

# Champ magnétique

## Théorème d'Ampère

### Exercice 1 : Câble coaxial



- ▷ Théorème d'Ampère ;
- ▷ Inductance propre ;
- ▷ Énergie magnétique.

### Exercice 2 : Cylindre parcouru par un courant inhomogène



- ▷ Théorème d'Ampère ;
- ▷ Coordonnées cylindriques.

1 Par définition, l'intensité qui parcourt le cylindre vaut

$$I = \iint_{\text{section}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dS.$$

Sachant qu'en coordonnées cylindriques  $dS = r dr d\theta$ ,

$$I = 2\pi J_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = 2\pi J_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = 2\pi J_0 \frac{R^2}{4}$$

d'où on déduit

$$J_0 = \frac{2}{\pi R^2} I.$$

2 Soit  $M$  un point de l'espace où l'on cherche à calculer le champ magnétique.

• **Symétries** : le plan passant par  $M$  et contenant l'axe du cylindre est plan de symétrie de la distribution de courant, donc  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à ce plan, c'est-à-dire

$$\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta.$$

Ceci est cohérent avec le fait que le plan passant par  $M$  et orthogonal à l'axe du cylindre est plan d'antisymétrie de la distribution de courant, si bien que  $\vec{B}$  appartient à ce plan.

• **Invariances** : la distribution de courant est invariante par translation le long de  $(Oz)$  et par rotation autour de cet axe. Le champ  $\vec{B}(M)$  ne dépend donc ni de  $z$  ni de  $\theta$ , c'est-à-dire

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta.$$

• **Théorème d'Ampère** : on raisonne sur un cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $r$  et de normale  $\vec{e}_z$ .

Circulation de  $\vec{B}$  :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B_\theta(r) \vec{e}_\theta \cdot d\ell \vec{e}_\theta = 2\pi r B_\theta(r).$$

Courant enlacé :

- ▷ si  $r \geq R$  :  $I_{\text{enl}} = I$  ;
- ▷ si  $r \leq R$  :

$$I_{\text{enl}} = \iint_{\text{disque}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 2\pi J_0 \int_0^r \left( r' - \frac{r'^3}{R^2} \right) dr' = 2\pi J_0 \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right) \quad \text{d'où} \quad I_{\text{enl}} = \frac{2I}{R^2} \left( r^2 - \frac{r^4}{2R^2} \right).$$

Conclusion :

$$2\pi r B_\theta(r) = \begin{cases} \mu_0 I & \text{si } r \geq R \\ \mu_0 \frac{2I}{R^2} \left( r^2 - \frac{r^4}{2R^2} \right) & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

soit finalement

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } r \geq R \\ \frac{\mu_0 2I}{2\pi R^2} \left( r - \frac{r^3}{2R^2} \right) \vec{e}_\theta & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

**3** D'après l'expression donnée et celle de  $\vec{B}$ ,

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z$$

Si  $r \geq R$  alors on constate que  $rB_\theta = \mu_0 I / 2\pi$ , ce qui ne dépend pas de  $r$ , cohérent avec  $\vec{j}(r > R) = \vec{0}$ .

Si  $r \leq R$ , alors

$$rB_\theta = \frac{\mu_0 2I}{2\pi R^2} \left( r^2 - \frac{r^4}{2R^2} \right) \quad \text{donc} \quad \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \frac{\mu_0 2I}{2\pi R^2} \left( 2r - \frac{4r^3}{2R^2} \right) = \frac{\mu_0 4I}{2\pi R^2} \left( r - \frac{r^3}{R^2} \right)$$

ce qui donne bien, en réorganisant,

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \frac{2I}{\pi R^2} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{e}_z = \mu_0 \vec{j}$$

### Exercice 3 : Fil conducteur creux

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2



- ▷ Théorème d'Ampère;
- ▷ Principe de superposition.

