'écriture de la densité volumique d'énergie électrique,

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0\|\vec{E}\|^2 \quad \longleftrightarrow \quad u_m = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\mu_0} \times \|\vec{B}\|^2$$

Sens physique : un volume  $d\tau$  au voisinage d'un point  $M$  contient une énergie d'origine magnétique  $u_m d\tau$ , un volume macro contient

$$U_m = \iiint_{M \in V} u_m(M) d\tau$$

Espace 34

### V.B - Définition énergétique de l'inductance

On appelle **inductance propre** d'une bobine la grandeur  $L$  telle que

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$$

où  $\mathcal{E}_m$  est l'énergie magnétique totale stockée dans le volume de la bobine et  $i$  l'intensité traversant la bobine.

#### Application 7 : Inductance d'un solénoïde, calcul par le flux propre

Considérons la même bobine que dans l'exercice précédent. Retrouver l'expression de l'inductance par un raisonnement énergétique.

Densité volumique d'énergie magnétique dans la bobine :

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} \times \mu_0^2 \frac{N^2}{\ell^2} i^2$$

Énergie magnétique totale :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \times \mu_0 \frac{N^2}{\ell^2} i^2 \times S\ell$$

On identifie par conséquent

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S.$$

Espace 35