**1** Cf. cours :

$$\vec{B}_0(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \vec{u}_\theta & \text{si } r \geq R \\ \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

**2** Par définition,  $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$ . Il faut donc exprimer  $\vec{u}_\theta$  en fonction de  $\vec{u}_z$  et  $\vec{u}_r$ , ce qui se fait grâce au produit vectoriel  $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$ . Ainsi,

$$\vec{u}_\theta = \frac{1}{r} \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM}.$$

On en déduit

$$\vec{B}_0(M) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 j \frac{R^2}{r^2} \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} & \text{si } r \geq R \\ \frac{1}{2} \mu_0 j \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

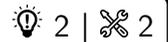
**3** On applique le principe de superposition : la cavité est vue comme la superposition de deux distributions de courant  $j \vec{u}_z$  et  $-j \vec{u}_z$ . À l'intérieur de la cavité, on a donc

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \mu_0 j \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} - \frac{1}{2} \mu_0 j \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{O'M}$$

avec  $O'$  un point origine sur l'axe du cylindre creux, ce qui se simplifie en

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \mu_0 j \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OO'}.$$

Le champ magnétique est donc uniforme à l'intérieur de la cavité.

**Exercice 4 : Modèle de Bean d'un supraconducteur**

- ▷ Équation de Maxwell-Ampère ;
- ▷ Principe de superposition.

**1** Soit  $M$  un point quelconque de l'espace. D'une part, le plan  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie de la distribution de courant ; et d'autre part la couche conductrice est invariante par translation selon  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$ . Ainsi,

$$\vec{B}(M) = B_y(X) \vec{e}_y.$$

**2** Le plan  $X = 0$  est un plan de symétrie de la distribution de courant. Ainsi, en tout point de ce plan,  $\vec{B}$  doit lui être orthogonal, c'est-à-dire porté par  $\vec{e}_x$ . Ceci n'est compatible avec la question précédente que si  $\vec{B} = \vec{0}$ .

**3** L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}.$$

Ainsi, à l'intérieur de la couche conductrice,

$$+ \frac{dB_y}{dX} \vec{e}_z = \mu_0 J_c \vec{e}_z$$

Par séparation des variables,

$$\int_{B_y(0)=0}^{B_y(X)} dB_y = \mu_0 J_c \int_0^X dX \quad \text{soit} \quad B_y(X) = \mu_0 J_c X \quad \text{donc} \quad \vec{B}(|X| \leq \delta/2) = \mu_0 J_c X \vec{e}_y.$$

À l'extérieur de la couche conductrice, la densité de courant est nulle, l'équation de Maxwell-Ampère implique donc que le champ est uniforme. La distribution de courant étant volumique, le champ est partout continu, d'où

$$\vec{B}(X \leq -\delta/2) = -\frac{1}{2} \mu_0 J_c \delta \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}(X \geq \delta/2) = +\frac{1}{2} \mu_0 J_c \delta \vec{e}_y.$$

**4** D'après le principe de superposition, le champ total est la somme du champ extérieur et des deux champs créés par les deux couches conductrices, ce que l'on peut écrire sous la forme

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{gauche}} + \vec{B}_{\text{droite}}.$$

Le champ créé par la couche conductrice de gauche se calcule exactement comme celui créé par la couche conductrice de droite, si ce n'est que le courant est en sens opposé et qu'un signe  $\ominus$  apparaît donc dans toutes les expressions. Ainsi, au cœur du supraconducteur,

$$\vec{0} = \vec{B}_0 + \underbrace{\frac{1}{2} \mu_0 (-J_c) \delta \vec{e}_y}_{\text{à droite de la couche de gauche}} + \underbrace{-\frac{1}{2} \mu_0 J_c \delta \vec{e}_y}_{\text{à gauche de la couche de droite}}$$

ce qui donne

$$B_0 - \mu_0 J_c \delta = 0 \quad \text{d'où} \quad \delta = \frac{B_0}{\mu_0 J_c}.$$

**5** Le principe de superposition s'applique de la même façon en tout point de l'espace. À l'extérieur de l'échantillon, les champs créés par les deux couches sont opposés et se compensent. Par exemple, pour  $x \geq a$ ,

$$\vec{B}(x \geq a) = \vec{B}_0 + \underbrace{\frac{1}{2} \mu_0 (-J_c) \delta \vec{e}_y}_{\text{à droite de la couche de gauche}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu_0 J_c \delta \vec{e}_y}_{\text{à droite de la couche de droite}} = \vec{B}_0.$$

Il en est de même pour  $x \leq a$ . Enfin, dans les couches conductrices, le champ  $\vec{B}_0$  et le champ créé par la deuxième couche sont uniformes, si bien que le champ varie linéairement. La continuité de  $\vec{B}$  en tout point d'une distribution volumique suffit à terminer le tracé sans qu'il ne soit nécessaire de le calculer exactement dans les deux couches. On en déduit le tracé de la figure 1.

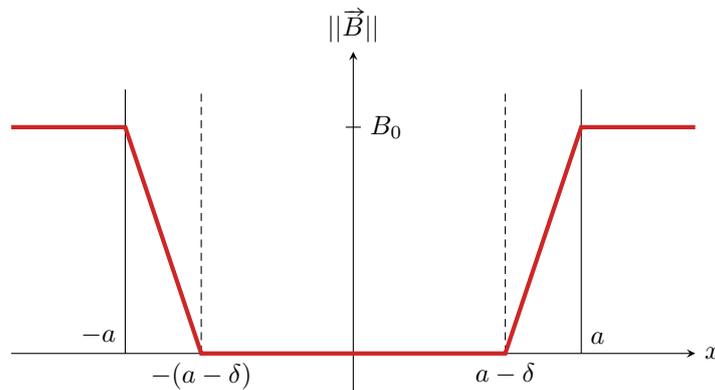


Figure 1 – Norme du champ magnétique dans l'échantillon.

### Exercice 5 : Solénoïdes imbriqués

oral CCINP PSI | 💡 2 | ✂️ 1

- 
 ▷ Théorème d'Ampère ;  
 ▷ Couplage inductif.

**1** Cf. cours : pour un solénoïde parcouru par un courant  $i$ , d'axe ( $Oz$ ) orienté par la règle de la main droite par rapport au sens de  $i$ , le champ est uniforme à l'intérieur et vaut

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z,$$

où  $n$  est le nombre de spires par unité de longueur.

**2** Par hypothèse,  $L \gg r_1$  et  $r_2$ , ce qui justifie d'approximer les solénoïdes comme infinis. En notant  $i_1$  et  $i_2$  les courants qui y circulent et compte tenu de l'orientation des spires, le champ qu'ils créent en leur intérieur vaut

$$\vec{B}_{1,2} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i_{1,2} \vec{e}_z.$$

#### Inductance propre $L_1$ :

▷ Flux créé par  $\mathcal{S}_1$  au travers d'une spire  $s_1$  de  $\mathcal{S}_1$  :

$$\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_1(M) \cdot dS \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_1$$

▷ Flux total créé par  $\mathcal{S}_1$  au travers de lui-même :

$$\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = N \phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i_1.$$

▷ Inductance propre : par définition,  $\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = L_1 i_1$  donc

$$L_1 = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

**Inductance propre  $L_2$  :** par la même démarche,

$$L_2 = \pi r_2^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

**Inductance mutuelle  $M$  :** comme le champ créé par  $\mathcal{S}_2$  est uniforme à l'intérieur de  $\mathcal{S}_1$  alors que la réciproque n'est pas vraie, il est plus simple de calculer  $M$  à partir du flux créé par  $\mathcal{S}_2$  au travers de  $\mathcal{S}_1$ .

▷ Flux créé par  $\mathcal{S}_2$  au travers d'une spire  $s_1$  de  $\mathcal{S}_1$  :

$$\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_2(M) \cdot dS \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_2$$

▷ Flux total créé par  $\mathcal{S}_2$  au travers de  $\mathcal{S}_1$  :

$$\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = N \phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i_2.$$

▷ Inductance mutuelle : par définition,  $\phi_{S_2 \rightarrow S_1} = M i_2$  donc

$$M = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

**3** Le circuit équivalent est tracé figure 2. Le circuit 1 contient une bobine et un générateur de courant imposant le courant  $i_1$ , le circuit 2 ne contient qu'une bobine court-circuitée. Il y a couplage inductif entre les deux circuits. Compte tenu de la convention récepteur,

$$u_1 = +L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = +L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

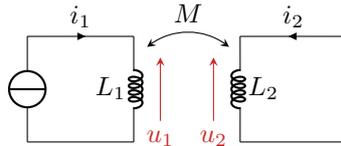


Figure 2 – Circuit électrique équivalent.

D'après la loi des mailles,  $u_2 = 0$  donc

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

et par intégration

$$i_2 = -\frac{M}{L_2} i_1 + \text{cte.}$$

Comme le solénoïde  $S_2$  n'est pas relié à un générateur, on peut supposer qu'il n'y a pas de courant continu qui serait physiquement impossible à cause des résistances des fils, même si elles sont faibles. Finalement,

$$i_2(t) = -\frac{M}{L_2} I \cos(\omega t),$$

d'amplitude

$$I_2 = \frac{M}{L_2} I = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 I.$$

**4** D'après le principe de superposition, en un point  $M$  se trouvant à l'intérieur des deux solénoïdes,

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} (i_1 + i_2) \vec{e}_z$$

d'où en remplaçant

$$\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} \left[1 - \frac{M}{L_2}\right] I \cos(\omega t) \vec{e}_z = \mu_0 \frac{N}{\ell} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] I \cos(\omega t) \vec{e}_z.$$

## Exercice 6 : Transformateur torique



▷ Théorème d'Ampère ;  
▷ Couplage inductif.

**1** Soit  $M$  un point quelconque de l'espace.

• **Symétries** : le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  (plan de la figure de droite de l'énoncé) est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à ce plan.

$$\rightsquigarrow \vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta.$$

- **Invariances** : en supposant les spires réparties continûment, alors la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ). Le champ  $\vec{B}(M)$  ne dépend donc pas de  $\theta$ , d'où

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta.$$

- **Théorème d'Ampère** :

- ▷ On raisonne sur un cercle passant par  $M$  et d'axe  $Oz$ , orienté par la règle de la main droite selon l'axe  $Oz$ .
- ▷ Circulation :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B(r, z) \vec{e}_\theta \cdot dl \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r, z).$$

- ▷ Courant enlacé : en raisonnant sur les schémas on peut facilement comprendre que le courant enlacé vaut

$$I_{\text{enl}} = \begin{cases} N_1 I_1 & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases}$$

Il faut toujours se méfier du signe des courants enlacés, par règle de la main droite avec l'orientation du contour : ici c'est positif.

- ▷ Conclusion : d'après le théorème d'Ampère,

$$2\pi r B_\theta(r, z) = \begin{cases} \mu_0 N_1 I_1 & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } M \in \text{tore} \\ \vec{0} & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases}$$

- **Inductance propre** : Le flux au travers d'une seule spire vaut

$$\varphi_{1 \rightarrow 1\text{sp}} = \iint \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi} \times \ln \frac{R+a}{R} \times a,$$

donc le flux propre du primaire est

$$\Phi_{1 \rightarrow 1} = N_1 \varphi_{1 \rightarrow 1\text{sp}} = \underbrace{\frac{\mu_0 N_1^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}}_{=L_1} i_1$$

- 2 Par le même raisonnement,

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}.$$

- 3 Toutes les spires sont identiques, donc

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \varphi_{1 \rightarrow 1\text{sp}} = \underbrace{\frac{\mu_0 N_1 N_2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}}_{=M} i_1$$

On constate alors que

$$M = \sqrt{L_1 L_2}.$$

- 4 La loi de comportement des bobines, modifiée par l'induction mutuelle, et avec  $i_2 = 0$  car secondaire ouvert donne

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

On en déduit alors

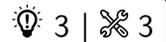
$$u_2 = \frac{M}{L_1} u_1 = \frac{N_2}{N_1} U_1 \cos(\omega t).$$

Si  $u_1$  était constante, le courant  $i_1$  serait constant également et la loi de comportement donnerait  $u_2 = 0$ .

On retrouve ici la loi des tensions d'un transformateur, en identifiant le rapport de transformation  $m = N_2/N_1$ .

- 5 Du rapport des amplitudes on déduit directement

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = 20.$$

**Exercice 7 : Lévitiation magnétique**

- ▷ Inductance propre ;  
 ▷ Flux magnétique ;  
 ▷ Force de Laplace.

1 Le flux de  $\vec{B}$  au travers de la bobine (2) s'écrit

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{(2)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \times \mu_0 n i_1(t) (1 - \cos \alpha) \times \pi b^2$$

et puisque par définition  $\phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$  on en déduit

$$M = \mu_0 n N \pi b^2 (1 - \cos \alpha).$$

2 Le schéma électrique équivalent est représenté figure 3.

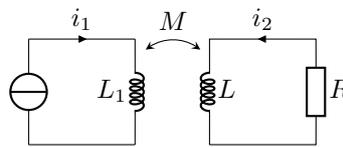


Figure 3 – Schéma électrique équivalent aux deux bobines couplées.

D'après la loi des mailles,

$$L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R i_2 = 0$$

et comme on est en régime sinusoïdal établi alors

$$jL\omega \underline{I}_2 + jM\omega \underline{I}_1 + R \underline{I}_2 = 0$$

d'où on déduit

$$\underline{I}_2 = -\frac{jM\omega}{R + jL\omega} \underline{I}_1 = -\frac{jM\omega}{R + jL\omega} I_0.$$

On en déduit d'abord

$$I_m = |\underline{I}_2| \quad \text{donc} \quad I_m = \frac{M\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} I_0.$$

Pour trouver  $\cos \varphi$  le plus simple est d'identifier la partie réelle sous la forme  $\text{Re } \underline{I}_2 = I_m \cos \varphi$ ,

$$\underline{I}_2 = -\frac{(jM\omega)(R - jL\omega)}{R^2 + L^2\omega^2} I_0 = -\frac{ML\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} I_0 - j \frac{MR\omega}{R^2 + L^2\omega^2} I_0$$

si bien que

$$\cos \varphi = -\frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

3 Raisonnons sur le cylindre suggéré par l'énoncé. Puisque  $r \ll a$ , on suppose

$$B_z(r, z, t) \simeq B_z(r=0, z, t)$$

si bien que  $B_z$  est uniforme sur les deux surfaces planes du cylindre. Le flux magnétique sortant d'une surface fermée étant nul, Ainsi,

$$\oiint_{\text{cylindre}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{lat}} \vec{B} \cdot dS \vec{e}_r + \iint_{\text{sup}} \vec{B} \cdot dS \vec{e}_z + \iint_{\text{inf}} \vec{B} \cdot (-dS \vec{e}_z).$$

soit encore

$$\oiint_{\text{cylindre}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \underbrace{-\pi r^2 B_z(0, z, t)}_{\text{face inférieure}} + \underbrace{\pi r^2 B_z(0, z + dz, t)}_{\text{face supérieure}} + \underbrace{2\pi r dz B_r(r, z, t)}_{\text{paroi latérale}} = 0$$

On identifie alors une dérivée,

$$\pi r^2 \frac{\partial B_z(0, z, t)}{\partial z} dz + 2\pi r dz B_r(r, z, t) = 0$$

et ainsi

$$B_r(r, z, t) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(0, z, t)}{\partial z}.$$

4 La difficulté de cette question vient du fait que  $\alpha$  dépend de  $z$  de façon pas évidente du tout. D'après la question précédente,

$$B_r(r=b, z, t) = -\frac{b}{2} \times \mu_0 n i_1 \frac{d(1 - \cos \alpha)}{dz}.$$

Calculons séparément la dérivée de  $1 - \cos \alpha$  avec  $\alpha = \alpha(z)$ ,

$$\frac{d(1 - \cos \alpha)}{dz} = + \sin \alpha \frac{d\alpha}{dz}.$$

Or  $\tan \alpha = a/z$ , donc

$$\frac{d \tan \alpha}{dz} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dz} = -\frac{a}{z^2}$$

ce qui permet d'identifier

$$\frac{d\alpha}{dz} = -\frac{a}{z^2} \cos^2 \alpha = -\frac{1}{a} \tan^2 \alpha \cos^2 \alpha = -\frac{1}{a} \sin^2 \alpha.$$

et enfin

$$\frac{d(1 - \cos \alpha)}{dz} = -\frac{1}{a} \sin^3 \alpha.$$

En combinant, on retrouve bien

$$B_r(r=b, z, t) = \frac{b}{2} \times \mu_0 n i_1 \times \frac{1}{a} \sin^3 \alpha \quad \text{soit} \quad B_r(r=b, z, t) = \frac{\mu_0 n i_1(t) b}{2a} \sin^3 \alpha.$$

5 La force de Laplace élémentaire subie par un tronçon de spire de la bobine (2) s'écrit

$$d\vec{F} = i_2 d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i_2 d\ell \vec{u}_\theta \wedge (B_r \vec{u}_r + B_z \vec{u}_z) = -i_2 d\ell B_r \vec{u}_z + i_2 d\ell B_z \vec{u}_r$$

En calculant la résultante sur la bobine, les composantes radiales en deux points diamétralement opposés se simplifient, seule demeure la composante verticale. Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -i_2 B_r(b, z, t) \int_{(2)} d\ell \vec{u}_z \\ &= -i_2 B_r(b, z, t) \times 2\pi N b \vec{u}_z \\ &= -2\pi N b I_m \cos(\omega t + \varphi) \times \frac{\mu_0 n b}{2a} I_0 \cos(\omega t) \sin^3 \alpha \vec{u}_z \\ &= -\frac{\mu_0 \pi N n b^2}{a} I_m I_0 \sin^3 \alpha \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}_z \\ &= -\frac{\mu_0 \pi N n b^2}{a} I_m I_0 \sin^3 \alpha \times \frac{1}{2} [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi] \vec{u}_z \end{aligned}$$

d'où en moyenne

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{\mu_0 \pi N n b^2}{2a} I_m I_0 \sin^3 \alpha \cos \varphi \vec{u}_z,$$

puisque  $\langle \cos(2\omega t + \varphi) \rangle = 0$

6 On a montré question 2 que  $\cos \varphi < 0$ , on en déduit donc que la force moyenne  $\langle \vec{F} \rangle$  est dirigée selon  $+\vec{u}_z$ , c'est-à-dire vers le haut. Il existe donc une altitude  $z$  pour laquelle elle compense exactement le poids et qui correspond à la position d'équilibre de la bobine (2).

Partant de la position d'équilibre, si la bobine (2) est déplacée vers le haut ( $z$  augmente) sous l'effet d'une perturbation alors  $\tan \alpha$  et  $\sin \alpha$  diminuent. La résultante du poids et de la force de Laplace devient donc dirigée vers le bas, ce qui ramène la spire à sa position d'équilibre : cette position est donc **stable**.

7 Un champ magnétique variable est source de champ électrique. L'aluminium étant un conducteur électrique, ce champ électrique crée un courant  $\vec{j}$  au sein du matériau : les spires de la bobine (2) modélisent **les lignes de courant de  $\vec{j}$**  dans le plateau d'aluminium. En raisonnant en termes de densité volumique de force de Laplace, on en déduit que le plateau subit lui aussi une force moyenne verticale vers le haut qui présente des propriétés analogues à  $\vec{F}$ . Il y a donc bien une analogie qualitative entre les deux dispositifs.